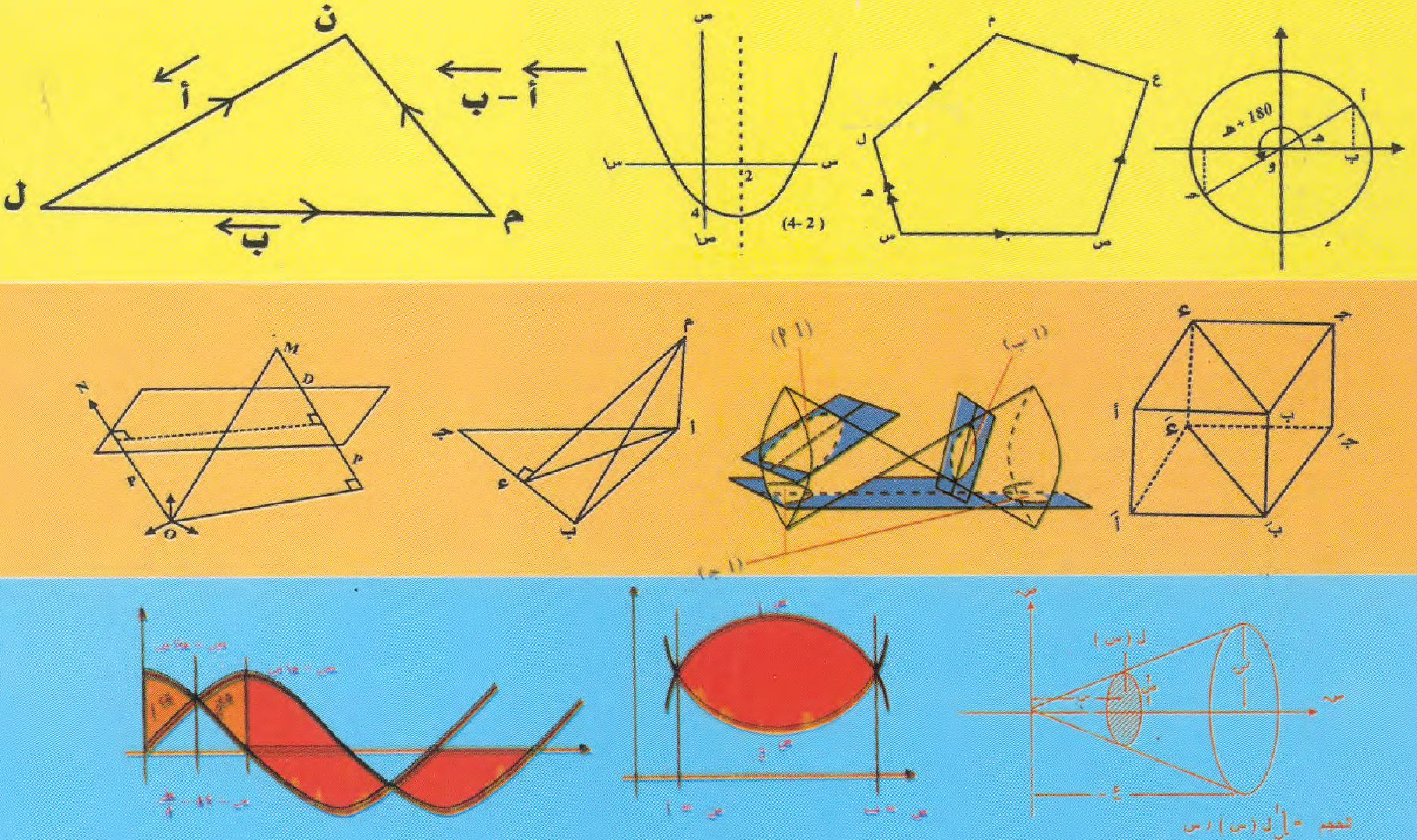
الرياضة II

الجبر ـ الهندسة الفراغية التفاضل والتكامل



أحمد السيد عامر

دار الفجر للنشر والتوزيع

الجبر – الهندسة الفراغية
التفاضل والتكامل

الرياضة II

الجبر – الهندسة الفراغية التفاضل والتكامل

أحمـــد السيد عامر

دار الفجـــر للنشـــر والتوزيع
2007

الرياضيات II

الجبر - الهندسة الفراغية
التفاضل والتكامل

أ. أحمد السيد عامـــر

حقوق النشر

الطبعة الأولي 2007

رقم الإيداع

15683

الترقيم الدولي I.S.B.N.

977 – 358 – 124 – 1

دار الفجـــر للنشـــر و التـــوزيـــع

4 شارع هاشم الأشـــقـــر - النزهة الجديدة - القاهرة

ت : 6246252 (00202) ف : 6246265 (00202)

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة

- لقد تميز القرن التاسع عشر عن غيره من القرون السابقة بأهمية بالغة فى مجال تطوير واكتشاف الرياضيات . وترجع أهمية هذا القرن فى اكتشاف وظهور ثلاثة أحداث هامة فى العلوم الرياضية . الحدث الأول كان ظهور مجال جديد فى الهندسة يختلف عن الهندسة اليونانية أو الهندسة الإقليدية . وجاء اكتشاف هذه الهندسة التى تعرف بالهندسة اللا إقليدية على يد ثلاثة مكتشفين هم العالم الروسى نيكولاى لوباشفسكى N.Lobachevsky (1793–1856) والعالم المجرى جون بوليا J.Bolyai (1793–1856) والعالم الألمانى تشارل جاوس C.Gauss (1793 – 1856) .
- أما الحدث الثانى فكان فى مجال التحليل الرياضى حيث ظهر فهم أعمق وتكامل أكثر لموضوع التحليل الرياضى وذلك بظهور ما يعرف بتحسيب التحليل الرياضى فى سنة ١٨٧٤ م . وكذلك بظهور فكرة اللانهاية فى التحليل الرياضى التى قدمها العالم الألمانى جورج كانتور G.Cantor (1845 – 1918) .
- أما الحدث الثالث كان فى مجال الجبر حيث نجد كثيراً من المشتغلين فى هذا المجال ساهموا بأبحاث مفيدة نذكر منهم على سبيل المثال لاجرانج (1736–1813) ، جالوا (1811 – 1832) ، جون بول (1815 – 1864) . وذلك بتقديمهم لمفاهيم ونظريات جديدة أثرت فى تطور علم الجبر ودفعت إلى تقدمه بعد ذلك .
- إن الرياضيات تلعب دوراً أساسياً فى حياة الإنسان منذ ظهوره على وجه الأرض فاخترع العدد وطريقة التغيير عنه بتطور ذكاء الإنسان وتعدد حاجاته .

فوصل إلى العدد ((الصفر)) ويعتبر من أعظم الاختراعات التى وصل إليها الإنسان ولم يقف الرياضيون منذ ذلك الحد بل اكتشفوا وبحثوا فى علوم الرياضيات حتى وصلوا إلى سطح القمر .

- ومازال علم حساب التفاضل والتكامل منذ اكتشف فى القرن السابع عشر هو الأساس والمحك المرتب فى دراسة العلوم الرياضية والفيزيائية وغيرها من العلوم الأخرى .

ومن المعروف عن علم التفاضل والتكامل هو كثرة تطبيقاته سواء أكانت رياضية أم فيزيائية .

أولاً :الجبر

الباب الأول

التباديل والتوافيق ونظرية ذات الحدين

مبدأ العد:

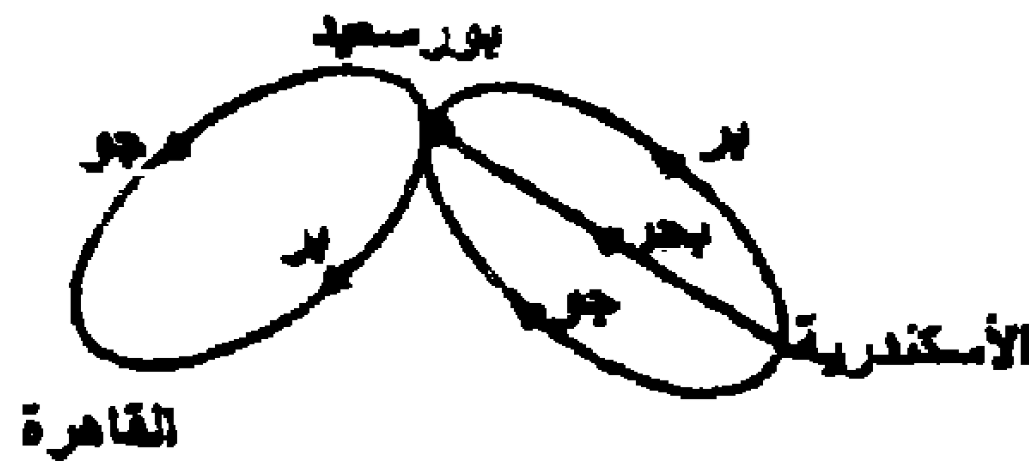
- هو الذي يعين عدد طرق اختيار عنصر من مجموعة مع عنصر من مجموعة أخري يسمي مبدأ العد .
- فعدد طرق اختيار عنصر من مجموعة (س) عدد عناصرها (ن) مع عنصر من مجموعة أخري (ص) عدد عناصرها (م) يساوي عدد الأزواج المرتبة من س إلي ص = عدد عناصر المجموعة ص = ن × م .
- يمكن تعميم مبدأ العد لأكثر من مجموعتين .

مثال:

إذا كان السفر من الإسكندرية إلي بورسعيد ممكناً بثلاث طرق هي بر ، بحر جو ويمكن السفر من الإسكندرية إلي القاهرة بطريقتين بر ، جو . فبكم طريقة يمكن السفر من الإسكندرية إلي القاهرة مارا ببورسعيد .

الحـــــل

∴ عدد الاختيارات = ٣ × ٢ = ٦ اختيارات



مثال :

إذا اخترت معك في رحلة ٣ بدلات ، ٤ قمصان . فبكم طريقة يمكن اختيار لبس هذه الملابس؟

الحـــــل

عدد طرق لبس هذه الملابس = ٣ × ٤ = ١٢

التباديل

إذا كان لدينا ن من الأشياء فإن عدد الأشياء المرتبة التي يمكن اختيارها من (ن) دون تكرار يسمي وتقرأ تباديل (ن) مأخوذة راءً راءً ويرمز لها بالرمز $^{ن}ل_{ر}$

مثال : أوجد تباديل الأعداد ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ مأخوذة أثنين أثنين .

الحـــــل

العدد ١ يؤخذ مع ٢، ٣ ، ٤ أي ٢١ ، ٣١ ، ٤١

العدد ٢ يؤخذ مع ١، ٣ ، ٤ أي ١٢ ، ٣٢ ، ٤٢

العدد ٣ يؤخذ مع ١، ٢ ، ٤ أي ١٣ ، ٢٣ ، ٤٣

العدد ٤ يؤخذ مع ١، ٢ ، ٣ أي ١٤ ، ٢٤ ، ٣٤

∴ $^{٤}ل_{٢}$ = ١٢ أي $^{٤}ل_{٢}$ = ٤ × ٣

∴ $^{ن}ل_{ر}$ = ن (ن-١) (ن-٢) (ن-٣) × ــــــ × (ن- ر + ١) ـــ (١)

مثلاً: $^{٧}ل_{٤}$ = ٧ × ٦ × ٥ × ٤ ، $^{١٥}ل_{٣}$ = ١٥ × ١٤ × ١٣ ، $^{م}ل_{٢}$ = م (م-١)

نتيجة :

من المعادلة (١) بوضع ر = ن ينتج أن :

$^{ن}ل_{ن}$ = ن (ن-١) (ن-٢) (ن-٣) ــــــ (ن- ر + ١)

= ن (ن - ١) (ن-٢) (ن-٣) ــــــ ٣ × ٢ × ١

ويمكن كتابة $^{ن}ل_{ن}$ علي الصورة |ن وتقرأ مضروب ن أي أن :-

|ن = ن (ن-١) (ن-٢) (ن-٣) ــــــ × ٣ × ٢ × ١ ـــ (٢)

مثلا : |٤ = ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٢٤

، |٦ = ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٧٢٠

ملاحظه: |ن = ن |ن-١ = ن (ن-١) |ن-٢ = ن (ن-١) (ن-٢) |ن-٣ وهكذا

مثلا: |٥ = ٥ |٤ = ٥ × ٤ |٣ وهكذا

قاعدة (١):

$$^{ن}ل_{ر} = \frac{|ن}{|ن-ر}$$

الإثبات :

$\because\ {}^{ن}ل_{ر} = ن\,(ن-١)\,(ن-٢)\,(ن-٣) \ldots (ن-ر+١)$

بضرب الطرف الأيسر في $\dfrac{|ن-ر}{|ن-ر}$

$$\therefore\ {}^{ن}ل_{ر} = \frac{ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣) \ldots (ن-ر+١)\ |ن-ر}{|ن-ر} = \frac{|ن}{|ن-ر}$$

$$\therefore\ {}^{ن}ل_{ر} = \frac{|ن}{|ن-ر} \quad \text{-----}\ (٣)$$

وهذا القانون يعتبر صيغة أخري لإيجاد قيمة $^{ن}ل_{ر}$ بدلالة مضروب ن ، مضروب (ن – ر)

نتيجة :

$|٠ = ١ \quad ، \quad {}^{ن}ل_{٠} = ١$

ملاحظة :

الصورة (١) تستخدم عندما ر عدد صغير معلوم

الصورة (٣) تستخدم عندما ر عدد كبير أو مجهول

مثال : اختصر $\dfrac{|٩}{|٧} + \dfrac{|٨}{|٦}$

الحـــــل

$$\frac{|٩}{|٧} + \frac{|٨}{|٦} = \frac{٩\times٨\ |٧}{|٧} + \frac{٨\times٧\ |٦}{|٦} = ٩\times٨ + ٨\times٧ = ١٢٨$$

مثال : إذا كان $^{ن}ل_{٣} = ٧٢٠$ فما قيمة ن

الحـــــل

$^{ن}ل_{٣} = ١٠ \times ٩ \times ٨ = {}^{١٠}ل_{٣}$

$\therefore$ ن = ١٠

<u>مثال</u> : إذا كان ٥ ل ر = ١٢٠ فاوجد قيمة ر

الحـــــــل

٥ ل ر = ٥ × ٤ × ٣ × .... (٥ – ٥ + ١)

أي نضرب العوامل في بعضها حتى نصل إلي العدد ١٢٠

٥ × ٤ = ٢٠ ، ٢٠ × ٣ = ٦٠ ، ٦٠ × ٢ = ١٢٠

∴ ٥ ل ر = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ = ١٢٠ ∴ ر = ٤

<u>مثال</u> : إذا كان لـ ن = ١٢٠ فما قيمة ن ؟

الحـــــــل

نحلل ١٢٠ إلي أعداد متتالية تبدأ بالعدد ١

∴ ١٢٠ = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١

∴ لـ ن = لـ ٥ ∴ ن = ٥

<u>مثال</u> : إذا كان ${}^{س+ص}ل_{٣} = ٥٠٤$ ، ${}^{س-ص}ل_{٢} = ٢٠$ فما قيمة كل من س ، ص ؟

الحـــــــل

${}^{س+ص}ل_{٣} = ٩ × ٨ × ٧$	${}^{س-ص}ل_{٢} = ٥ × ٤$
$= {}^{٩}ل_{٣}$	= ٥ ل ٢
∴ س + ص = ٩ ---- (١)	∴ س- ص = ٥ ---- (٢)

من (١) ، (٢) بالجمع ثم بالطرح نجد أن س = ٧ ، ص = ٢

<u>مثال</u> : إذا كان ${}^{ن-١}ل_{٣} : {}^{ن+١}ل_{٣} = ٢ : ٧$ أوجد ن

الحـــــــل

$$\frac{(ن-١)\,(ن-٢)\,(ن-٣)}{(ن+١)\,(ن)\,(ن-١)} = \frac{٢}{٧}$$

∴ $\frac{ن^{٢} - ٥ن + ٦}{ن^{٢} + ن} = \frac{٢}{٧}$ ∴ $٧ن^{٢} - ٣٥ن + ٤٢ = ٢ن^{٢} + ٢ن$

$٥ن^{٢} - ٣٧ن + ٤٢ = ٠$ ∴ $(٥ن - ٧)(ن - ٦) = ٠$

∴ $ن = \frac{٧}{٥}$ مرفوض ، ن = ٦

مثال : حل المعادلة :-

ن ل ر = ١٢ ن-١ ل ر-١

الحـــــل

|ن / |ن-ر = ١٢ × |ن-١ / |ن-ر

∴ ن |ن-١ = ١٢ |ن-١   ∴ ن = ١٢

مثال : حل المعادلة :-

|ن+٣ / |٤ = ٣ |٧ / ن + ٤

الحـــــل

∴ |ن+٣ × (ن+٤) = |٤ × ٣ |٧   ضربنا الطرفين × الوسطين

∴ |ن+٤ = |٤ × ٣ |٧ = ٤ × ٣ × ٢ × ١ × ٣ |٧

|ن+٤ = ٩ × ٨ |٧ = |٩

∴ ن + ٤ = ٩   ∴ ن = ٥

مثال : إذا كان ٣ / |ن - ٢ + ٥ / |ن - ١ = ٢٠٨ / |ن   فأوجد قيمة ن

الحـــــل

بضرب طرفي المعادلة في |ن

∴ ٣ |ن / |ن - ٢ + ٥ |ن / |ن - ١ = ٢٠٨ |ن / |ن

٣ ن × ن – ١ |ن - ٢ / |ن - ٢ + ٥ ن |ن - ١ / |ن - ١ = ٢٠٨

∴ ٣ ن (ن- ١) + ٥ ن = ٢٠٨   ∴ ٣ ن^{٢} + ٢ ن – ٢٠٨ = ٠

∴ (ن – ٨) (٣ ن + ٢٦) = ٠   ∴ ن = ٨ والقوس الآخر مرفوض

مثال : إذا كان |٢ن - ١ = ٥٠٤٠ فأوجد قيمة ن

الحـــــل

∵ |٢ن - ١ = ٥٠٤٠

نحلل ٥٠٤٠

∴ ٥٠٤٠ = ٧ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١

∴ ٥٠٤٠ = |٧ ∴ |٢ن - ١ = |٧

∴ ٢ن - ١ = ٧ ∴ ٢ن = ٨ ∴ ن = ٤

تمرين (١)

(١) إذا كان |ن = ٢٤ فأوجد ^{٢ن}ل$_{٣}$

(٢) إذا كان ^{٨}ل$_{ر}$ = ٦٧٢٠ فأوجد |ر + ١

(٣) إذا كان ^{ن}ل$_{٤}$ = ١٤ × $^{ن-٢}$ل$_{٢}$ فأوجد ن .

(٤) أوجد قيمة : ^{ن}ل$_{٠}$ + ^{ن}ل$_{١}$ + ^{ن}ل$_{٢}$ إذا علم أن |ن + ١ : |ن - ١ = ٧٢

(٥) إذا كان ^{ن}ل$_{ر}$ = ٦٠٤٨٠ ، |ر = ٧٢٠ فأوجد قيمة $^{ن+١}$ل$_{ر-١}$

(٦) أثبت أن : ^{ن}ل$_{ر}$ = $^{ن-١}$ل$_{ر}$ + ر $^{ن-١}$ل$_{ر-١}$

(٧) إذا كان $^{٢ن+١}$ل$_{٤}$: $^{٢ن-١}$ل$_{٣}$ = ٧٢ : ٥ فأوجد |ن

(٨) إذا كان ^{٩}ل$_{ر}$ = ٦٠٤٨٠ فأوجد |ر

(٩) أثبت أن : |١٠ = (١ × ٣ × ٥ × ٧ × ٩) × ٢^{٥} |٥

(١٠) أثبت أن : |٢ن = (١ × ٣ × ٥ × .... × (٢ن - ١)) × ٢^{ن} |ن

(١١) إذا كان $^{س+ص}$ل$_{٤}$ = ٣٦٠ ، |٢س+ص = ٥٠٤٠ أوجد ^{ص}ل$_{س}$

(١٢) إذا كان ^{٦}ل$_{ر}$ = ٤ ^{٦}ل$_{ر-١}$ فأوجد قيمة (|ر + ١)/(|ر + ٢) + (|ر)/(|ر + ١) + (|ر - ٢)/(|ر - ١)

(١٣) إذا كانت س = { س : س ∈ ط ، ١ ≤ س ≤ ٧ }

وكانت ص = { (أ ، ب) : أ ، ب ∈ س ، أ ≠ ب } كم عدد عناصر ص ؟

(١٤) إذا كانت س = { س: س ∈ ص ، -٣ ≤ س ≤ ٤ }

، ع = { (أ، ب، جـ) : أ ، ب ، جـ ، ∈ س ، أ ≠ ب ≠ جـ } كم عدد عناصر ع ؟

(١٥) إذا كانت $^{ن+١}$ل$_{٣}$: (|ن)/(|ن - ٢) = ٧ فما قيمة ن ؟

التوافيــــق

كنا نهتم بترتيب الرقم المكون للعدد ولكن في التوافيق لا نعطي اهتماماً للترتيب فمثلاً العددان ٣١ ، ١٣ يعتبران توافقياً واحداً وكذلك الأعداد ٢٣١، ٢١٣ ، ٣١٢ ، ١٢٣ ، ٣٢١ تعتبر توافقياً واحداً ونقول إن اختيار من الاختيارات السابقة تسمي توافقياً أو توافيق .

أي أنه إذا كان الترتيب له قيمة يجبب عندئذ إيجاد عدد التباديل أمام إذا كان الترتيب ليس له قيمة فيكون المطلوب إيجاد عدد التوافيق .

تعريف :

التوافيق هي عدد طرق إختيار (ر) من الأشياء من بين (ن) من الأشياء بدون إحلال (تكرار) وبدون مراعاة ترتيب العناصر التي تختارها .

ونرمز لهذا العدد بالرمز $^{ن}ق_{ر}$ حيث ر ، ن ∈ ص$^{+}$ ، ر ≤ ن .

العلاقة بين التوافيق والتباديل :

- إذا كان لدينا مجموعة س ، ن من العناصر فإن عدد المجموعات الجزئية للمجموعة س والتي تشتمل كل منها علي ر من العناصر هو $^{ن}ق_{ر}$
- أما عدد التباديل المختلفة لعناصر المجموعة س مأخوذة راء راء هو ن ل ر ولو أجرينا علي كل مجموعة جزئية من المجموعات السابقة جميع التباديل الممكنة لكان عدد تباديل كل مجموعة هو $\underline{|ر}$

$$\therefore\ ^{ن}ق_{ر} \times \underline{|ر} = {}^{ن}ل_{ر}$$

$$\therefore\ ^{ن}ق_{ر} = \frac{^{ن}ل_{ر}}{\underline{|ر}} \quad \text{------} \ (١)$$

نتيجة :-

$$^{ن}ق_{ر} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ر}\ \underline{|ن - ر}}$$

- البرهان -

$$\because\ ^{ن}ق_{ر} = \frac{^{ن}ل_{ر}}{\underline{|ر}} \quad ، \quad ^{ن}ل_{ر} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن - ر}}$$

$$\therefore\ ^{ن}ق_{ر} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ر}\ \underline{|ن - ر}}$$

<u>نتيجة</u> : (قانون التبسيط)

$${}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن-ر}$$

- البرهان -

$${}^{ن}ق_{ر} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-ر}\ \underline{|ن-(ن-ر)}} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-ر}\ \underline{|ر}} = {}^{ن}ق_{ر}$$

<u>ملاحظة</u>: $${}^{ن}ق_{ن} = {}^{ن}ق_{٠} = ١$$

- البرهان -

${}^{ن}ق_{ن} = {}^{ن}ق_{ن-ن} = {}^{ن}ق_{٠}$ أي أن ${}^{ن}ق_{ن} = {}^{ن}ق_{٠}$

$\therefore {}^{ن}ق_{ن} = {}^{ن}ق_{٠} = ١$

<u>نتيجة</u>: **إذا كان** ${}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{هـ}$ $\therefore$ ر = هـ أ، ن = ر + هـ

- البرهان -

$\because {}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{هـ}$ $\therefore$ ر = هـ

، $\because {}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن-ر} = {}^{ن}ق_{ر}$ $\therefore$ ن − ر = هـ $\therefore$ ن = ر + هـ

<u>نتيجة</u>:

النسبة بين ${}^{ن}ق_{ر}$ ، ${}^{ن}ق_{ر-١}$

$$\therefore \frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن}ق_{ر-١}} = \frac{ن-ر+١}{ر}$$

- البرهان -

$$\because {}^{ن}ق_{ر} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ر}\ \underline{|ن-ر}} \quad ، \quad {}^{ن}ق_{ر-١} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ر-١}\ \underline{|ن-ر+١}}$$

$$\therefore \frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن}ق_{ر-١}} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ر}\ \underline{|ن-ر}} \times \frac{\underline{|ر-١}\ \underline{|ن-ر+١}}{\underline{|ن}}$$

$$= \frac{\underline{|ر-١}\ (ن-ر+١)\ \underline{|ن-ر}}{ر\ \underline{|ر-١}\ \underline{|ن-ر}} = \frac{ن-ر+١}{ر}$$

مثال : أوجد قيمة :

$$(^{٨}ق_{٤} + ^{٩}ق_{٢}) - ٢ (^{٦}ق_{٢} + ^{٧}ق_{٣})$$

الحـــــل

$$(^{٨}ق_{٤} + ^{٩}ق_{٢}) - ٢ (^{٦}ق_{٢} + ^{٧}ق_{٣})$$

$\because$ $^{ن}ق_{ر} = ^{ن}ل_{ر}$

$$\therefore \frac{٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥}{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} + \frac{٩ \times ٨}{٢ \times ١} - ٢ \times \left(\frac{٦ \times ٥}{٢ \times ١} + \frac{٧ \times ٦ \times ٥}{٣ \times ٢ \times ١} \right)$$

$$= (٧٠ + ٣٦) - ٢ (١٥ + ٣٥) = ١٠٦ - ١٠٠ = ٦$$

مثال: إذا كان : $^{٢٠}ق_{٥ر} = ^{٢٠}ق_{٢ر-٨}$ فما قيمة $^{١٢}ق_{ر-٣}$ ؟

الحـــــل

$\because$ $^{٢٠}ق_{٥ر} = ^{٢٠}ق_{٢ر-٨}$ $\qquad$ $\therefore$ ٥ر

$\therefore$ $٢٠ = ٥ر + ٢ر - ٨$ $\qquad$ $\therefore$ ١٢

$\therefore$ $^{١٢}ق_{ر-٣} = ^{١٢}ق_{٤-٣} = ^{١٢}ق_{١} = ١٢$

مثال : إذا كان $^{ن}ق_{ن-٣} = ١٢٠$ أوجد $^{ن+١}ق_{٤}$

الحـــــل

$\because$ $^{ن}ق_{ن-٣} = ^{ن}ق_{ن-(ن-٣)} = ^{ن}ق_{٣}$

$\therefore$ $^{ن}ق_{٣} = \frac{^{ن}ل_{٣}}{|\underline{٣}} = ١٢٠$ $\qquad$ $\therefore$ $^{ن}ل_{٣} = |\underline{٣} \times ١٢٠$

$\therefore$ $^{ن}ل_{٣} = ٣ \times ٢ \times ١ \times ١٢٠$ $\qquad$ $\therefore$ $^{ن}ل_{٣} = ٧٢٠$

$\therefore$ $^{ن}ل_{٣} = ١٠ \times ٩ \times ٨$ $\qquad$ $\therefore$ $^{١٠}ل_{٣} = ١٠ \times ٩ \times ٨$

$\therefore$ $ن = ١٠$

$$\therefore \, ^{ن+١}ق_{٤} = ^{١١}ق_{٤} = \frac{١١ \times ١٠ \times ٩ \times ٨}{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} = ٣٣٠$$

مثال : أوجد مجموعة حل المعادلة الآتية

$$^{ن+١}ق_{ن-٢} + ٧ = ٧ن$$

الحـــــل

نستخدم قانون التبسيط ∴ $^{ن+١}ق_{ن-٢} = {}^{ن+١}ق_{ن+١-(ن-٢)} = {}^{ن+١}ق_{٣}$

∴ $\frac{(ن+١)\times ن\,(ن-١)}{٣\times٢\times١} = ٧ن - ٧$

∴ $\frac{(ن+١)\times ن\,(ن-١)}{٣\times٢\times١} = ٧\,(ن - ١)$

∴ $ن^{٢} + ن - ٤٢ = ٠$ ∴ $(ن-٦)\,(ن+٧) = ٠$ ∴ $ن = ٦$

مثال :

إذا كان : $^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر-١} = ٨ : ٣$ ، $^{٧}ق_{ر} = {}^{٧}ق_{٢ر-٥}$ فأوجد قيمة ن ، ر

الحـــــل

∵ $^{٧}ق_{ر} = {}^{٧}ق_{٢ر-٥}$ ∴ $٧ = ر + ٣ر - ٥$

∴ $٤ر = ١٢$ ∴ $ر = ٣$

، ∵ $^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر-١} = ٨ : ٣$ (نستخدم قانون النسبة)

∴ $\frac{^{ن}ق_{ر}}{^{ن}ق_{ر-١}} = \frac{^{ن}ق_{ر}}{^{ن}ق_{ر-١}} = \frac{ن - ٣ + ١}{٣} = \frac{٨}{٣}$

∴ $\frac{ن - ٢}{٣} = \frac{٨}{٣}$ ∴ $ن - ٢ = ٨$ ∴ $ن = ١٠$

مثال : إذا كان $^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر+١} : {}^{ن}ق_{ر+٢} = ١٥ : ٤٢ : ٩١$ فأوجد قيمتي ن ، ر

الحـــــل

∵ $\frac{^{ن}ق_{ر+١}}{^{ن}ق_{ر}} = \frac{١٢}{٥}$ ∴ $\frac{ن-(ر+١)+١}{ر+١} = \frac{١٤}{٥}$

∴ $\frac{ن - ر}{ر+١} = \frac{١٤}{٥}$ ∴ $٥ن - ٥ر = ١٤ر + ١٤$

∴ $٥ن - ١٩ر = ١٤$ ——— (١)

، ∵ $\frac{{}^{ن}ق_{ر+٢}}{{}^{ن}ق_{ر+١}} = \frac{٩١}{٤٢}$ ∴ $\frac{ن-(ر+٢)+١}{ر+٢} = \frac{١٣}{٦}$

∴ $\frac{ن-ر-١}{ر+٢} = \frac{١٣}{٦}$ ∴ $٦ن - ٦ر - ٦ = ١٣ر + ٢٦$

∴ $٦ن - ١٩ر = ٣٢$ ---- (٢) بضرب طرفي (١) في -١ وإضافتها إلي (٢)

∴ ن = ١٨ ، ر = ٤

<u>مثال</u> : حل المعادلة :

$^{س+١}ل_٣ = ١٠ \times {}^{س+١}ق_٥$ ، حيث س ∈ ط

الحـــــل

∴ $(س+١)س(س-١) = \frac{١٠(س+١)س(س-١)(س-٢)(س-٣)}{٥\times٤\times٣\times٢\times١}$

باختصار الطرفين ∴ $١ = (س-٢)(س-٣) \times \frac{١}{١٢}$

∴ $(س-٢)(س-٣) = ١٢$ ∴ $س^٢ - ٥س - ٦ = ٠$

∴ س = ٦ أ، س = -١ (مرفوض)

<u>مثال</u> : إذا كان $^{م+ن}ل_٣ = ٧٢٠$ ، $^{ن}ق_١ = ٣$ أوجد قيمة $^{م}ق_{م-ن}$

الحـــــل

∵ $^{ن}ق_١ = ٣$ ∴ ن = ٣

∴ $^{م+٣}ل_٣ = ٧٢٠ = ١٠ \times ٩ \times ٨ = {}^{١٠}ل_٣$

∴ م + ٣ = ١٠ ∴ م = ٧

∴ $^{م}ق_{م-ن} = {}^{٧}ق_٤ = {}^{٧}ق_٣ = \frac{٧\times٦\times٥}{٣\times٢\times١} = ٣٥$

تمرين (٢)

(١) احسب نتيجة كل مما يأتي :

[أ] ${}^{١٣}ق_{٦}$ [ب] ${}^{٢٠}ق_{٤}$ [ج] ${}^{٢٠}ق_{١٧}$ [د] ${}^{١٠٠}ق_{٩٨}$

(٢) إذا كان ${}^{ن}ق_{٢} = ٤٣٥$ أوجد قيمة ن

(٣) إذا كان ${}^{ن}ق_{٣} = \frac{١}{٦}$ ٣٠ ن أوجد قيمة ${}^{ن}ق_{١٠}$

(٤) إذا كان ${}^{م+ن}ق_{٣} = ٥٦$ ، ${}^{م}ق_{٢} = ٣$ أوجد قيمة $\lfloor\underline{ن + م}$

(٥) إذا كان ${}^{ن}ق_{٣} = ١٢٠$ أوجد قيمة ${}^{٢ن}ق_{ن+٥}$

(٦) إذا كان ${}^{ن}ق_{ر^{٢} + ٢ر} = {}^{ن}ق_{٢ر+٥}$ وكان ${}^{ن}ق_{٣} = ١٢٠$ أوجد ${}^{ن}ق_{٧ر+٣}$

(٧) أثبت أن : ${}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر+١} = {}^{ن+١}ق_{ر+١}$ ومن ثم

[أ] $\frac{{}^{١٧}ق_{٦} + {}^{١٧}ق_{٥}}{{}^{١٨}ق_{٥}}$

[ب] أثبت أن : ${}^{ن}ق_{ر+١} + ٢\,{}^{ن}ق_{ر-١} = {}^{ن+٢}ق_{ر+١}$

(٨) إذا كان ${}^{ن}ق_{٤}$ ، ${}^{ن}ق_{٥}$ ، ${}^{ن}ق_{٦}$ في تتابع حسابي أوجد قيمة ن

(٩) أثبت أن ${}^{ن}ق_{ر} : {}^{ن-١}ق_{ر-١} = \frac{ن}{ر}$ ومن ثم أوجد $\frac{{}^{٢٥}ق_{٤} + {}^{٢٤}ق_{٣}}{{}^{٢٤}ق_{٣} + {}^{٢٣}ق_{٢}}$

(١٠) إذا علم أن ${}^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر+٢} : {}^{ن}ق_{ر+٤} = ٣ : ١٤ : ١٤$ فأوجد قيمة كل من ن ، ر

نظرية ذات الحدين

إذا كان أ ، ب عددين حقيقيين ، ن عدد صحيح موجب فإن

$$(أ+ب)^{ن} = أ^{ن} + {}^{ن}ق_{١}\, ب^{١}\, أ^{ن-١} + {}^{ن}ق_{٢}\, ب^{٢}\, أ^{ن-٢} + ... + {}^{ن}ق_{ر}\, ب^{ر}\, أ^{ن-ر} + ... + ب^{ن} \quad —(١)$$

ملحوظة هامة :

إذا وضعنا في القانون السابق (- ب) بدلاً من ب في كلا الطرفين فإن

$$(أ-ب)^{ن} = أ^{ن} - {}^{ن}ق_{١}\, ب\, أ^{ن-١} + {}^{ن}ق_{٢}\, ب^{٢}\, أ^{ن-٢} - .... + {}^{ن}ق_{ر}\, (-ب)^{ر}\, أ^{ن-ر} + ... + (-ب)^{ن} \quad —(٢)$$

ملاحظات على مفكوك ذات الحدين :

(١) عدد حدود المفكوك يساوي (ن+١) أي يزيد على الأس بمقدار ١

(٢) الدليل الذي تحت ق يقل عن رتبة الحد بقدر ١ وهو نفسه أس ب

(٣) تتناقص قوة أ تدريجيا وتزيد قوة ب تدريجيا بحيث يكون مجموع القوتين ن في كل حد .

(٤) في مفكوك $(أ - ب)^{ن}$ تكون الحدود الفردية الرتبة موجبة والحدود الزوجية الرتبة سالبة.

نتيجة : بجمع (١) ، (٢) ينتج أن :

أولاً : $(أ+ب)^{ن} + (أ-ب)^{ن} = ٢\, أ^{ن} + ٢\, {}^{ن}ق_{٢}\, ب^{٢}\, أ^{ن-٢} + ٢\, {}^{ن}ق_{٤}\, ب^{٤}\, أ^{ن-٤} + ...$

$= ٢\, [ح_{١} + ح_{٣} + ح_{٥} + ...]$

= ضعف مجموع الحدود الفردية الرتبة

ثانيا : $(أ+ب)^{ن} - (أ-ب)^{ن} = ٢\, {}^{ن}ق_{١}\, ب^{١}\, أ^{ن-١} + ٢\, {}^{ن}ق_{٣}\, ب^{٣}\, أ^{ن-٣} + ٢\, {}^{ن}ق_{٥}\, ب^{٥}\, أ^{ن-٥} + ...$

$= ٢\, [ح_{٢} + ح_{٤} + ح_{٦} + ...]$

= ضعف مجموع الحدود الزوجية الرتبة

أبسط صورة لنظرية ذات الحدين

إذا كانت س ∈ ح ، ن عدد صحيح موجب فإن

$$(١+س)^{ن} = ١ + {}^{ن}ق_{١}\, س + {}^{ن}ق_{٢}\, س^{٢} + ... + {}^{ن}ق_{ر}\, س^{ر} + ... + س^{ن}$$

، $$(١-س)^{ن} = ١ - {}^{ن}ق_{١}\, س + {}^{ن}ق_{٢}\, س^{٢} + ... + {}^{ن}ق_{ر}\, (-س)^{ر} + ... + (-س)^{ن}$$

مثال: باستخدام نظرية ذات الحدين أوجد مفكوك كل مما يأتي:-

[١] $(٢أ + ٣ب)^{٥}$ ‏ ‏ ‏ ‏ [٣] $(س - \sqrt{٢})^{٦}$

[٢] $(س^{٢} + \frac{١}{٢ص})^{٤}$ ‏ ‏ ‏ ‏ [٤] $(١ + \sqrt{س})^{٥}$

[٥] $(\frac{\sqrt{س}}{٢} + \frac{٢}{\sqrt{س}})^{٥} + (\frac{\sqrt{س}}{٢} - \frac{٢}{\sqrt{س}})^{٥}$

الحـــــل

[١] $(٢أ + ٣ب)^{٥} = (٢أ)^{٥} + {}^{٥}ق_{١}\,(٣ب)\,(٢أ)^{٤} + {}^{٥}ق_{٢}(٣ب)^{٢}(٢أ)^{٣} + {}^{٥}ق_{٣}(٣ب)^{٣}(٢أ)^{٢}$

$+ {}^{٥}ق_{٤}(٣ب)^{٤}(٢أ) + (٣ب)^{٥}$

$= ٣٢أ^{٥} + ٢٤٠أ^{٤}ب + ٧٢٠أ^{٣}ب^{٢} + ١٠٨٠أ^{٢}ب^{٣} + ٨١٠أب^{٤} + ٢٤٣ب^{٥}$

[٢] $(س^{٢} + \frac{١}{٢ص})^{٤} = (س^{٢})^{٤} + {}^{٤}ق_{١}(\frac{١}{٢ص})(س^{٢})^{٣} + {}^{٤}ق_{٢}(\frac{١}{٢ص})^{٢} \times (س^{٢})^{٢}$

$+ {}^{٤}ق_{٣}(\frac{١}{٢ص})^{٣}(س^{٢}) + (\frac{١}{٢ص})^{٤}$

$= س^{٨} + ٢\frac{س^{٦}}{ص} + \frac{٣}{٢}\frac{س^{٤}}{ص^{٢}} + \frac{س^{٢}}{٢ص^{٣}} + \frac{١}{١٦ص^{٤}}$

[٣] $(س - \sqrt{٢})^{٦} = س^{٦} - {}^{٦}ق_{١}(\sqrt{٢})س^{٥} + {}^{٦}ق_{٢}(\sqrt{٢})س^{٤} - {}^{٦}ق_{٣}(\sqrt{٢})س^{٣}$

$+ {}^{٦}ق_{٤}(\sqrt{٢})س^{٢} + {}^{٦}ق_{٥}(\sqrt{٢})س + (\sqrt{٢})^{٦}$

$= س^{٦} - ٦\sqrt{٢}س^{٥} + ٣٠س^{٤} - ٤٠\sqrt{٢}س^{٣} + ٦٠س^{٢} - ١٢\sqrt{٢}س + ٨$

[٤] $(١ + \sqrt{س})^{٥} = ١ + {}^{٥}ق_{١}(\sqrt{س}) + {}^{٥}ق_{٢}(\sqrt{س}) + {}^{٥}ق_{٣}(\sqrt{س}) + {}^{٥}ق_{٤}(\sqrt{س})$

$+ (\sqrt{س})^{٥}$

$= ١ + ٥\sqrt{س} + ١٠س + ١٠س\sqrt{س} + ٥س^{٢} + س^{٢}\sqrt{س}$

[٥] $(\frac{\sqrt{س}}{٢} + \frac{٢}{\sqrt{س}})^{٥} + (\frac{\sqrt{س}}{٢} - \frac{٢}{\sqrt{س}})^{٥} = ٢(ح_{١} + ح_{٣} + ح_{٥})$

$= ٢[(\frac{\sqrt{س}}{٢})^{٥} + {}^{٥}ق_{٢}(\frac{٢}{\sqrt{س}})^{٣} + {}^{٥}ق_{٤}(\frac{\sqrt{س}}{٢})^{٤}(\frac{٢}{\sqrt{س}})]$

$= ٢[\frac{س^{٢}\sqrt{س}}{٢} + ١٠\frac{\sqrt{س}}{٢} + ٥ \times \frac{٨}{س\sqrt{س}}]$

مثال : باستخدام نظرية ذات الحدين أوجد قيمة كل مما يلي مقرباً الجواب إلي ٣ أرقام عشرية :

[أ] $(٠,٩٦)^{٥}$ [ب] $(١,٠٠٣)^{٦} - (٠,٩٩٧)^{٦}$

الحـــــل

[أ] $(٠,٩٦)^{٥} = (١ - ٠,٠٤)^{٥} = ١ - {}^{٥}ق_{١}(٠,٠٤) + {}^{٥}ق_{٢}(٠,٠٤)^{٢} - {}^{٥}ق_{٣}(٠,٠٤)^{٣}$

$= ١ - ٠,٢٠ + ٠,٠١٦٠ - ٠,٠٠٠٦٤٠$

$= ٠,٨١٥٣٦٠ = ٠,٨١٥$ تقريباً

[ب] $(١,٠٠٣)^{٦} - (٠,٩٩٧)^{٦} = ٢\,(ح_{٢} + ح_{٤} + ح_{٦})$

$= ٢\,[\,{}^{٦}ق_{١}(٠,٠٠٣) + {}^{٦}ق_{٣}(٠,٠٠٣)^{٣} + {}^{٦}ق_{٥}(٠,٠٠٣)^{٥}\,]$

$= ٢\,[\,٦ \times ٠,٠٠٣\,] = ٠,٠٣٦$

مثال : فك $(س+٤ص)^{٦}$ بنظرية ذات الحدين ثم استخدم المفكوك في إيجاد قيمة $(١,٠٠٤)^{٧}$ إلي أرقام عشرية .

الحـــــل

$(س+٤ص)^{٧} = س^{٧} + ٢٨\,ص\,س^{٦} + ٣٣٦\,ص^{٢}س^{٥} + ٢٢٤٠\,ص^{٣}س^{٤} + ٨٩٦٠\,ص^{٤}س^{٣} +$

$٢١٥٠٤\,ص^{٥}س^{٢} + ٢٨٦٧٢\,ص^{٦}س + ١٦٣٨٤\,ص^{٧}$

وبوضع س = ١ ، ص = ٠,٠٠١

$\therefore (١ + ٠,٠٠٤)^{٧} = ١ + ٢٨ \times ٠,٠٠١ + ٣٣٦(٠,٠٠١)^{٢} + ٢٢٤٠(٠,٠٠١)^{٣} + ٠$

$= ١,٠٢٨٣٣٨$ تقريباً

مثال : أوجد مفكوك $(س+٢)^{٦}$ باستخدام ذي الحدين ثم استخدم المفكوك لإيجاد قيمة $\left(\frac{٢٠١}{١٠٠}\right)^{٦}$ مقرباً لثلاثة أرقام عشرية .

الحـــــل

$(س+٢)^{٦} = س^{٦} + ٦ \times ٢\,س^{٥} + \frac{٦\times٥}{٢\times١}(٢)^{٢}س^{٤} + \frac{٦\times٥\times٤}{٣\times٢\times١}(٢)^{٣}س^{٣} + \frac{٦\times٥}{٢\times١}(٢)^{٤}س^{٢}$

$+ ٦ \times (٢)^{٥}س + ٢^{٦}$

$= س^{٦} + ١٢\,س^{٥} + ٦٠\,س^{٤} + ١٦٠\,س^{٣} + ٢٤٠\,س^{٢} + ١٩٢\,س + ٦٤$ ----(١)

$\left(\frac{٢٠١}{١٠٠}\right)^{٦} = (٠,٠١ + ٢)^{٦}$ بالتعويض في (١) عن س = ٠,٠١

$\therefore \left(\frac{٢٠١}{١٠٠}\right)^{٦} = ٦٤ + ١٩٢(٠,٠١) + ٢٤٠(٠,٠١)^{٢} + ...$

$= ٦٤ + ١,٩٢ + ٠,٠٢٤٠ = ٦٥,٩٤٤٠$

الحد العام في مفكوك $(\text{أ} + \text{ب})^{\text{ن}}$

نعلم أن :

$(\text{أ} + \text{ب})^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{ن}} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{١}\,\text{ب}^{١}\,\text{أ}^{\text{ن}-١} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}\,\text{ب}^{٢}\,\text{أ}^{\text{ن}-٢} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٣}\,\text{ب}^{٣}\,\text{أ}^{\text{ن}-٣} + \dots + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}\,\text{ب}^{\text{ر}}\,\text{أ}^{\text{ن}-\text{ر}} + \dots + \text{ب}^{\text{ن}}$

نلاحظ أن:-

$\text{ح}_{٢} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{١}\,\text{ب}^{١}\,\text{أ}^{\text{ن}-١}$ ، $\text{ح}_{٣} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}\,\text{ب}^{٢}\,\text{أ}^{\text{ن}-٢}$ ، $\text{ح}_{٤} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٣}\,\text{ب}^{٣}\,\text{أ}^{\text{ن}-٣}$ وقياسا علي ذلك يكون:

$$\text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}\,\text{ب}^{\text{ر}}\,\text{أ}^{\text{ن}-\text{ر}}$$

أي $\text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}\,(\text{الثاني})^{\text{ر}}\,(\text{الأول})^{\text{ن}-\text{ر}}$ ويجب أخذ كل حد بإشارته

الحد الأوسط أو الحدين الأوسطيين في مفكوك ذات الحدين

نعلم أن عدد الحدود في مفكوك $(\text{أ} + \text{ب})^{\text{ن}} = \text{ن} + ١$ لذا يكون لدينا حالتان :

أولاً : إذا كانت ن عدداً زوجيا :

فإن عدد حدود المفكوك يكون فردياً ∴ يوجد حد أوسط واحد هو $\text{ح}_{\frac{\text{ن}}{٢}+١}$

ثانياً : إذا كانت ن عدداً فردياً :

فإن عدد حدود المفكوك يكون زوجياً ∴ يوجد حدان أوسطان هما $\frac{\text{ن}+١}{٢}$ ، $\frac{\text{ن}+١}{٢} + ١$

مثال: أوجد النسبة بين الحد الأوسط والحد الرابع في مفكوك $\left(\frac{٢\text{س}}{٣} + \frac{٣}{٢\text{س}}\right)^{١٠}$

الحـــــــل

الحد الأوسط هو $\text{ح}_{٦} = {}^{١٠}\text{ق}_{٥}\left(\frac{٣}{٢\text{س}}\right)^{٥}\left(\frac{٢\text{س}}{٣}\right)^{٥} = {}^{١٠}\text{ق}_{٥}$

$$\text{ح}_{٤} = {}^{١٠}\text{ق}_{٣}\left(\frac{٣}{٢\text{س}}\right)^{٣}\left(\frac{٢\text{س}}{٣}\right)^{٧} = \frac{١٠\times٩\times٨}{٣\times٢\times١} \times \frac{١٦\text{س}^{٤}}{٨١} = \frac{٦٤٠\text{س}^{٤}}{٢٧}$$

$$\frac{\text{ح}_{٦}}{\text{ح}_{٤}} = \frac{١٠\times٩\times٨\times٧\times٦}{٥\times٤\times٣\times٢\times١} \times \frac{٢٧}{٦٤٠\times٣^{٤}} = \frac{٢١}{١٦٠}$$

<u>مثال</u> : في مفكوك (٤س^{٢} + $\frac{١}{٢س}$)^{١٥} أوجد قيمة س التي تجعل الحدين الأوسطين في المفكوك متساويين ؟

الحـــــل

الحدان الأوسطان هما $ح_{٨}$ ، $ح_{٩}$

∴ $^{١٥}ق_{٧} \times ٢^{٩}$ س^{٩} = $^{١٥}ق_{٨} \times ٢^{٦}$ س^{٦}

∴ ٨ س^{٨} = ١ ∴ س = $\frac{١}{٢}$

<u>مثال</u> : إذا كان معامل الحد الذي ترتيبه ر+٤ في مفكوك (١+س)^{١٧} يساوي معامل الحد الذي ترتيبه ٣ر+ ٣ في نفس المفكوك فأوجد قيمة ر

الحـــــل

معامل $ح_{ر+٤}$ = $^{١٧}ق_{ر+٣}$ = $^{١٧}ق_{٣ر+٢}$

∴ $^{١٧}ق_{ر+٣}$ = $^{١٧}ق_{٣ر+٢}$

∴ ر+٣ = ٣ر+٢ ∴ ر = $\frac{١}{٢}$ مرفوض

١٧ = ر +٣ +٣ر +٢ ∴ ر= ٣

<u>مثال</u> : إذا كان ضعف معامل الحادي عشر في مفكوك (١+ س)^{ن} يساوي ثلاثة <u>أمثال</u> معامل الحد العاشر في مفكوك (١+ص)$^{ن-١}$ أوجد قيمة ن

الحـــــل

٢× $^{ن}ق_{١٠}$ = ٣ × $^{ن-١}ق_{٩}$

∴ ٢ × $\frac{\underline{|ن}}{\underline{|١٠}\ \underline{|ن-١٠}}$ = ٣ × $\frac{\underline{|ن-١}}{\underline{|٩}\ \underline{|ن-١٠}}$ ∴ $\frac{٢ن\ \underline{|ن-١}}{١٠\ \underline{|٩}}$ = $\frac{٣\ \underline{|ن-١}}{\underline{|٩}}$

∴ ن = ١٥

<u>مثال</u> : اثبت أن معامل الحد الأوسط في مفكوك (١+ س) ^{٢ن} يساوي مجموع معاملي الحدين الأوسطين في مفكوك (١+ س)$^{٢ن-١}$

الحـــــل

الحد الأوسط هو $ح_{\frac{ن}{2}+1} = ح_{ن+1}$

معامل $ح_{ن+1}$ $^{2ن}ق_ن$ = $\frac{|2ن}{|ن\ |ن}$ = $\frac{2\ |2ن-1}{|ن\ ن\ |ن-1}$

الحدان الأوسطان هما $\frac{ح_{2ن-1+1}}{2}$ = $ح_ن$ ، $ح_{ن+1}$

مجموع معاملا الحدين الأوسطين = $\frac{|2ن-1}{|ن-1\ \ |ن}$ + $\frac{|2ن-1}{|ن\ |ن-1}$ = $\frac{2\ |2ن-1}{|ن\ ن\ |ن-1}$

<u>مثال:</u> الحد الثالث في مفكوك (1 + س)^ن حسب قوي س التصاعدية حيث ن عدد صحيح موجب هو 28 س^2 ، الحد الخامس من نفس المفكوك 1120 ـ أوجد قيمة كل من ن ، س .

الحـــــل

$ح_3 = ^نق_2 س^2 = 28 س^2$ ∴ $\frac{ن(ن-1)}{2\times1} = 28$

∴ $ن^2 - ن - 56 = 0$ ∴ (ن- 8) (ن+ 7) = 0

∴ ن = 8 ∵ $ح_5 = ^8ق_4 س^4 = 1120$

∴ $س^4 = 1120 \times \frac{1\times2\times3\times4}{8\times7\times6\times5} = 16$ ∴ س = ± 2

<u>مثال:</u> إذا كان الحدان الأوسطان في مفكوك (3س+5)$^{2ن+1}$ متساويين ـ أوجد قيمة س علماً بأن ن عدد صحيح موجب .

الحـــــل

الحدان الأوسطان هما $ح_{ن+1}$ ، $ح_{ن+2}$

∴ $^{2ن+1}ق_ن (5)^ن (3س)^{ن+1} = ^{2ن+1}ق_{ن+1} (5)^{ن+1} (3س)^ن$

∴ 3س = 5 ∴ س = $\frac{5}{3}$

<u>مثال:</u> في مفكوك (1+ س)^ن حسب قوي س التصاعدية كان الحد الثاني $-\frac{10}{3}$ والحد الثالث $\frac{40}{9}$ أوجد قيمتي ن ، س ثم أوجد الحد الرابع .

الحـــــل

$ح_2 = ^نق_1 س = -\frac{10}{3}$ ∴ ن س = $-\frac{10}{3}$ ---- (1)

$ح_3 = ^نق_2 س^2 = \frac{40}{9}$ ∴ $\frac{ن(ن-1)}{2\times1} س^2 = \frac{40}{9}$ ---- (2)

بتربيع (1) والقسمة علي (2) ∴ ن =5 ، س = $-\frac{2}{3}$

∴ $ح_4 = ^5ق_3 (-\frac{2}{3})^3 = -\frac{80}{27}$

إيجاد الحد المشتمل علي $س^{هـ}$ في مفكوك ذات الحدين

١. نفرض أن الحد المشتمل علي $س^{هـ}$ هو $ح_{ر+١}$
٢. نوجد $ح_{ر+١}$ في أبسط صورة .
٣. نساوي قوة س الناتجة في $ح_{ر+١}$ بالقوة المطلوبة (هـ) فنحصل علي قيمة (ر) ويكون الحد المشتمل علي $س^{هـ}$ هو $ح_{ر+١}$
٤. نعوض بقيمة (ر) التي حصلنا عليها في $ح_{ر+١}$ فنحصل علي الحد المشتمل علي $س^{هـ}$

ملاحظة:

الحد الخالي من س هو معامل س (لأن $س^{٠} = ١$)

مثال :

أوجد معامل $\frac{١}{س^{٨}}$ في مفكوك $(س - \frac{١}{س^{٢}})^{١٢}$

الحـــــل

$ح_{ر+١} = {}^{١٢}ق_{ر} (-\frac{١}{س^{٢}})^{ر} (س)^{١٢-ر} = {}^{١٢}ق_{ر} (-\frac{١}{٢})^{ر} س^{١٢-٤ر}$

بوضع ١٢ ــ ٤ر = - ٨ $\therefore$ ر = ٥

$\therefore ح_{٦} = {}^{١٢}ق_{٥} (-\frac{١}{٢})^{٥} س^{-٨}$ $\therefore$ معامل $س^{-٨} = -\frac{٩٩}{٤}$

مثال : أوجد الحد الخالي من س في مفكوك $(س - \frac{٢}{س})^{١٠}$

الحـــــل

$ح_{ر+١} = {}^{١٠}ق_{ر} (-\frac{٢}{س})^{ر} (س)^{١٠-ر}$

$= {}^{١٠}ق_{ر} (-٢)^{ر} (س)^{١٠-٢ر}$

بوضع ١٠ ــ ٢ ر = ٠ $\therefore$ ر = ٥

الحد الخالي من س هو $ح_{٦} = {}^{١٠}ق_{٥} (س)^{٥} = -٨٠٦٤$

مثال: أوجد معامل $س^{١١}$ في مفكوك $س^{٤} (\frac{س^{٢}}{٢} + \frac{٢}{س^{٣}})^{١٥}$

الحـــــل

معامل $س^{14}$ في المفكوك هو معامل $س^{10}$ في مفكوك $\left(\frac{س^2}{2} + \frac{2}{س}\right)^{15}$

$\therefore ح_{ر+1} = {}^{15}ق_ر \left(\frac{2}{س}\right)^ر \left(\frac{س^2}{2}\right)^{15-ر}$

$= {}^{15}ق_ر \times 2^{2ر-15} س^{30-3ر}$

بوضع $30 - 3ر = 10$ $\therefore ر = 4$ … (كما في الأصل: بوضع ٣٠ ـ ٥ ر = ١٠ ∴ ر = ٤)

معامل $ح_ه = {}^{15}ق_ر \times 2^{-7} = \frac{1365}{128}$

مثال: أثبت أن معامل $س^ن$ في مفكوك $\left(س + \frac{1}{س}\right)^{3ن} = \frac{\lfloor 3ن}{\lfloor 2ن \lfloor ن}$

الحــــل

$ح_{ر+1} = {}^{3ن}ق_ر \left(\frac{1}{س}\right)^ر (س)^{3ن-ر} = {}^{3ن}ق_ر س^{3ن-2ر}$

بوضع $3ن - 2ر = ر$ $\therefore ر = ن$

معامل $ح_{ن+1} = {}^{3ن}ق_ن = \frac{\lfloor 3ن}{\lfloor 2ن \lfloor ن}$

مثال: أوجد الحد المشتمل على $س^4$ في المقدار $\left(س^2 + \frac{1}{س^2}\right)^{12} - \left(س + \frac{1}{س}\right)^{12}$

الحــــل

الحد المشتمل على $س^4$ في مفكوك $\left(س^2 + \frac{1}{س^2}\right)^{12}$

$ح_{ر+1} = {}^{12}ق_ر \left(\frac{1}{س^2}\right)^ر (س^2)^{12-ر} = {}^{12}ق_ر \times س^{24-4ر}$

$\therefore 24 - 4ر = 4$ $\therefore ر = 5$

$ح_6 = {}^{12}ق_5 س^4$ ------ (1)

الحد المشتمل على $س^4$ في مفكوك $\left(س^2 + \frac{1}{س}\right)^{12}$

$ح_{ر+1} = {}^{12}ق_ر \left(\frac{1}{س}\right)^ر (س)^{12-ر} = {}^{12}ق_ر \times س^{12-2ر}$

$\therefore 12 - 2ر = 4$ $\therefore ر = 4$

ح$_5$ = ^{12}ق$_5$ س^4 ------ (٢)   من (١) ، (٢)

∴ الحد المشتمل علي س^4 في المقدار = ^{12}ق$_5$ س^4 − ^{12}ق$_4$ س^4 = ٢٩٧ س^4

مثال:

إذا كانت ن عددا صحيحا موجبا فاثبت أن لا يوجد حد خالي من س في مفكوك (س^5 + $\frac{1}{س^2}$)^{2ن}

إلا اذا كانت ن = ٧ أو مكرر لها . أوجد الحد الخالي من س عندما ن = ٧

الحـــــل

ح$_{ر+1}$ = ^{2ن}ق$_ر$ ($\frac{1}{س^2}$)^ر (س^5)$^{2ن - ر}$

= ^{2ن}ق$_ر$ س$^{10ن - 7ر}$ بوضع ١٠ ن − ٧ ر = ٠

∴ ر = $\frac{10ن}{7}$

∴ لا يوجد حد خالي من س إلا إذا كانت ن = ٧ أو مكرراً لها .

عندما ن = ٧   ∴ ر = ١٠

∴ ح$_{11}$ = ^{14}ق$_{10}$ = ^{14}ق$_4$ = $\frac{14 \times 13 \times 12 \times 11}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$ = ١٠٠١

مثال: **في مفكوك (س^3 + $\frac{1}{س^2}$)^{5ن} أثبت أن الحد الخالي من س يساوي معامل الحد الذي يحتوي علي س^{5ن} .**

الحـــــل

ح$_{ر+1}$ = ^{5ن}ق$_ر$ ($\frac{1}{س^2}$)^ر (س^3)$^{5ن - ر}$ = ^{5ن}ق$_ر$ × س$^{15ن - 5ر}$

بوضع ١٥ ن − ٥ ر = ٠   ∴ ر = ٣ن

∴ الحد الخالي من س ^{5ن}ق$_{3ن}$ = ^{5ن}ق$_{2ن}$

بوضع ١٥ ن − ٥ ر = ٦ن

∴ ر = ٢ن   ∴ معامل س^{5ن} = ^{5ن}ق$_{2ن}$

مثال : أوجد قيمة أ التي تجعل معامل س^{5} = معامل س^{15} في مفكوك $\left(2\text{س}^{2} + \frac{\text{أ}}{\text{س}^{3}} \right)^{10}$ حيث أ موجبة .

الحـــــل

$\text{ح}_{\text{ر}+1} = {}^{10}\text{ق}_{\text{ر}} \left(\frac{\text{أ}}{\text{س}^{3}}\right)^{\text{ر}} \left(2\text{س}^{2} \right)^{10-\text{ر}}$

$= {}^{10}\text{ق}_{\text{ر}} \times \frac{\text{أ}^{\text{ر}}}{\text{س}^{3\text{ر}}} (2)^{10-\text{ر}} \text{س}^{20-2\text{ر}} = {}^{10}\text{ق}_{\text{ر}} \, \text{أ}^{\text{ر}} \, (2)^{10-\text{ر}} \, \text{س}^{20-5\text{ر}}$

بوضع $20 - 5\text{ر} = 5$ $\therefore \text{ر} = 3$

$\therefore$ معامل $\text{س}^{5} = {}^{10}\text{ق}_{3} \, \text{أ}^{3} \, 2^{7}$

بوضع $20 - 5\text{ر} = 15$ $\therefore \text{ر} = 1$

معامل $\text{س}^{15} = {}^{10}\text{ق}_{1} \, \text{أ} \, 2^{9}$

$\therefore \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} \text{أ}^{3} \, 2^{7} = 10\text{أ} \times 2^{9}$

$\therefore 3\text{أ}^{2} = 1$ $\therefore \text{أ} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

تمرين (٣)

باستخدام نظرية ذات الحدين أوجد مفكوك كل مما يأتي :-

(١) $(\text{أ} + \text{ب})^{٥}$

(٢) $(\text{س} - ٢)^{٦}$

(٣) $(٢\text{س} + ٣\text{ص})^{٤}$

(٤) $(٣\text{أ} - ٢\text{ب})^{٥}$

(٥) $(\text{س} - \sqrt{٢})^{٦}$

(٦) $(١ - ٣\text{س})^{٤}$

(٧) $\left(\frac{\text{س}}{٢} - \frac{٣}{\text{س}}\right)^{٥}$

(٨) $(\text{س}^{٢} - ١)^{٧}$

(٩) أوجد $ح_{٥}$ في مفكوك $\left(\text{س} + \frac{١}{\text{س}}\right)^{٩}$

(١٠) أوجد $ح_{٦}$ في مفكوك $\left(\frac{٢\text{س}}{٣} - \frac{٣}{٢\text{س}}\right)^{١٠}$

(١١) أوجد $ح_{٤}$ في مفكوك $\left(\frac{٢}{\sqrt{\text{س}}} - \frac{\sqrt{\text{س}}}{٢}\right)^{١١}$

(١٢) أوجد معامل $ح_{٦}$ في مفكوك $(٣\text{س} - ٢)^{٨}$

(١٣) أوجد معامل $ح_{٧}$ في مفكوك $\left(٢\text{س}^{٢} - \frac{٣}{٢\text{س}}\right)^{٩}$

(١٤) أوجد معامل $ح_{٥}$ في مفكوك $\left(\frac{\text{س}^{٢}}{٢} - \frac{٣}{\text{س}}\right)^{٧}$

(١٥) أوجد معامل الحد الراني في مفكوك $\left(\text{س} + \frac{١}{\text{س}}\right)^{٢ن}$

(١٦) أوجد معامل الحد النوني في مفكوك $(\text{س}^{٢} + \text{س}^{-٢})^{٢ن-١}$

(١٧) أوجد مفكوك $(\text{س}+٢)^{٥} - (\text{س} - ٢)^{٥}$

(١٨) أوجد مفكوك $(١ + \sqrt{\text{س}})^{٦} - (١ - \sqrt{\text{س}})^{٦}$

(١٩) أوجد قيمة $(٠,٩٩٨)^{١٠}$ مقربة لخمسة أرقام عشرية .

(٢٠) أوجد قيمة $(١,٠٢)^{٥} - (٠,٩٨)^{٥}$ مقربة لخمسة أرقام عشرية .

تمرين (٤)

(١) أوجد قيمة الحد الأوسط في مفكوك $(س + س^{-١})^{١٠}$

(٢) أوجد قيمة الحد الأوسط في مفكوك $(٢س^{٣} + \frac{٣}{٢س})^{١٢}$

(٣) أوجد الحدين الأوسطين في مفكوك $(\frac{س}{٢} - \frac{٣}{ص})^{٩}$

(٤) أوجد معامل $س^{٨}$ في مفكوك $(\frac{٢س}{٣} - \frac{٣}{س})^{١٢}$

(٥) أوجد معامل $س^{١١}$ في مفكوك $(\frac{س^{٢}}{٢} - \frac{١}{س})^{١٠}$

(٦) أوجد معامل $س^{٩}$ في مفكوك $(س^{٣} - \frac{١}{س^{٤}})^{١٠}$

(٧) أوجد معامل $س^{-٤}$ في مفكوك $(س - \frac{١}{س^{٢}})^{٨}$

(٨) أوجد الحد الخالي من س في مفكوك $(\frac{س^{٣}}{٣} + \frac{٢}{س^{٢}})^{١٠}$

(٩) أوجد الحد الخالي من س في مفكوك $(س - \frac{١}{٢س^{٢}})^{٩}$

(١٠) اثبت أنه لا يوجد حد خال من س في مفكوك $(٢س^{٣} - \frac{٣}{س})^{٩}$

(١١) أوجد معامل س في مفكوك $(س + \frac{١}{س^{٢}})^{١٣}$

(١٢) اثبت أنه لا يوجد حد يحتوي علي $س^{٦}$ في مفكوك $(\frac{س}{٢} - \frac{٣}{س})^{١١}$

(١٣) في مفكوك $(س + \frac{٣}{٢س^{٢}})^{١٢}$ أوجد :

أولا : معامل $س^{٦}$ ثانيا : رتبة الحد الخالي من س

(١٤) إذا كان أ ، ب هما الحدان الأوسطان في مفكوك $(س - \frac{١}{س})^{٢٥}$ حسب قوي س التنازلية . فاثبت أن أ + ب $س^{٢}$ = صفر

(١٥) إذا كانت ن عددا صحيحا موجبا فاثبت أنه لا يوجد حد خال من س في مفكوك $(س^{٥} + \frac{١}{س^{٢}})^{ن}$ إلا إذا كانت ن = ٧ و مكررا للعدد ٧ وأوجد الحد الخالي من س عندما ن = ١٤

(١٦) اثبت أن مفكوك $(س^{٢} + \frac{١}{س})^{ن}$ يحتوي علي حد خالي من س إذا كانت ن مضاعفا للعدد ٣ . ثم أوجد الحد الخالي من س عندما ن = ١٢

النسبة بين كل حد والسابق له في مفكوك ذات الحدين

$\because \text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}\ \text{أ}^{\text{ر}}\ \text{س}^{\text{ن}-\text{ر}}$ ------ (١)

$\text{ح}_{\text{ر}} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-١}\ \text{أ}^{\text{ر}-١}\ \text{س}^{\text{ن}-\text{ر}+١}$ ------ (٢) بقسمة (١) على (٢)

$$\therefore \frac{\text{ح}_{\text{ر}+١}}{\text{ح}_{\text{ر}}} = \frac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-١}} \times \frac{\text{أ}^{\text{ر}}\ \text{س}^{\text{ن}-\text{ر}}}{\text{أ}^{\text{ر}-١}\ \text{س}^{\text{ن}-\text{ر}+١}}$$

$$= \frac{\text{ن}-\text{ر}+١}{\text{ر}} \times \frac{\text{أ}^{\text{ر}-\text{ر}+١}}{\text{س}^{\text{ن}-\text{ر}+١-(\text{ن}-\text{ر})}}$$

$$\therefore \frac{\text{ح}_{\text{ر}+١}}{\text{ح}_{\text{ر}}} = \frac{٢٠-\text{ر}+١}{\text{ر}} \times \frac{\text{أ}}{\text{س}}$$

أي: $\dfrac{\text{ح}_{\text{ر}+١}}{\text{ح}_{\text{ر}}} = \dfrac{\text{ن}-\text{ر}+١}{\text{ر}} \times \dfrac{\text{الأول}}{\text{الثانى}}$

مثلاً: $\dfrac{\text{ح}_٥}{\text{ح}_٤} = \dfrac{\text{ن}-٤+١}{٤} \times \dfrac{\text{أ}}{\text{س}} = \dfrac{\text{ن}-٣}{٤} \times \dfrac{\text{أ}}{\text{س}}$

نتيجه:

$$\frac{\text{معامل ح}_{\text{ر}+١}}{\text{معامل ح}_{\text{ر}}} = \frac{\text{ن}-\text{ر}+١}{\text{ر}} \times \frac{\text{معامل الحد الثاني}}{\text{معامل الحد الأول}}$$

مثال: في مفكوك $(٢+\text{س})^{١٣}$ حسب قوي س التصاعدية وجد أن النسبة بين الحد الحادي عشر والحد العاشر هي ٣ : ١٠ أوجد قيمة س .

الحـــــل

$$\frac{\text{ح}_{١١}}{\text{ح}_{١٠}} = \frac{١٣-١٠+١}{١٠} \times \frac{\text{س}}{٢} = \frac{٣}{١٠}$$

$$\therefore \frac{\text{ح}_{١١}}{\text{ح}_{١٠}} = \frac{٤}{١٠} \times \frac{\text{س}}{٢} = \frac{٣}{١٠}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{٣}{٢}$$

مثال: في مفكوك $(٥ + ٤ س)^{١٦}$ بنظرية ذات الحدين حسب قوي س التصاعدية كانت نسبة أحد الحدود إلي الحد السابق له مباشرة كنسبة ١ : ٣ – أوجد رتبة هذين الحدين في المفكوك علماً بأن س = ١

الحـــــــل

$$\frac{ح_{ر+١}}{ح_ر} = \frac{١٦ - ر + ١}{ر} \times \frac{٤}{٥} = \frac{١}{٣}$$

∴ ١٢ (١٧ - ر) = ٥ ر ∴ ٢٠٤ - ١٢ ر = ٥ ر

٢٠٤ = ١٧ ر ∴ ر = ١٢

∴ الحدان هما $ح_{١٢}$ ، $ح_{١٣}$

مثال: إذا كانت النسب بين $ح_٣$ ، $ح_٤$ في مفكوك $(س + ص)^٨$ تساوي ١ : ٤ وكان الحد الأوسط = ١١٢٠ فأوجد كلا من س ، ص

الحـــــــل

$$\frac{ح_٤}{ح_٣} = \frac{٨ - ٣ + ١}{٣} \times \frac{ص}{س} = \frac{٤}{١}$$ ∴ ص = ٢س ---- (١)

$ح_٥ = {}^{٨}ق_٤ \, ص^٤ \, س^٤ = ١١٢٠$ ومن (١)

$$∴ \frac{٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥}{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} \times ٢^٤ \, س^٤ . س^٤ = ١١٢٠$$

∴ $س^٨ = ١$ ∴ س = ± ١ ∴ ص = ± ٢

مثال : في مفكوك $(١ + ٢س)^ن$ بنظرية ذات الحدين حسب قوي س التصاعدية وجد في ثلاثة حدود متتالية أن نسبة معاملات أولها إلي ثانيها إلي ثالثها ١ : ٥ : ٢٠ أوجد قيمة ن وكذلك أوجد رتب هذه الحدود الثلاثة .

الحـــــــل

نفرض أن الحدود هي $ح_ر$ ، $ح_{ر+١}$ ، $ح_{ر+٢}$

$$∴ \frac{ح_{ر+١}}{ح_ر} = \frac{ن - ر + ١}{ر} \times \frac{٢}{١} = \frac{٥}{١}$$ ∴ ٢ن – ٧ر + ٢ = ٠ --- (١)

$$∴ \frac{ح_{ر+١}}{ح_ر} = \frac{ن - (ر+١) + ١}{ر + ١} \times \frac{٢}{١} = \frac{٢٠}{٥}$$ ∴ ن – ٣ر - ٢ = ٠ --- (٢)

من (١) ، (٢) ر = ٦ ، ن = ٢٠ ∴ الحدود هي $ح_٦$ ، $ح_٧$ ، $ح_٨$

مثال: في مفكوك $(1 + \text{م س})^{\text{ن}}$ إذا كانت نسبة معامل ح_7 إلي معامل ح_5 هي ٨ : ٥ ، قيمة معامل ح_3 = ١١٢ معامل ح_1 فاثبت أن ن = ٨ ثم أوجد قيمة م

الحـــــــل

$$\frac{\text{معامل ح}_7}{\text{معامل ح}_5} = \frac{\text{معامل ح}_7}{\text{معامل ح}_6} \times \frac{\text{معامل ح}_6}{\text{معامل ح}_5} = \frac{\text{ن} - 6 + 1}{6} \times \frac{\text{م}}{1} \times \frac{\text{ن} - 5 + 1}{5} \times \frac{\text{م}}{1} = \frac{8}{5}$$

$\therefore (\text{ن} - 5)(\text{ن} - 4)\text{م}^2 = 48$ ------ (١)

$$\frac{\text{معامل ح}_3}{\text{معامل ح}_1} = \frac{\text{معامل ح}_3}{\text{معامل ح}_2} \times \frac{\text{معامل ح}_2}{\text{معامل ح}_1} = \frac{\text{ن} - 2 + 1}{2} \times \frac{\text{م}}{1} \times \frac{\text{ن} - 1 + 1}{1} \times \frac{\text{م}}{1}$$

$\therefore \text{ن}(\text{ن} - 1)\text{م}^2 = 224$ ---- (٢) بقسمة (١) علي (٢)

$$\therefore \frac{\text{ن}^2 - 9\text{ن} + 20}{\text{ن}^2 - \text{ن}} = \frac{48}{224} = \frac{3}{1}$$

$\therefore 11\text{ن}^2 - 123\text{ن} + 280 = 0$ $\therefore (\text{ن} - 8)(11\text{ن} - 35) = 0$

$\therefore \text{ن} = 8$ أو $\text{ن} = \frac{35}{11}$ مرفوض   بالتعويض في (١)

$\therefore 3 \times 4 \times \text{م}^2 = 48$ $\therefore \text{م} = \pm 2$

مثال: في مفكوك $(2\text{س} + \text{ص})^{\text{ن}}$ حسب قوي س التنازلية وجد أن 9ح_2 ، 9ح_4 ، 44ح_6 تكون متتابعة هندسية فما قيمة ن .

الحـــــــل

$$\frac{\text{ح}_4}{\text{ح}_2} = \frac{44\text{ح}_6}{9\text{ح}_4} \quad \therefore \frac{\text{ح}_4}{\text{ح}_3} \times \frac{\text{ح}_3}{\text{ح}_2} = \frac{44}{9} \times \frac{\text{ح}_6}{\text{ح}_5} \times \frac{\text{ح}_5}{\text{ح}_4}$$

$$\therefore \frac{\text{ن} - 3 + 1}{3} \times \frac{\text{ص}}{2\text{س}} \times \frac{\text{ن} - 4 + 1}{4} \times \frac{\text{ص}}{2\text{س}}$$

$$= \frac{44}{9} \times \frac{\text{ن} - 5 + 1}{5} \times \frac{\text{ص}}{2\text{س}} \times \frac{\text{ن} - 4 + 1}{4} \times \frac{\text{ص}}{2\text{س}}$$

$$\therefore (\text{ن} - 2)(\text{ن} - 1) = \frac{22(\text{ن} - 4)(\text{ن} - 3)}{15}$$

$$\therefore 15(\text{ن}^2 - 3\text{ن} + 2) = 22(\text{ن}^2 - 7\text{ن} + 12)$$

وبعد الاختصار $\therefore \text{ن} = 13$

مثال: إذا كان الحدان الأوسطان في مفكوك (أ س + ب) $^{٢ن+١}$ متساويين أوجد قيمة س علماً بأن ن عدد صحيح موجب .

الحـــل

الحدان الأوسطان هما $ح_{ن+١}$ ، $ح_{ن+٢}$

$\therefore \frac{ح_{ن+٢}}{ح_{ن+١}} = ١$ $\therefore \frac{(٢ن+١) - (ن+١) + ١}{ن+١} \times \frac{ب}{أ س} = ١$

$\therefore$ أ س = ب $\therefore$ س = $\frac{ب}{أ}$

مثال: إذا كونت معاملات الحدود الخامس والسادس والسابع في مفكوك (١+ س)^{ن} متتابعة حسابية فأوجد ن ثم أذكر رتب الحدود الأخرى في المفكوك التي تكون معاملاتها نفس المتتابعة الحسابية السابقة .

الحـــل

$٢ \times {}^{ن}ق_{٥} = {}^{ن}ق_{٤} + {}^{ن}ق_{٦}$ بقسمة الطرفين علي ${}^{ن}ق_{٥}$

$\therefore ٢ = \frac{{}^{ن}ق_{٤}}{{}^{ن}ق_{٥}} + \frac{{}^{ن}ق_{٦}}{{}^{ن}ق_{٥}}$

$\therefore$ ١٢ (ن - ٤) = ٣٠ + (ن- ٥) (ن- ٤)

$\therefore$ $ن^{٢}$ – ٢١ ن + ٩٨ = ٠ $\therefore$ (ن- ٧) (ن- ١٤) = ٠

$\therefore$ ن = ٧ أ، ن = ١٤

${}^{٧}ق_{٤} = {}^{٧}ق_{٣}$ ، ${}^{٧}ق_{٥} = {}^{٧}ق_{٢}$ ، ${}^{٧}ق_{٦} = {}^{٧}ق_{١}$

$\therefore$ الحدود الأخرى هي $ح_{٢}$ ، $ح_{٣}$ ، $ح_{٤}$

تمرين (٥)

(١) إذا كان الحدان الأوسطان في مفكوك $(٢س+٣)^{١٧}$ متساويين . فما قيمة س .

(٢) إذا كانت الحدود الثالث والرابع والخامس في مفكوك $(س+ص)^{ن}$ هي علي الترتيب ١١٥٢٠ ، ١٥٣٦٠ ، ١٣٤٤٠ . أوجد قيمة كل من س ، ص ، ن .

(٣) إذا كانت الحدود الثاني والثالث والرابع في مفكوك $(س+ص)^{ن}$ هي ٢٤٠ ، ٧٢٠ ، ١٠٨٠ علي الترتيب . فما قيم س ، ص ، ن .

(٤) إذا كانت ثلاثة معاملات لحدود متتالية في مفكوك $(١+س)^{ن}$ هي ٢٠ ، ١٩٠، ١١٤٠ . فما قيمة ن وما ترتيب تلك الحدود .

(٥) إذا كانت النسبة بين معاملات ثلاثة حدود متتالية في مفكوك $(١+س)^{ن}$ كنسبة ١٥ : ٢٤ : ٢٨ . فما قيمة ن وما ترتيب هذه الحدود .

(٦) إذا كانت النسبة بين الحدين الثاني والثالث في مفكوك $(أ+ب)^{ن}$ تساوي النسبة بين الحدين الثالث والرابع في مفكوك $(أ+ب)^{ن+٣}$. فما قيمة ن .

(٧) في مفكوك $(١+م\,س)^{ن}$ إذا علم أن نسبة معامل الحد الرابع إلي معامل الحد السادس تساوي $\frac{١}{٤}$ ونسبة معامل الحد السادس إلي معامل الحد الثامن تساوي $\frac{٧}{٤}$ فأوجد قيمة كل من م ، ن .

(٨) في مفكوك $\left(٢\,س+\frac{٣}{س^{٢}}\right)^{ن}$ كان الحدان التاسع والعاشر متساويين والنسبة بين الحد السادس والحد السابع كنسبة ٨ : ١٥ . فأوجد قيمة ن وأثبت أنه لا يوجد حد خال من س في المفكوك .

(٩) في مفكوك $(س+٣)^{ن}$ حسب قوي س التنازلية . وجد أن الحد العاشر = $\frac{٢}{٣}$ الحد التاسع ، $ح_{١٠} = \frac{١}{٤} ح_{١١}$. أوجد قيمة كل من ن ، س .

(١٠) في مفكوك $(١+س)^{ن}$ حسب قوي س التصاعدية . وجد أن الحد الرابع $\frac{٢٥}{٣}$ الحد الثاني ، والحد الخامس يساوي الحد السادس . أوجد قيمة كل من ن ، س .

الباب الثاني

الأعـداد المـركبة

الحاجة إلى توسيع نظام الأعداد الحقيقية :

من دراستنا السابقة تعرفنا علي مجموعات الأعداد وهي :

١) مجموعة الأعداد الطبيعية ط = { ١، ٢ ، ٣ ، ٤ ، .... }
حيث جمع أو ضرب عددين طبيعيين هو عدد طبيعي

٢) مجموعة الأعداد الكلية ك = { ٠، ١ ، ٢ ، ٣ ، .... }

٣) مجموعة الأعداد الصحيحة ص= { ..... ، ٣ ، ٢- ، ١- ، ٠ ، ١ ، ٢، ٣ ، ...... }
وظهرت لتسمح بحلول معادلات في صورة س + أ = ب حيث ، ب أعداد طبيعية . فمثلا حل المعادلات س+ ٧ = ٣ هو س = ٣ ـ ٧
∴ س = ـ٤ وهذا الناتج لا يوجد في الأعداد الطبيعية .

٤) مجموعة الأعداد النسبية (القياسية) :
ق = { $\frac{أ}{ب}$: أ ، ب ∈ ص ، ب ≠ صفر }
وظهرت لتسمح بحلول معادلات في صورة أ س = ب
فمثلا : حل المعادلة ٤ س = ٩ هو س = $\frac{٩}{٤}$ وهذا الناتج لا يوجد في مجموعة الأعداد الصحيحة .

٥) مجموعة الأعداد الحقيقية ح = { الأعداد النسبية والغير نسبية }
وظهرت لتسمح بحلول معادلات مثل $س^٢ = ٢$ ∴ س = ± $\sqrt{٢}$
ورأينا أن أي نظام ينشأ كتوسيع للنظام الذي يسبقه لحل معادلات جديدة لم تكن قابلة للحل في النظام السابق .
مثلا المعادلة $س^٢ + ١ = ٠$ أي $س^٢ = -١$
فهذه المعادلة غير قابلة للحل في ح (مجموعة الأعداد الحقيقية) حيث لا يمكن إيجاد عدد حقيقي س يحقق المعادلة . لذلك كان التفكير في إيجاد مجموعة جديدة من الأعداد نجد فيها حلا لمثل هذه المعادلات هذه المجموعة الجديدة تسمي و " مجموعة الأعداد المركبة" .

العدد التخيلي ت :

نعلم أن $\sqrt{-١}$ ∉ ح لأنه لا يوجد عدد حقيقي مربعة = -١ ونرمز للعدد $\sqrt{-١}$ بالرمز ت وهو أول حرف من كلمة تخيلي (غير حقيقي) حيث $ت^٢ = -١$

قوي العدد ت :

∵ $ت^2 = -1$ ∴ $ت^3 = ت^2 \times ت = -ت$ ، $ت^4 = ت^2 \times ت^2 = 1$

وعلي العموم : $ت^{4ن} = 1$ حيث ن ∈ ص⁺ ، $ت^{4ن+م} = ت^م$

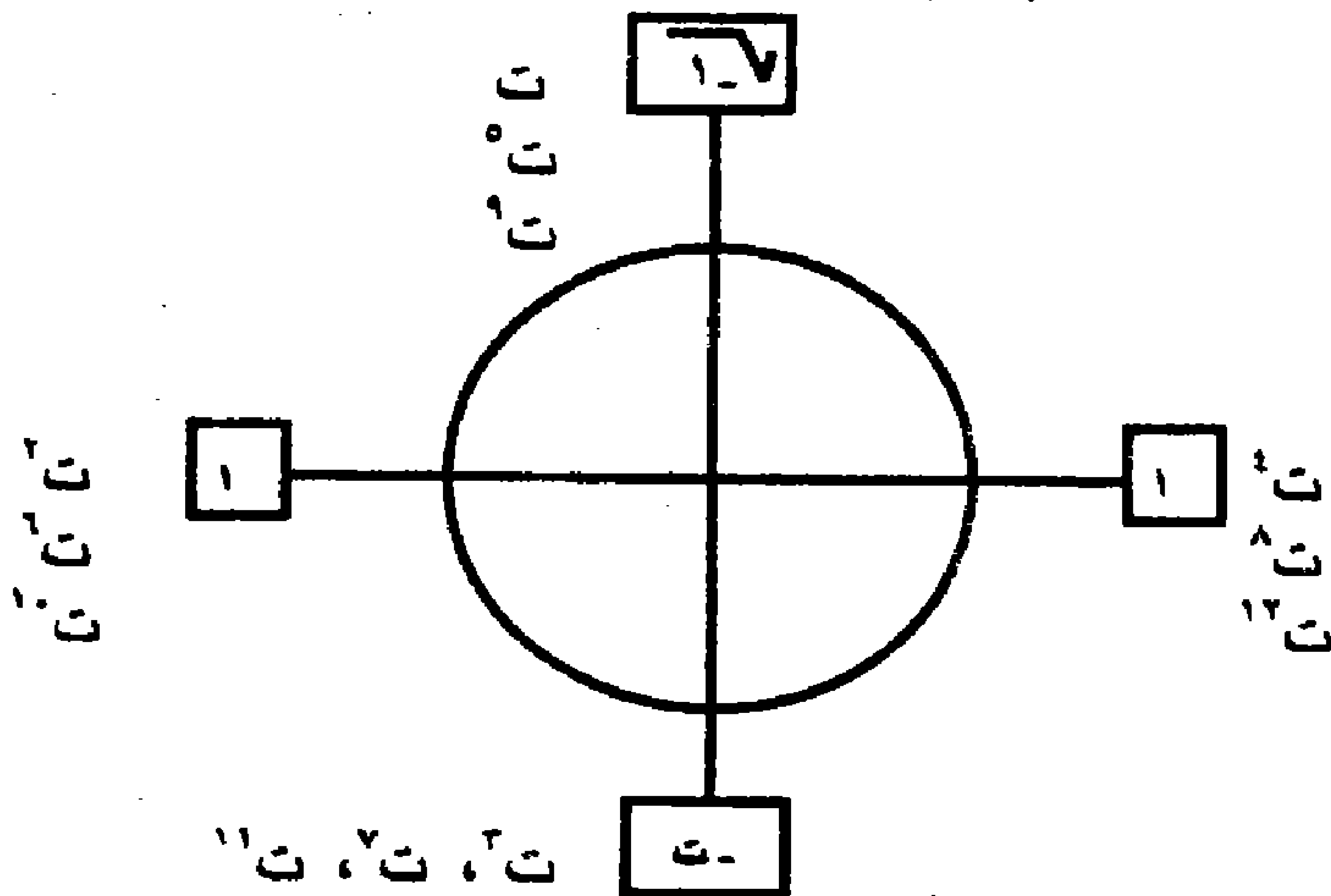
حيث م = ١، ٢، ٣ وهي بواقي قسمة أس (ت) علي ٤

<u>فمثلاً :</u> $ت^5 = ت^{4+1} = ت$ ، $ت^6 = ت^{4+2} = ت^2 = -1$ ، $ت^7 = ت^{4+3} = ت^3 = -ت$

<u>ويلاحظ أن :</u> قوي ت الزوجية كميات حقيقية مثل $ت^2$ ، $ت^4$ ، $ت^6$

وقوي ت الفردية كميات تخيلية مثل ت ، $ت^3$ ، $ت^5$

ومن المفيد تذكر هذا الرسم الذي يبين أن دورة ت رباعية



<u>مثال:</u> أكتب في أبسط صورة $ت^{20}$ ، $ت^{21}$ ، $ت^{22}$ ، $ت^{23}$ ، $ت^{24}$ ، $ت^{50}$

الحـــــــل

$ت^{20} = (ت^4)^5 = 1$ ، $ت^{21} = ت^{20+1} = ت$

$ت^{22} = ت^{20+2} = ت^2 = -1$ ، $ت^{23} = ت^{20+3} = ت^3 = -ت$

$ت^{24} = (ت^4)^6 = ت^6 = 1$ ، $ت^{50} = ت^{48+2} = ت^2 = -1$

مجموعة الأعداد التخيلية (   ) :

مجموعة الأعداد التخيلية = { ع: ع = ص ت ، ص ∈ ح ، $ت^2 = -1$}

أي كل عدد بالصورة ص ت مثل ٣ت ، ٥ت ، -٧ ، $\sqrt{3}$ ت ، ....

يسمي عدد تخيلي وينتمي إلي هذه المجموعة وأي عدد بالصورة $\sqrt{-أ}$ حيث أ عدد حقيقي موجب

هو عدد تخيلي ويكتب بالصورة ص ت مثل :

$\sqrt{-3} = \sqrt{3}$ ت ، $\sqrt{-7} = \sqrt{7}$ ت

∴ العدد التخيلي هو الجذر التربيعي لعدد حقيقي سالب .

مجموعة الأعداد المركبة

يعرف العدد المركب بأنه العدد الذي يمكن وضعه علي الصورة ع = س + ت ص حيث س، ص عددان حقيقيان . وتسمي س الجزء الحقيقي للعدد المركب ع وتسمي ص الجزء التخيلي للعدد المركب ع . وتسمي الصورة س + ت ص بالصورة الجبرية للعدد المركب ع .

فإذا كان ص = ٠ فإن العدد ع = س يكون حقيقيا صرفاً

فإذا كان س = ٠ فإن العدد ع = ت ص يكون تخيلياً صرفاً

كما يمكن كتابة العدد المركب ع علي هيئة زوج مرتب يكون العنصر الأول فيه هو الجزء الحقيقي والعنصر التالي هو الجزء التخيلي للعدد المركب .

ع = (س، ص) حيث س ، ص ∈ ح

وتسمي الصورة ع = (س، ص) الصورة الكارتيزية .

∴ العدد المركب هو الكمية التي تتركب من جزأين أحدهما حقيقي والأخر تخيلي .

ومجموعة الأعداد المركبة يمكن كتابتها بالصورة :-

ك = { ع : ع = س+ ت ص ، س ∈ ح ، ص ∈ ح}

مثال : حل المعادلة $س^٢ - ٢س + ٢ = ٠$

الحـــــــل

∵ حل المعادلة $أس^٢ + ب س + جـ = ٠$ هو

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{المميز}}{٢أ} \quad \text{حيث المميز} = ب^٢ - ٤ أ جـ$$

∴ أ = ١ ، ب = -٢ ، جـ = ٢ ، المميز = $(-٢)^٢ - ٤ (١) (-٢) = ٤ - ٨ = -٤$

، ∵ المميز < ٠ ∴ يوجد حلان ∈ إلي مجموعة الأعداد المركبة وهما

$$س = \frac{-(-٢) \pm \sqrt{-٤}}{٢ (١)} = \frac{٢ \pm ٢ ت}{٢} = \frac{٢[١ \pm ت]}{٢} = ١ \pm ت$$

∴ الحلول هي { ١+ ت ، ١- ت }

نظام الأعداد المركبة

- **تعريف تساوي عددين مركبين :-**

١) يقال للعددين المركبين $س_١ + ت ص_١$ ، $س_٢ + ت ص_٢$ أنهما متساويان

إذا كان $س_١ = س_٢$، $ص_١ = ص_٢$ أي جزأيهما الحقيقيان يتساويان وجزأيهما التخيليان يتساويان أيضا.

أي أنه إذا كان $ع_١ = س_١ + ت ص_١ = (س_١ ، ص_١)$

، $ع_٢ = س_٢ + ت ص_٢ = (س_٢ ، ص_٢)$

وكانت $ع_١ = ع_٢$ فإن $س_١ = س_٢$ ، $ص_١ = ص_٢$

٢) إذا كان س+ ص ت = ٠ فإن س = ٠ ، ص = ٠

بمعني إذا أنعدم مقدار تخيلي مركب فإن الجزء الحقيقي ينعدم علي حده والجزء التخيلي ينعدم أيضاً علي حده .

مثال: أوجد قيمة س ، ص الحقيقة التي تحقق المعادلة :

(١+ ٢ت) س – (٢ + ٣ ت) ص = ١- ٤ ت

الحـــــل

نضع الطرف الأيمن علي صورة عدد مركب

∴ س + ٢ س ت - ٢ ص- ٣ ص ت = ١- ٤ت

(س- ٢ص) + (٢س - ٣ص) ت = ١- ٤ت

∴ س -٢ ص = ١ ---- (١) ، ٢ س- ٣ص = -٤ ---- (٢)

بضرب طرفي المعادلة (١) في (٢)

∴ -٢س + ٤ص= -٢ وبالجمع مع (٢)

٢ س - ٣ص = -٤

ص = -٦ بالتعويض في (١) ∴ س= -١١

مثال: إذا كان س+ ت ص = أ + ب ت – اثبت أن : س = أ ، ص= ب حيث أ ، ب أعداد حقيقية.

الحـــــل

∵ س+ ت ص = أ + ب ت

∴ (س- أ) = ت (ب – ص) بتربيع الطرفين

∴ (س- أ)^{٢} = - (ب – ص)^{٢}

∴ (س- أ)^{٢} + (ب – ص)^{٢} = ٠

، ∵ لا يوجد عددان حقيقيان مجموع مربعيهما = صفر

∴ س- أ = ٠ ∴ س = أ

، ب- ص = ٠ ∴ ب = ص

<u>تعريف مجموع عددين مركبين :-</u>

(أ) إذا كان العددين علي الصورة العامة للأعداد المركبة :

(س$_{١}$ ∓ ت ص$_{١}$) + (س$_{٢}$ ∓ ت ص$_{٢}$) = (س$_{١}$ ∓ س$_{٢}$) + (ص$_{١}$ ∓ ص$_{٢}$) ت

أي نجمع الجزأين الحقيقيين معاً والجزأين التخيليين معاً .

<u>مثلاً :</u>

إذا كان ع١ = ٢ + ٣ ت ، ع ٢ = ٤ - ت

فإن : ع١ + ع ٢ = (٢+٤) + (٣- ١) ت = ٦ + ٢ت

، ع١ - ع ٢ = ع١ + (-ع٢) = ع١ + المعكوس الجمعي للعدد المطروح

= ٢ + ٣ت + (-٤ + ت) = (٢ - ٤) + (٣+ ١) ت = -٢+٤ت

(ب) إذا كان العددين علي صورة الزوج المرتب :

إذا كان ع$_{١}$ = (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) ، ع$_{٢}$ = (س$_{٢}$ ، ص$_{٢}$) فإن :

ع$_{١}$ ∓ ع$_{٢}$ = (س$_{١}$ ∓ س$_{٢}$ ، ص$_{١}$ ∓ ص$_{٢}$)

<u>مثلاً :</u>

ع$_{١}$ = (٣ ، -١) ، ع$_{٢}$ = (٠ ، ٥)

فإن: ع$_{١}$ + ع$_{٢}$ = (٣ + ٠ ، -١ + ٥) = (٣، ٤)

، ع$_{١}$ - ع$_{٢}$ = (٣ - ٠ ، -١ - ٥) = (٣ ، -٦)

<u>تعريف حاصل ضرب عددين مركبين :-</u>

(أ) إذا كان العددين علي صورة الزوج المرتب :

ع$_{١}$. ع$_{٢}$ = (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) (س$_{٢}$ ، ص$_{٢}$) = (س$_{١}$ س$_{٢}$- ص$_{١}$ ص$_{٢}$ ، س$_{١}$ ص$_{٢}$+ س$_{٢}$ ص$_{١}$)

<u>مثلاً</u> : (٢ ،٣) (٤، -١) = ٢ × ٤ – ٣ × -١ ، ٢× -١ + ٣ × ٤)

= ٨ + ٣ ، -٢ + ١٢ = (١١ ، ١٠)

(ب) إذا كان العددين علي الصورة العامة للأعداد المركبة:

$ع_1 . ع_2 = (س_1 + ت ص_1)(س_2 + ت ص_2)$

نتبع نفس قواعد حاصل ضرب المقادير الجبرية مع اختصار قوي ت

مثلاً : إذا كانت $ع_1 = ٢ + ٣ت$ ، $ع_2 = ٥ + ٤ت$

فإن ٢ + ٣ت

٥ + ٤ت

---

١٠ + ١٥ت

$+ ٨ت + ١٢ت^2$

١٠+ ٢٣ت + ١٢(-١) = -٢ + ٢٣ت

تمارين (٦)

▪ **اختصر إلي أبسط صورة :-**

(١) $(٥ + \sqrt{-٤}) + (٥ - \sqrt{-١٦})$

(٢) $(٢ - \sqrt{-٢٥})(٣ + \sqrt{-٣٦})$

(٣) $(٣ - ٢ت)(٢ - ت)^2$

(٤) أجمع ت + ٢ت + ٣ت .... إلي ٢١ حداً

▪ **أوجد قيمة كل من س ، ص الحقيقية**

(٥) (١ + ٢ت) س + ٣ (ت- ١) ص = ٩

(٦) $س + ص ت = (١ + ت)^3$

▪ **أوجد الناتج علي صورة عدد مركب**

(٧) أوجد العدد المركب الذي يساوي $(١ + ت)^4 - (١ - ت)^4$

(٨) إذا كان ص + ٩- ٢ س (١+ت) - (٣- س٢) ت = ٠ حيث س ، ص ∋ ح فأوجد قيمة كل من س ، ص

(٩) إذا كان $ع_1 = -\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت$ ، $ع_2 = -\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت$ فأثبت أن : $ع_1^2 = ع_2$

(١٠) **حل المعادلة :**

$س^2 + ٥ = ٠$

خصائص عملية جمع الأعداد المركبة

(١) عملية الجمع علي الأعداد المركبة عملية تبديلية فإن كان :

ع$_1$ = س$_1$ + ت ص$_1$ ، ع$_2$ = س$_2$ + ت ص$_2$ فإن:

ع$_1$ + ع$_2$ = (س$_1$+ ت ص$_1$) + (س$_2$+ ت ص$_2$) = (س$_1$+ س$_2$) + (ص$_1$ + ص$_2$) ت

= (س$_2$+ س$_1$) + (ص$_2$+ ص$_1$) ت = (س$_2$+ ت ص$_2$) + (س$_1$+ ت ص$_1$)

= ع$_2$ + ع$_1$

(٢) عملية جمع الأعداد المركبة تنسيقيه (تجميعيه):

إذا كان ع$_1$ = س$_1$ + ت ص$_1$ ، ع$_2$ = س$_2$ + ت ص$_2$ + ع$_3$ = س$_3$ + ت ص$_3$

فإن: ع$_1$ + (ع$_2$+ ع$_3$) = (ع$_1$ + ع$_2$) ع$_3$

(٣) العدد صفر هو المحايد الجمعي للأعداد المركبة :

صفر+ ع = ع + صفر = ع

(٤) لكل عدد مركب ع معكوس جمعي (-ع) بحيث ع + (-ع) = صفر

فإذا كان ع = س + ت ص فإن –ع = - (س+ ت ص) = - س – ت ص

خصائص عملية ضرب الأعداد المركبة

(١) عملية ضرب الأعداد المركبة إبدالية:

ع$_1$ ع$_2$ = ع$_2$ ع$_1$ لكل ع$_1$ ، ع$_2$ $\in$ ك

(٢) عملية الضرب تجميعية (تنسيقيه):

(ع$_1$ ع$_2$) ع$_3$ = ع$_1$(ع$_2$ ع$_3$) = ع$_1$ ع$_2$ ع$_3$ لكل ع$_1$ ، ع$_2$ ، ع$_3$ $\in$ ك

(٣) وجود العنصر المحايد:

ع × ١ = ١ × ع = ع لكل ع $\in$ ك

(٤) إذا فرض أن ع = س + ت ص فإنه يوجد معكوس ضربي يساوي

$$\frac{\text{س}}{\text{س}^2 + \text{ص}^2} - \frac{\text{ص ت}}{\text{س}^2 + \text{ص}^2}$$

ونرمز له بالرمز ع$^{-1}$ أو $\frac{1}{\text{ع}}$ حيث ع ($\frac{1}{\text{ع}}$) = ١ لكل ع $\in$ ك

(٥) عملية الضرب تتوزع علي عملية الجمع في ك

ع$_1$ (ع$_2$+ ع$_3$) = ع$_1$ ع$_2$ + ع$_1$ ع$_3$ لكل ع$_1$ ، ع$_2$ ، ع$_3$ $\in$ ك

ملاحظة:

المحايد الضربي معكوسة نفسه ع = (١،٠) فإن ع$^{-1}$ = $\frac{1}{1+0}$ ، $\frac{0}{1+0}$ = (١،٠)

قسمة عدد مركب على آخر:

$ع_1 = (أ ، ب)$ ، $ع_2 = (جـ ، ء)$

$\therefore \frac{ع_1}{ع_2} = (أ ، ب) (جـ ، ء)^{-1}$

$= (أ ، ب) . \left(\frac{جـ}{جـ^2 + ء^2} ، \frac{-ء}{جـ^2 + ء^2} \right)$

$= \left(\frac{أجـ + بء}{جـ^2 + ء^2} ، \frac{بجـ - أء}{جـ^2 + ء^2} \right)$

مثلاً:

$\frac{(٣،٢)}{(٤،٣)} = \left(\frac{٣\times٤ + ٢\times٣}{١٦ + ٩} ، \frac{٢\times٤ - ٣\times٣}{١٦ + ٩} \right) = \frac{١٨}{٢٥} ، \frac{-١}{٢٥}$

مثال: أوجد قيمة $\sqrt{٥ - ١٢ت}$

الحـــــل

نفرض س + ت ص = $\sqrt{٥ - ١٢ت}$ بتربيع الطرفين

$\therefore (س^2 - ص^2) + ٢ س ص ت = ٥ - ١٢ ت$

$\therefore س^2 - ص^2 = ٥$ ----- (١) ، ٢ س ص = - ١٢

$\therefore$ س ص = - ٦ ---- (٢)

لكن $(س^2 + ص^2) = \quad (٥)^2 + (-١٢)^2 = ١٣$ ----- (٣)

$\therefore ٢س^2 = ٥ + ١٣ = ١٨$ $\therefore$ س = ± ٣ ، ص = - $\frac{٦}{س}$ = ± ٢

$\therefore \sqrt{٥ - ١٢ت} = ± ٣ ± ٢ت$

مثال: إذا كان ع عدداً مركباً في المعادلة $(١،٢)ع + (١،-٢) = \frac{(٤،٦)}{(١،١)}$

الحـــــل

$\because (١،٢)ع + (١،-٢) = \frac{٤\times١ + ٦\times١}{(١)^2 + (١)^2} ، \frac{٦\times١ - ٤\times١}{(١)^2 + (١)^2}$

$= \left(\frac{١٠}{٢} ، \frac{٢}{٢} \right) = (٥ ، ١)$

$\therefore (١ ، ٢)ع = (٥، ١) - (١ ، -٢) = (٤ ، ٣)$

$\therefore ع = \frac{(٤،٣)}{(١،٢)} = \frac{٤+٦}{٥} ، \frac{٣-٨}{٥} = (٢ ، -١)$

مثال:

إذا كانت س = (١،٢) ، ص = (٣،٤) ، ع = (٧،١) حيث س، ص ، ع أعداد مركبة أثبت أن :

$$\frac{١}{س} + \frac{٢٠}{ع} - \frac{٥}{ص} = (٢,٤ ، ٠)$$

الحـــــل

الطرف الأيمن: ١(س$^{-١}$) + ٢٠(ع$^{-١}$) – ٥ (ص$^{-١}$)

$$\therefore \left(\frac{١}{٥} ، \frac{-٢}{٥}\right) + ٢٠\left(\frac{٧}{٥٠} ، \frac{-١}{٥٠}\right) - ٥\left(\frac{٣}{٢٥} ، \frac{-٤}{٢٥}\right)$$

$$\left(\frac{١}{٥} ، \frac{-٢}{٥}\right) + \left(\frac{١٤٠}{٥٠} ، \frac{٢٠}{٥٠}\right) - \left(\frac{١٥}{٢٥} ، \frac{-٥\times٤}{٢٥}\right)$$

$$\left(\frac{١}{٥} ، \frac{-٢}{٥}\right) + \left(\frac{١٤}{٥} ، \frac{-٢}{٥}\right) - ٥\left(\frac{٣}{٥} ، \frac{-٤}{٥}\right)$$

$$\left(\frac{١٥}{٥} ، \frac{-٤}{٥}\right) - \left(\frac{٣}{٥} ، \frac{-٤}{٥}\right) = \left(\frac{١٢}{٥} ، صفر\right) = (٢,٤ ، صفر)$$

مثال: إذا كان ع = س + ص ت حيث س ≠ ٠ ، ص ≠ ٠ فاثبت أن :

$$ع^{-١} = \frac{س}{س^٢ + ص^٢} - \frac{ص ت}{س^٢ + ص^٢}$$

الحـــــل

الفكرة هي إثبات أن ع × ع$^{-١}$ = ع$^{-١}$ × ع = ١ (المحايد الضربى)

$$\therefore ع \times ع^{-١} = (س + ت ص)\left(\frac{س}{س^٢ + ص^٢} - \frac{ص}{س^٢ + ص^٢} ت\right)$$

$$= \left(\frac{س^٢}{س^٢ + ص^٢} + \frac{ص^٢}{س^٢ + ص^٢}\right) + \left(\frac{-س ص}{س^٢ + ص^٢} + \frac{س ص}{س^٢ + ص^٢}\right) ت$$

$$= \frac{س^٢ + ص^٢}{س^٢ + ص^٢} + صفر = ١ \quad ----(١)$$

، ∵ الضرب عملية إبدالية ∴ ع$^{-١}$ × ع = ١ ---- (٢)

من (١) ، (٢) يثبت المطلوب

مثال: إذا كان الزوج المرتب (أ ، ب) يعبر عن أ + ب ت وكان: $ع_١$ = (٢ ، $\sqrt{٣}$ ٣)

، $ع_٢$ = (٣ ، -$\sqrt{٣}$ ٣) فأوجد كلاً من $ع_١ + ع_٢$ ، $ع_١ ع_٢$

الحـــــل

$ع_1 + ع_2 = (٢ ، \sqrt{٣}) + (٣ ، -\sqrt{٣}) = (٥ ، ٠)$

، $ع_1 ع_2 = (٢ ، \sqrt{٣})(٣ ، -\sqrt{٣})$

$= س_1 س_2 - ص_1 ص_2 ، س_1 ص_2 + س_2 ص_1$

$= ٦ + ٣ ، ٣\sqrt{٣} - ٢\sqrt{٣} = (٩ ، \sqrt{٣})$

العدد المرافق لعدد مركب

إذا كان العدد المركب ع = س + ت ص فإن العدد المركب $\bar{ع}$ = س − ت ص يسمي مرافق العدد ع

- لاحظ أن العدد المركب ع ، مرافقه $\bar{ع}$ لا يختلفان إلا في إشارة الجزء التخيلي منهما.

مثلاً : العدد ٣ + ٤ ت مرافقه ٣ − ٤ ت ، مرافق العدد ٣ هو نفسه

∴ العددان المركبان المترافقان :

أ) جزآ هما الحقيقيان متساويان .

ب) جزآ هما التخيليان مختلفان في الشارة فقط .

خواص العددان المترافقان :

(١) مجموع عددين مترافقين هو عدد حقيقي قيمته ضعف الجزء الحقيقي لأيهما .

فإذا كان ع = س + ت ص فإن $\bar{ع}$ = س − ت ص

∴ ع + $\bar{ع}$ = س + ت ص + س − ت ص = ٢ س = عدد حقيقي .

(٢) حاصل ضرب أي عددين مركبين مترافقين = عدد حقيقي

لأن ع × $\bar{ع}$ = (س + ت ص) (س- ت ص) = $س^2 - ص^2 ت^2 = س^2 + ص^2$ = عدد حقيقي

قيمته مربع الجزء الحقيقي + مربع الجزء التخيلي .

(٣) الفرق بين العددين المركبين المترافقين عدد تخيلي.

(٤) المرافق لمجموع عددين مركبين = مجموع مرافقيهما

أي $\overline{ع_1 + ع_2} = \bar{ع}_1 + \bar{ع}_2$

(٥) المرافق لحاصل ضرب عددين مركبين يساوي حاصل ضرب مرافقيهما

أي أن : $\overline{ع_1 \times ع_2} = \bar{ع}_1 \times \bar{ع}_2$

(٦) المرافق لخارج قسمة عددين مركبين يساوي خارج قسمة مرافقيهما

أي : $\overline{ع_1 \div ع_2} = \bar{ع}_1 \div \bar{ع}_2$

ملاحظة:

$\left(\frac{1}{ع}\right)^{-} = \frac{1}{\bar{ع}}$ ، $(\bar{ع})^{-} = ع$

مثال: إذا كانت $ع^{-1} = (٣، ١)$ فإن ع = ...

الحـــــل

$\because ع^{-1} = (٣، ١)$ $\therefore ع = (٣، ١)^{-1}$

$= \left(\frac{٣}{١٠} ، \frac{-١}{١٠}\right)$

مثال: إذا كان (س، ص) عدداً مركباً وكان (س، ص) = $\frac{(٣، ٢)}{(٣، ٢)}$ فإن س = ... ، ص = ...

الحـــــل

$\because$ (س، ص) = $\frac{(٣، ٢)}{(٣، -٢)} = \left(\frac{٦+٦}{١٣} ، \frac{٤-٩}{١٣}\right)$

$\therefore$ (س، ص) = $\left(\frac{١٢}{١٣} ، \frac{-٥}{١٣}\right)$

$\therefore$ س = $\frac{١٢}{١٣}$ ، ص = $\frac{-٥}{١٣}$

مثال: أوجد $\sqrt{\frac{-٧ + ت}{١ + ت}}$

الحـــــل

نفرض المقدار = س+ ت ص ثم بالتربيع للطرفين

$\therefore \frac{-٧ + ت}{١ + ت} \times \frac{١ - ت}{١ - ت} = -٣ + ٤ ت$

$\therefore س^{٢} - ص^{٢} = -٣$ ---- (١)

، ٢س ص = ٤ ---- (٢) ، $\because س^{٢} + ص^{٢} = \sqrt{٩ + ١٦} = ٥$

$\therefore$ س = ± ١ ، ص = ± ٢

مثال: أوجد قيمة $س^{٢} + ص^{٢}$ إذا كان : س + ت ص = $\frac{٣ - ٢ت}{٣ + ٢ت}$

الحـــــل

الطرف الأيسر = $\frac{٣ - ٢ت}{٣+٢ت} \times \frac{٣ - ٢ت}{٣-٢ت} = \frac{٥-١٢ت}{١٣}$

$\therefore$ س + ت ص = $\frac{٥-١٢ت}{١٣} = \frac{٥}{١٣} - \frac{١٢}{١٣}$ ت

$\therefore \text{س} = \frac{٥}{١٣} \quad ، \text{ص} = \frac{-١٢}{١٣}$

$\therefore \text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = \frac{٢٥}{١٦٩} + \frac{١٤٤}{١٦٩} = ١$

<u>مثال:</u> حل المعادلة (١ ، ٢) ع + (٣ ، ٢) = (٤ ، -٢) حيث ع عدد مركب

الحـــــل

$(١ ، ٢)\ \text{ع} = (٤ ، -٢) - (٣ ، ٢) = (١ ، -٤)$

$\therefore \text{ع} = \frac{(١ ، -٤)}{(١ ، ٢)} = \left(\frac{١-٨}{٥} ، \frac{-٤-٢}{٥}\right) = \left(\frac{-٧}{٥} ، \frac{-٦}{٥}\right)$

<u>مثال:</u> أوجد قيمتي (س، ص) الحقيقيتين:

$$\frac{(١+\text{ت})\ (٢\text{س}+\text{ت ص})}{٣-\text{ت}} = \frac{١+٢\text{ت}}{٢-\text{ت}}$$

الحـــــل

بضرب الطرفين في (٣ - ت) (٢ - ت)

$\therefore (١+\text{ت})\ (٢-\text{ت})\ (٢\text{س} + \text{ت ص}) = (١ + ٢\text{ت})\ (٣-\text{ت})$

$\therefore ٢\text{س} + \text{ت ص} = \frac{(١+٢\text{ت})\ (٣-\text{ت})}{(١+\text{ت})\ (٢-\text{ت})}$

$= \frac{٣+٥\text{ت} - ٢\text{ت}^{٢}}{٢+\text{ت}-\text{ت}^{٢}} = \frac{٥+٥\text{ت}}{٣+\text{ت}}$

$\therefore ٢\text{س} + \text{ت ص} = \frac{٥+٥\text{ت}}{٣+\text{ت}} \times \frac{٣-\text{ت}}{٣-\text{ت}} = \frac{١٥+١٠\text{ت}-٥\text{ت}^{٢}}{٩-\text{ت}^{٢}}$

$= \frac{٢٠+١٠\text{ت}}{١٠} = \frac{١٠(٢+\text{ت})}{١٠} = ٢ + \text{ت}$

$\therefore ٢\text{س} = ٢ \qquad \therefore \text{س} = ١ ، \text{ص} = ١ \qquad \therefore \text{ص} = ١$

<u>مثال:</u> إذا كان (أ+ب ت) (١+ت) - ٥ = ت حيث ت = $\sqrt{-١}$ فأوجد القيمتين لكل من أ ، ب

الحـــــل

$\therefore (\text{أ}+\text{ب ت})\ (١+\text{ت}) = ٥ + \text{ت}$

$\therefore \text{أ} + \text{أ ت} + \text{ب ت} - \text{ب} = ٥ + \text{ت}$ $\qquad \therefore (\text{أ}-\text{ب}) + (\text{أ ت} + \text{ب ت}) = ٥ + \text{ت}$

$\therefore (\text{أ}-\text{ب}) + (\text{أ}+\text{ب})\ \text{ت} = ٥ + \text{ت}$

$\therefore \text{أ} - \text{ب} = ٥$ ---- (١)

$\therefore \text{أ} + \text{ب} = ١$ ---- (٢)

$٢\text{أ} = ٦$ $\qquad \therefore \text{أ} = ٣ \quad ، \text{ب} = ٢$

مثال: إذا كان (-٢) أحد جذري المعادلة س^٣ + ٤ س^٢ + ١٧س + ٢٦ = ٠ فأوجد الجذرين الآخرين وأثبت أنهما مترافقان .

الحـــل

س^٣ + ٤ س^٢ + ١٧س + ٢٦ ÷ (س + ٢) = س^٢ + ٢س + ١٣

س^٣ + ٢ س^٢

٢س^٢ + ١٧ س

٢س^٢ + ٤ س

١٣ س + ٢٦

١٣ س + ٢٦

٠ ٠

∴ (س+ ٢) (س^٢ + ٢ س+ ١٣) = ٠ إما س = -٢

أو س^٢ + ٢ س + ١٣ = ٠

∴ س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$ حيث أ = ١ ، ب = ٢ ، جـ = ١٣

= $\frac{-٢ \pm \sqrt{٤ - ٤ \times ١ \times ١٣}}{٢}$ = $\frac{-٢ \pm \sqrt{-٤٨}}{٢}$ = $\frac{-٢ \pm ٤\sqrt{٣} ت}{٢}$

= -١ ± ٢$\sqrt{٣}$ ت

∴ الجذران -١ + ٢$\sqrt{٣}$ ت ، -١ -٢$\sqrt{٣}$ ت مترافقان

مثال: إذا كان ل = $\frac{٨+٦ت}{٣+ت}$ ، م = $\frac{١٢-١٤ت}{٥-٣ت}$ أثبت أن ل ، م مترافقان

ثم احسب قيمة $\frac{ل^٣ - م^٣}{ل - م}$

الحـــل

ل = $\frac{(٨+٦ت)(٣-ت)}{(٣+ت)(٣-ت)}$ = $\frac{٢٤+١٠ت+٦}{٩ + ١}$ = ٣ + ت

م = $\frac{(١٢-١٤ت)(٥ + ٣ت)}{(٥-٣ت)(٥ + ٣ت)}$ = $\frac{٦٠-٣٤ت+٤٢}{٢٥ + ٩}$ = ٣ - ت

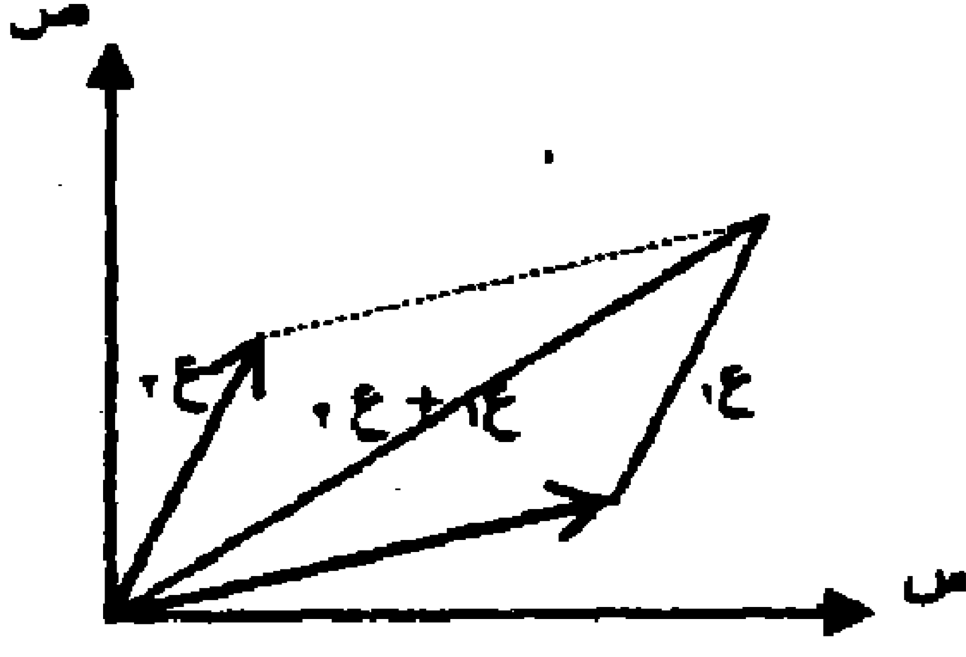
، ل + م = ٦ ، ل م = ١٠

∴ $\frac{ل^٣ - م^٣}{ل - م}$ = $\frac{(ل-م)(ل^٢+ل م+م^٢)}{(ل - م)}$ = [(ل+م)^٢ - ل م]

= ٣٦ - ١٠ = ٢٦

المعني الهندسي لجمع وطرح الأعداد المركبة

(١) الجمع:-



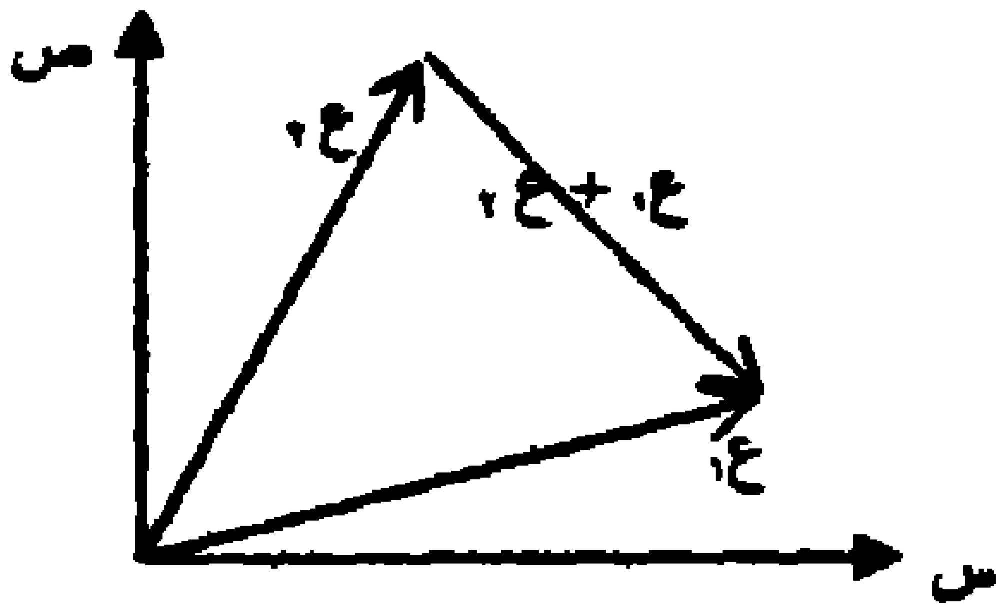
مثلا : $ع_١ = (٦ ، ٢)$

$ع_٢ = (-٢ ، ٤)$

$\therefore ع_١ + ع_٢ = (٦ ، ٢) + (-٢ ، ٤)$

$= (٤ ، ٦)$

(٢) الطرح:



مثلا : $ع_١ = (٤ ، ٢)$

$ع_٢ = (-٣ ، ٥)$

$\therefore ع_١ - ع_٢ = (٤ ، ٢) - (-٣ ، ٥)$

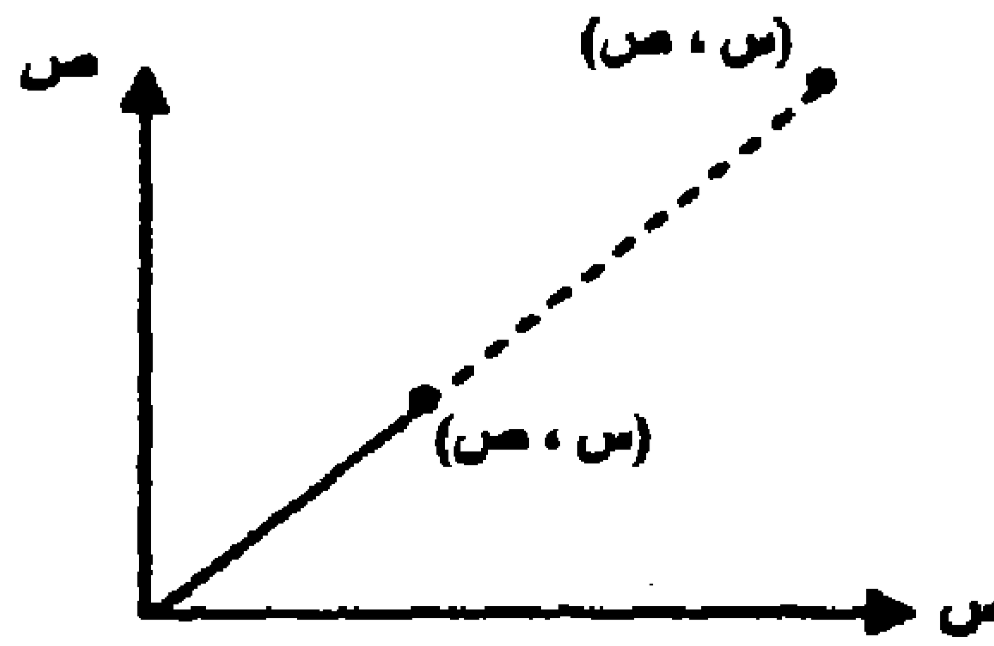
$= (٤ ، ٢) + (٣ ، -٥)$

$= (٧ ، -٣)$

المعني الهندسي لضرب عددين مركبين

(١) ضرب عدد حقيقي ك في عدد مركب ع = س + ت ص

(أ) إذا كان ك > ٥ (موجب)



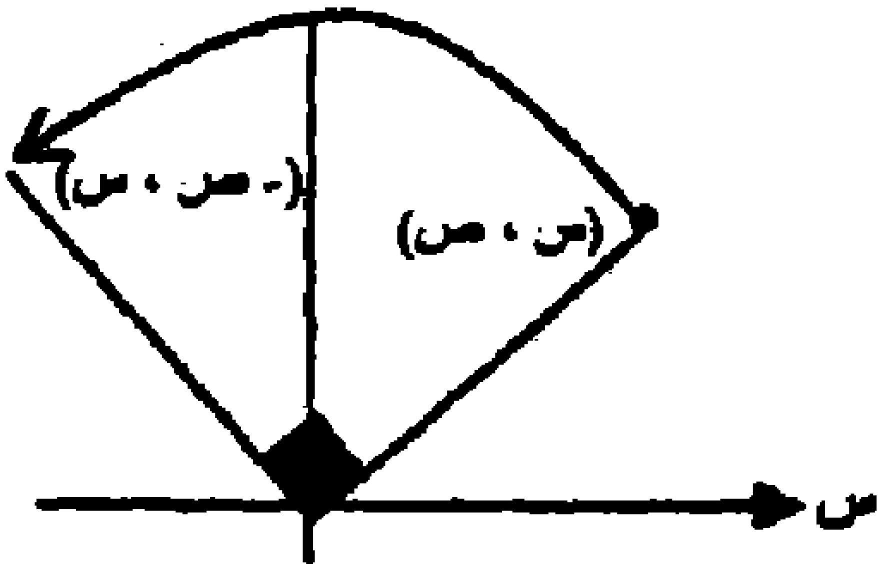
(٢) عند ضرب ت في عدد مركب ع = س + ت ص

ت (س+ ص) = ت س + ت٢ ص = - ص + ت س

أي تتحول النقطة (س ، ص) إلي النقطة (- ص، س)

وهو دوران موجب بزاوية ٩٠° في الإتجاه الموجب

حول نقطة الأصل.



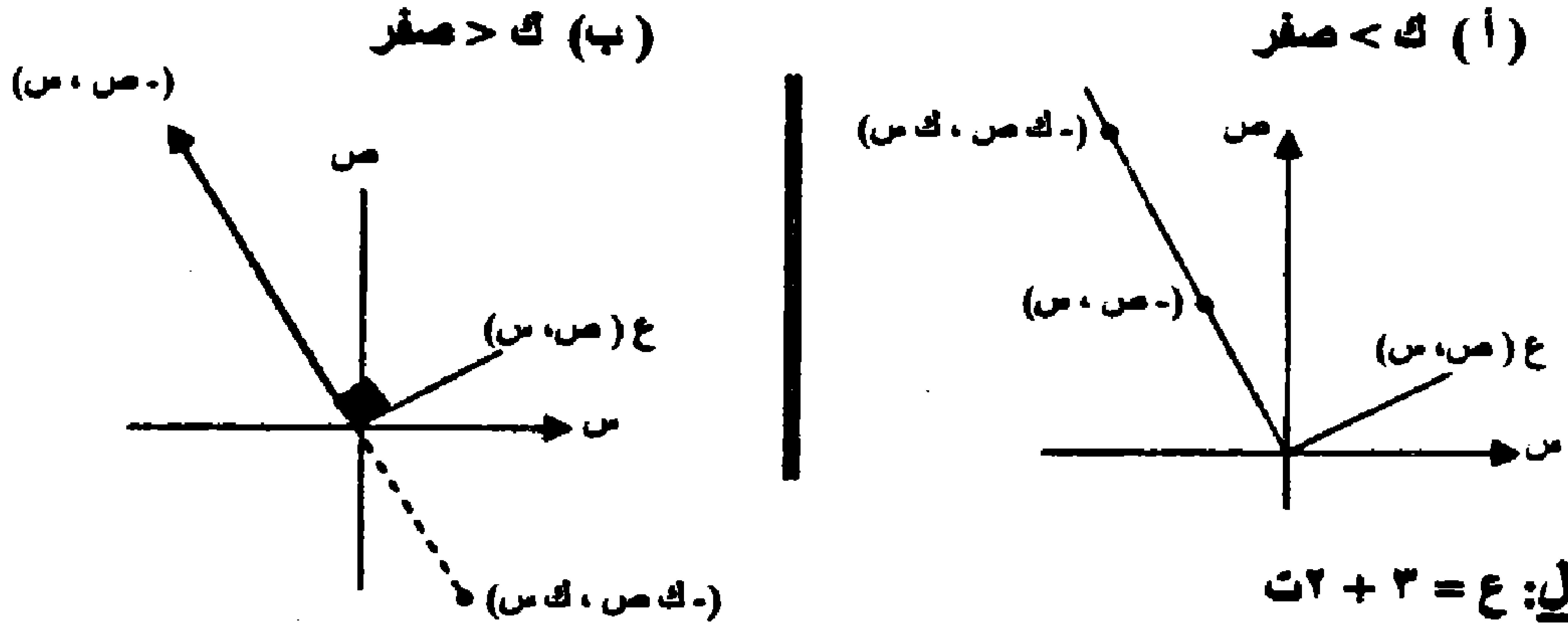
مثلا : ع = ١ + ٢ ت $\qquad \therefore$ ت ع = -٢ + ت

(٣) ضرب ك ت في العدد المركب ع = س + ت ص

ك ت (س+ ت ص) = - ك ص + ت ك س

∴ النقطة (س، ص) يحدث لها دوران موجب حول نقطة الأصل بزاوية مقدارها ٩٠°

فتصبح (- ص ، س) فتنتج النقطة (- ك ص ، ك س) .



<u>مثال:</u> ع = ٣ + ٢ت

∴ ٣ ت ع ...... ؟

∵ (٣، ٢) ← دوران بزاوية ٩٠ ← (-٢، ٣) ← تكبير بمعامل ٣ ← (- ٦، ٩)

(٤) ضرب عددين مركبين:-

$ع_1$ = $س_1$ + ت $ص_1$ ، $ع_2$ = $س_2$ + ت $ص_2$

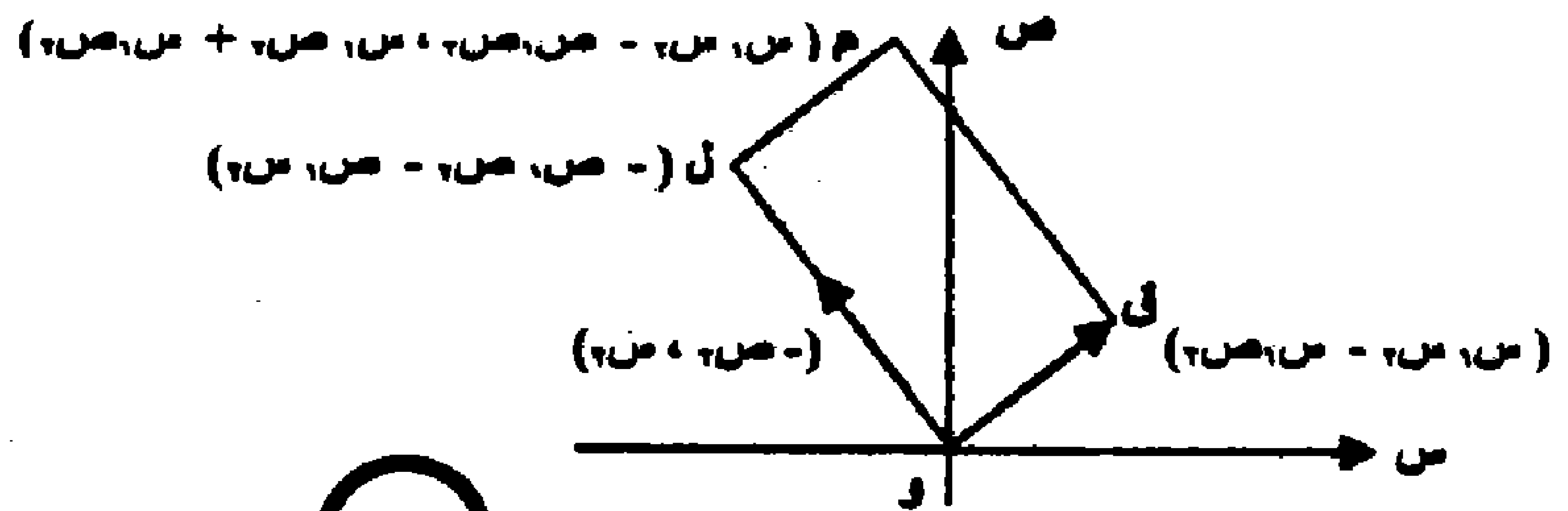
∴ التفسير الهندسي لحاصل ضرب $ع_1$ × $ع_2$ نتبع ما يلي:-

(أ) نعين النقطة التي تمثل حاصل ضرب $س_1$ في ($س_2$+ ت $ص_2$) وهي النقطة (س $س_2$+ $س_1$ $ص_2$)

(ب) دوران ($س_1$ $ص_2$) بزاوية قدرها ٩٠° ضد حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل فتنتج النقطة (- $ص_2$ ، $س_2$) التي هي عبارة عن حاصل ضرب ت في ($س_2$ + ت $ص_2$) والتي عبارة هي عن حاصل ضرب ت في ($س_2$ + ت $ص_2$) .

(ج) تعيين النقطة (- $ص_1$$ص_2$ ، $ص_1$ $س_2$) الناتجة من حاصل ضرب ($ص_2$ ، $س_2$) في $ص_1$

(د) توجد النقطة التي تمثل مجموعة الصورتين ($س_1$ $س_2$ ، $س_1$$ص_2$) ، (- $ص_1$$ص_2$، $ص_1$$س_2$)



تمارين (٧)

- **أوجد قيم س، ص الحقيقية في كل مما يأتي :**

(١) (٣ + ٤ت) (٥ - ٧ت) = س + ت ص

(٢) (٣ - ٢ت) س + (٥ + ٣ ت) ص = ٤ − ٩ ت

(٣) (٢س − ٣ت ص) (١ + ٢ ت) = (٢ - ت)^{٣}

(٤) $\frac{\text{س + ت ص}}{\text{١ + ت}} + \frac{\text{٢س + ٣ت ص}}{\text{١ - ت}} = \frac{\text{٧}}{\text{٢}}$

(٥) $\frac{\text{س}^{٢}\text{ + ص}^{٢}}{\text{س − ت ص}} = \frac{\text{٣ت - ١}}{\text{(٣ + ت)}^{٢}} + \frac{\text{ت - ٣}}{\text{(١ + ٣ت)}^{٢}}$

(٦) $\frac{\text{١ + ت}}{\text{٢ + ت}} + \frac{\text{٢ + ت}}{\text{١ + ٢ت}} = \frac{\text{س + ص + ت}}{\text{س - ص + ت}}$

(٧) إذا كان $\frac{\text{أ + ب ت}}{\text{أ − ب ت}}$ = س + ت ص

أثبت أن س^{٢} + ص^{٢} = ١ مهما كانت قيمة كل من أ ، ب

(٨) إذا كان أ + ب ت = $\frac{\text{٢ + ت}}{\text{١ - ت}}$ حيث أ ، ب حقيقيان

فأثبت أن ٢(أ^{٣} + ب^{٣}) = ٧

(٩) إذا كان (س + ت ص)^{٢} + $\frac{\text{١٠ (١ - ٢ت)}}{\text{١ + ٢ت}}$ + ٢١ = ٠

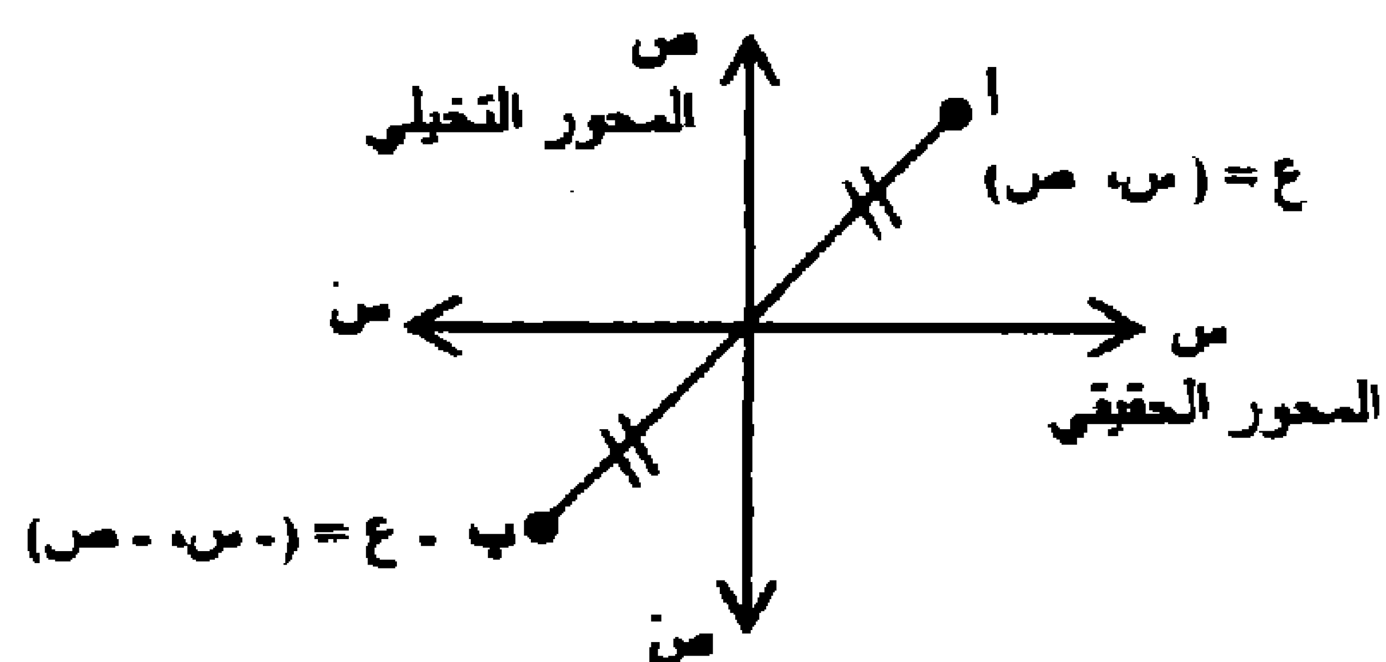
فأوجد قيمة كل من س، ص

(١٠) إذا كان ل + ن ت أحد جذري المعادلة أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠

حيث ل ، ن ، أ ، ب ، جـ أعداد حقيقية فأثبت أن أ ن^{٢} = أ ل^{٢} + ب ل + جـ

التمثيل البياني للأعداد المركبة

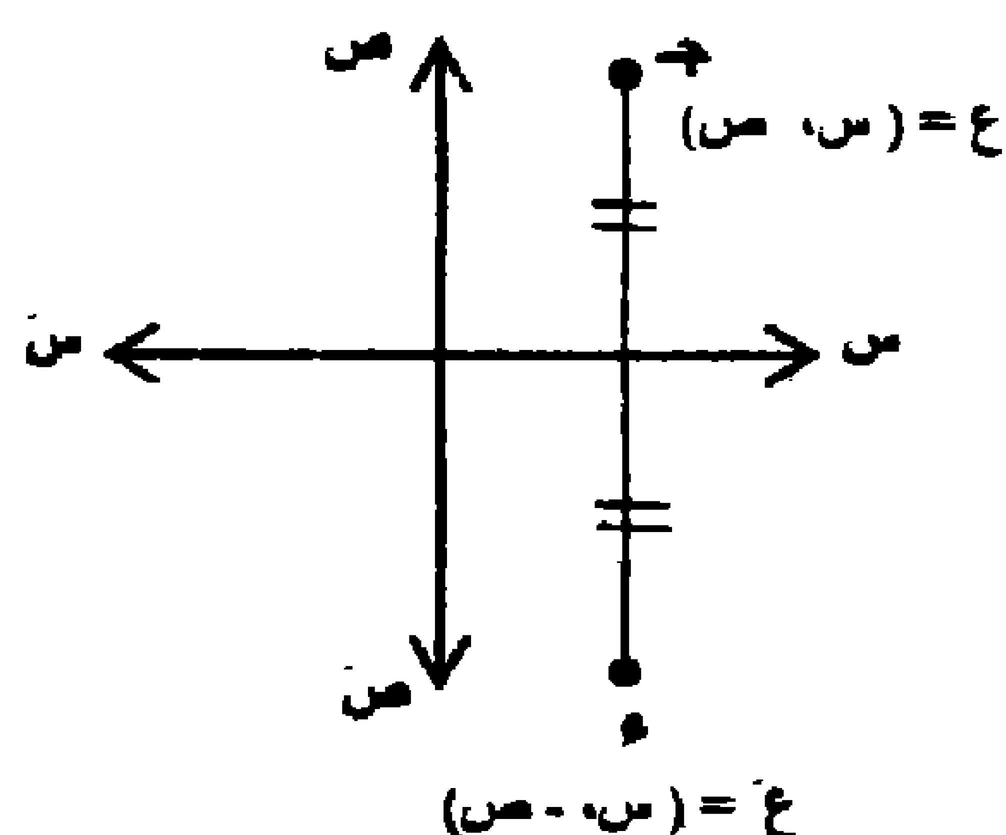
العدد المركب ع = س + ص ت نمثله بيانياً في نظام أحداثي متعامد (شكل آرجاند) بالنقطة (س، ص) حيث س تمثل الأعداد الحقيقية ، ص تمثل الأعداد التخيلية البحته .



(١) تمثيل العدد ومعكوسه الجمعي :

أ ، ب تمثلان ع ، - ع

وهما متماثلان بالنسبة لنقطة الأصل.



(٢) تمثيل العدد المرافق له:

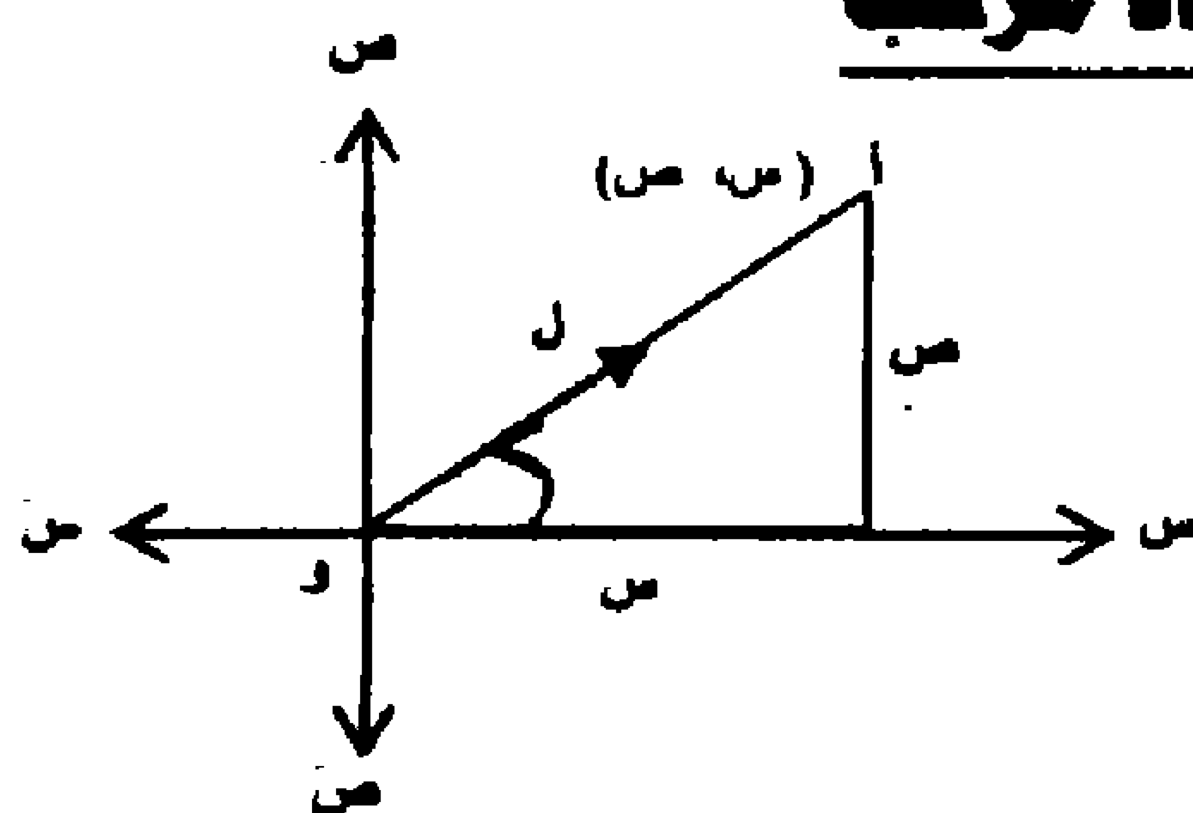
جـ ، ء تمثلان ع ، عَ وهما متماثلان بالنسبة للمحور س سَ

ومما سبق نستنتج أن:

(١) العددان المركبان المترافقان يمثلان بيانياً بنقطتين متماثلتان بالنسبة للمحور سَ و س .

(٢) العدد المركب ومعكوسه لجمعي يمثلان بطرفي قطعة مستقيمة تكون نقطة الأصل في منتصفها.

المقياس والسعة لعدد مركب



أي مركب ع = س + ت ص

تمثله في الشكل المقابل نقطة أ حيث | و أ | = ل

(١) مقياس العدد (ع) هو: ع = ل = $\sqrt{س^2 + ص^2}$

وهو عدد حقيق موجب.

(٢) سعة العدد (ع) قياس الزاوية التي يصنعها و أ

مع الأتجاه الوجب لمحور السينات (وهو عدد حقيقي)

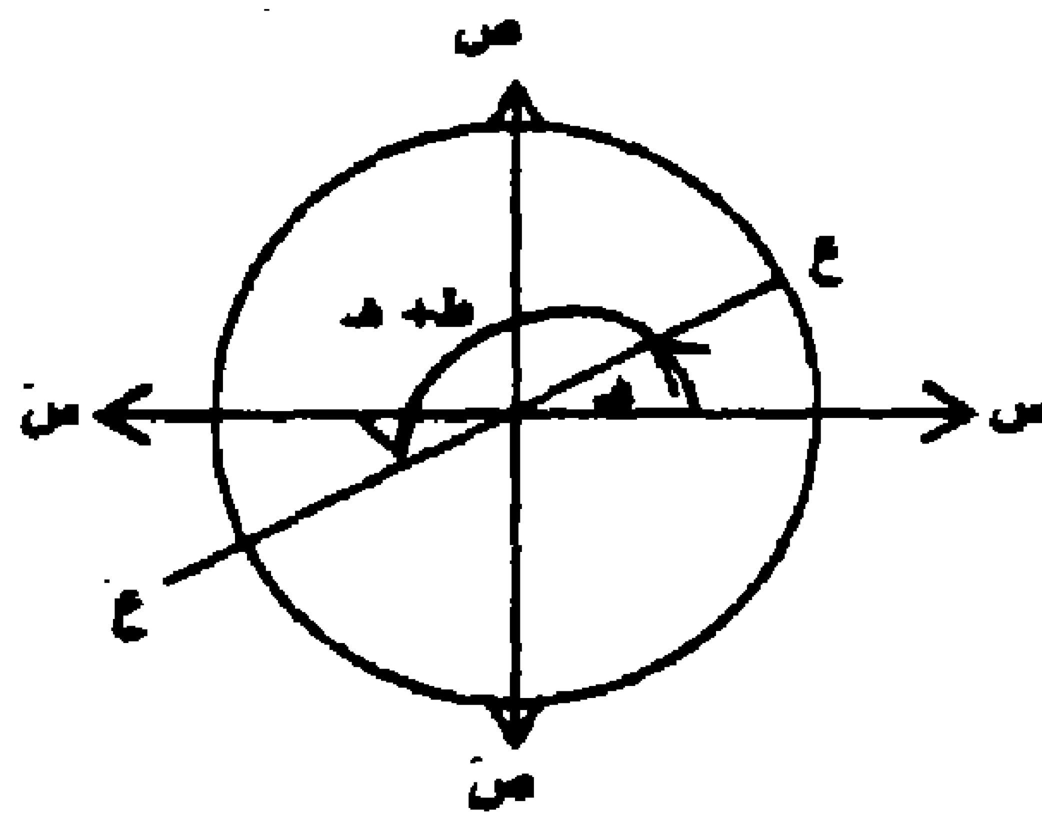
والسعة الأساسية للعدد (ع) = هـ حيث هـ ∈ [٠، ٢ط[



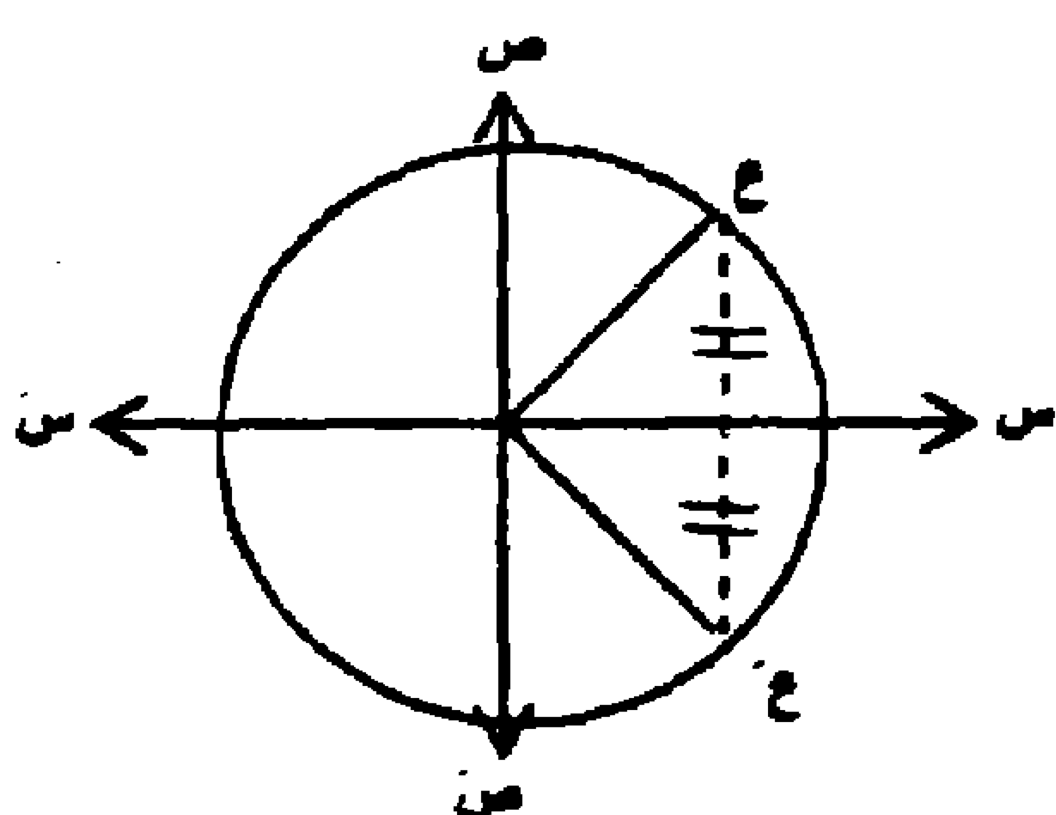
(٣) جتا هـ = $\frac{\text{س}}{\text{ل}}$ ← س = ل جتا هـ ، جا هـ = $\frac{\text{ص}}{\text{ل}}$ ← ص = ل جا هـ

∴ الصورة المثلثية (القطبية) للعدد ع هي

ع = ل (جتا هـ + ت جا هـ) حيث ل المقياس ، هـ السعة



العلاقة بين سعة ع ، سعة (- ع)



العلاقة بين سعة ع ، سعة (عَ)

لاحظ أن:

إذا كان سعة العدد ع = هـ فإن:

(أ) سعة المعكوس الجمعي (-ع) = ط + هـ

∴ - ع = ل [حتا (ط+ هـ) + ت حا (ط + هـ)]

(ب) سعة المرافق له عَ = (٢ط – هـ)

∴ عَ = ل [حتا (٢ط- هـ) + ت حا (٢ط- هـ)]

كيف تحسب القيمة الأساسية لسعة ع = س+ ت ص ؟

(١) نحسب | ع | = ل = $\sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2}$

(٢) نحسب قياس الزاوية الحادة وليكن (ي) من:

حتا ي = | $\frac{\text{س}}{\text{ل}}$ | أو حا ي = | $\frac{\text{ص}}{\text{ل}}$ | ونصرف النظر مؤقتاً عن اشارات س ، ص عند حساب ي

(٣) نعين القيمة الأساسية لسعة ي بناء علي إشارتي س ، ص طبقاً للجدول التالي:-

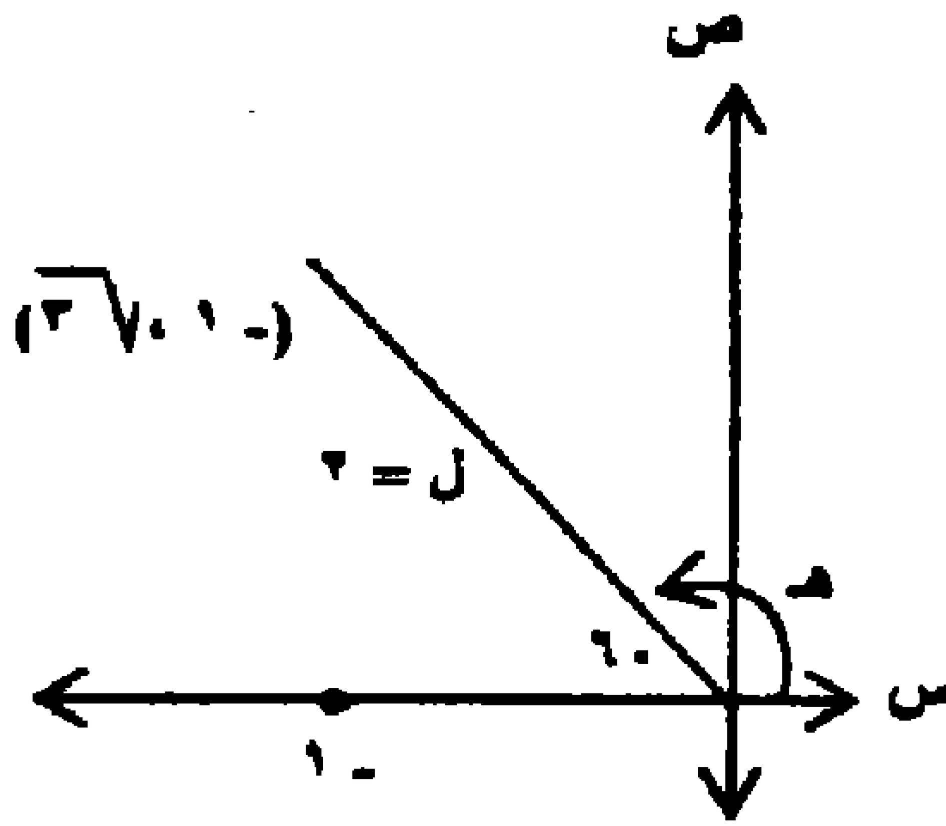
إشارة س	إشارة ص	المربع الذي تقع فيه ع	السعة الأساسية
+	+	الأول	هـ = ي
-	+	الثاني	هـ = ١٨٠ - هـ
-	-	الثالث	هـ = ١٨٠ + هـ
+	-	الرابع	هـ = ٣٦٠ - هـ

مثال: أوجد المقياس والسعة لكل من الأعداد المركبة الآتية ثم أكتب كلا منها علي الصورة المثلثية:

[١] $-١ + \sqrt{٣}$ ت [٢] ١ + ت

[٣] ١ ـ ت [٤] ـ٣ ـ ٤ ت

الحـــــل



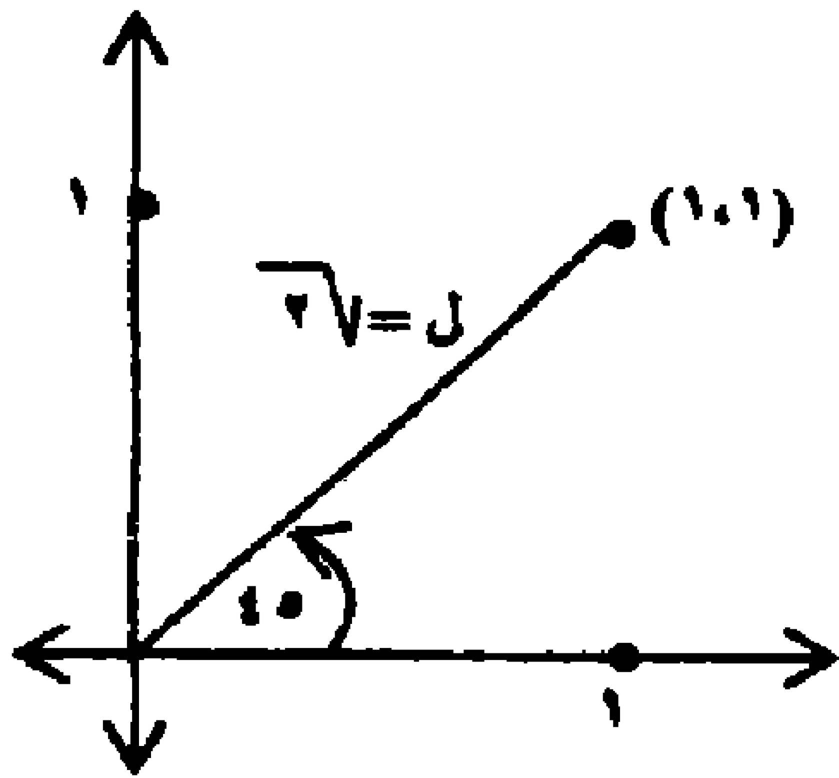
[١] العدد تمثله النقطة (ـ١، $\sqrt{٣}$) وهي تقع في الربع الثاني

$\therefore$ ل = | ع١ | = $\sqrt{١+٣}$ = ٢

، جتا هـ = $\frac{س}{ل}$ = ـ $\frac{١}{٢}$

$\therefore$ هـ = ١٨٠ ـ ٦٠ = ١٢٠ = $\frac{٢}{٣}$ ط

$\therefore$ ع١ = ٢ (جتا $\frac{٢}{٣}$ ط + ت جا $\frac{٢}{٣}$ ط)

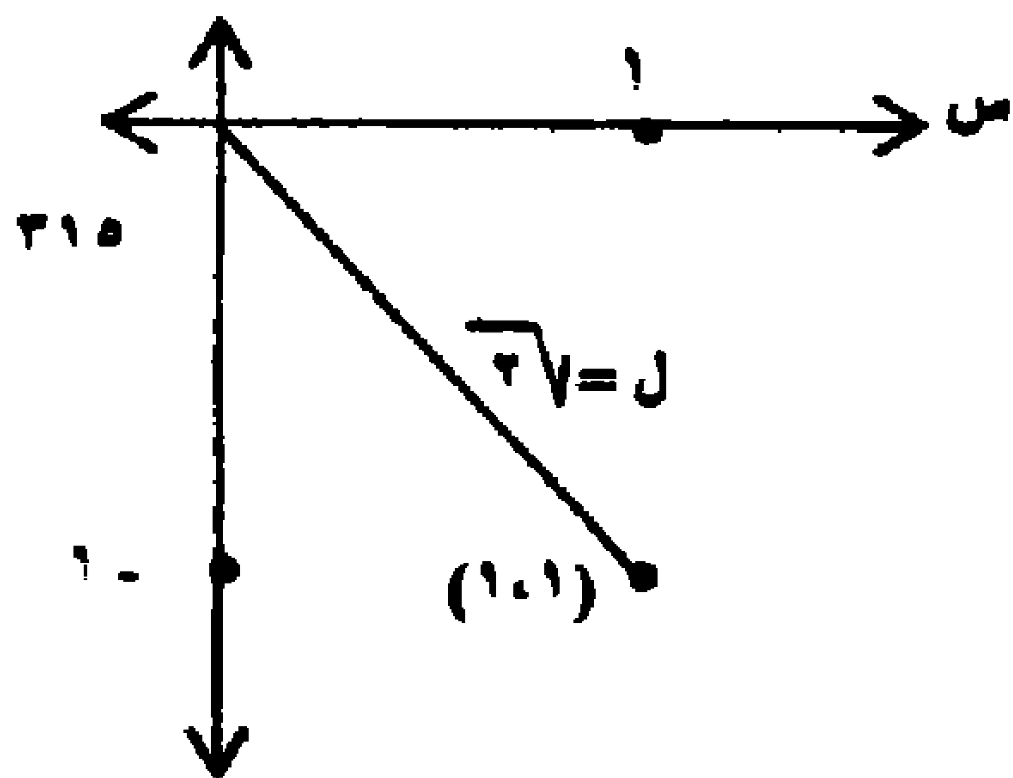


[٢] العدد تمثله النقطة (١،١) وهي تقع في الربع الأول

$\therefore$ ل = |ع٢| = $\sqrt{١+١}$ = $\sqrt{٢}$

، جتا هـ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ $\therefore$ هـ = ٤٥ = $\frac{ط}{٤}$

$\therefore$ ع٢ = $\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{ط}{٤}$ + ت جا $\frac{ط}{٤}$)



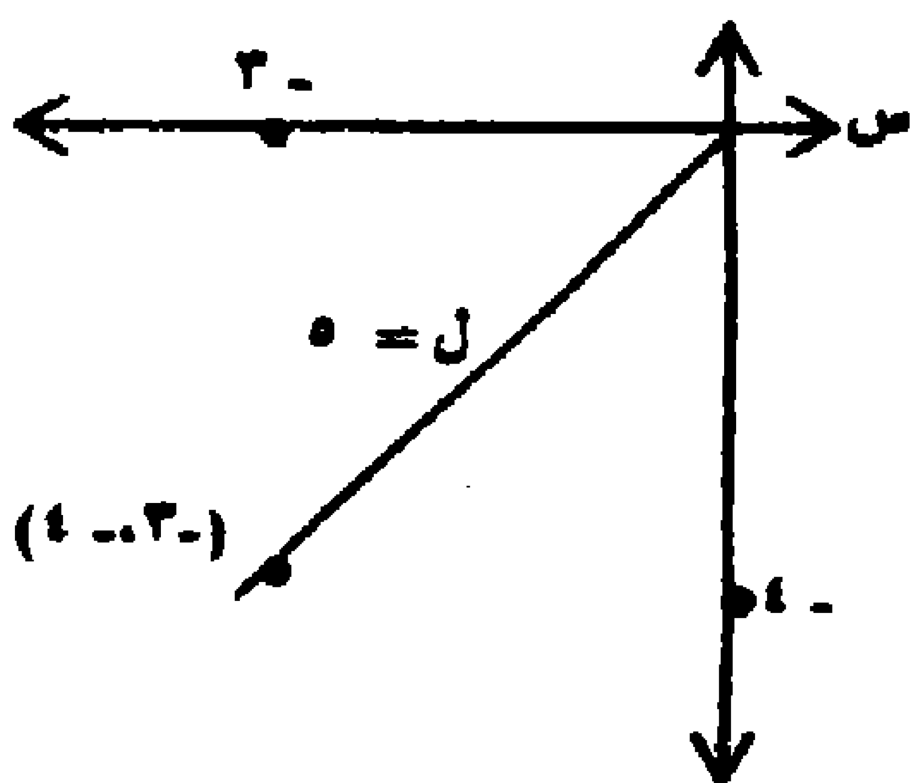
[٣] العدد تمثله النقطة (١، ـ١) وهي تقع في الربع الرابع

$\therefore$ ل = |ع٣| = $\sqrt{١+١}$ = $\sqrt{٢}$

، جتا هـ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

$\therefore$ هـ = ٣٦٠ ـ ٤٥ = ٣١٥ = $\frac{٧ط}{٤}$

$\therefore$ ع٣ = $\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{٧ط}{٤}$ + ت جا $\frac{٧ط}{٤}$)



[٤] العدد تمثله النقطة (ـ٣،ـ٤) وهي تقع في الربع الثالث

$\therefore$ ل = |ع٤| = $\sqrt{٩+١٦}$ = ٥

، جتا هـ = $\frac{-٣}{٥}$

$\therefore$ هـ = ١٨٠ + ٨َ ٥٣ْ = ٨َ ٢٣٣ْ

$\therefore$ ع٤ = ٥ (جتا ٨َ ٢٣٣ْ + ت جا ٨َ ٢٣٣ْ)

مثال: اكتب الصورة الجبرية لكل من الأعداد المركبة التالية:-

١) $ع_١$: مقياسه ٢ ، سعته $\frac{ط}{٤}$ ‏ ‏ ‏ ‏ ٢) $ع_٢$: مقياسه ٢ $\sqrt{٣}$ وسعته $\frac{٢}{٣}$ ط

٣) $ع_٣$: مقياسه ٥ وسعته $\frac{٧}{٦}$ ط ‏ ‏ ‏ ‏ ٤) $ع_٤$: مقياسه ٧ وسعته $\frac{٣ ط}{٢}$

الحـــــــل

١) $ع_١ = ٢ \left(جتا \frac{ط}{٤} + ت جا \frac{ط}{٤} \right) = ٢ \left(\frac{١}{\sqrt{٢}} + ت \times \frac{١}{\sqrt{٢}} \right) = \sqrt{٢} + \sqrt{٢}$ ت

٢) $ع_٢ = ٢\sqrt{٣} \left(جتا \frac{٢ ط}{٣} + ت جا \frac{٢ ط}{٣} \right)$

$= ٢\sqrt{٣} \left(جتا ١٢٠ + ت جا ١٢٠ \right) = ٢\sqrt{٣} \left(- \frac{١}{٢} + ت \frac{\sqrt{٣}}{٢} \right) = -\sqrt{٣} + ٣ت$

٣) $ع_٣ = ٥ \left(جتا \frac{٧ ط}{٦} + ت جا \frac{٧ ط}{٦} \right) = ٥ \left(- جتا \frac{ط}{٦} - ت جا \frac{ط}{٦} \right)$

$= ٥ \left(- \frac{\sqrt{٣}}{٢} - ت \times \frac{١}{٢} \right) = \frac{-٥\sqrt{٣}}{٢} - \frac{٥}{٢}$ ت

٤) $ع_٤ = ٧ \left(جتا \frac{٣ ط}{٢} + ت جا \frac{٣ ط}{٢} \right) = ٧ \left(٥ + ت \times -١ \right) = -٧$ ت

مثال: أوجد الصورة المثلثية لكل من:

١) العدد ٢ ‏ ‏ ‏ ‏ ٢) العدد ٢ ت

الحـــــــل

١) العدد ٢ تمثله النقطة (٢، ٥)

∴ ل = ٢ ، هـ = ٥

∴ $ع_١ = ٢$(جتا ٥ + ت جا ٥)

٢) العدد ٢ ت تمثله النقطة (٥، ٢)

∴ ل = ٢ ، هـ = ٩٠°

∴ $ع_٢ = ٢$(جتا ٩٠ + ت جا ٩٠)

مثال:

ضع العدد ع = $\frac{1 - 5ت}{2 + 3ت}$ علي الصورة الجبرية س+ ت ص ثم علي الصورة المثلثية

الحـــــل

$$ع = \frac{1 - 5ت}{2 + 3ت} \times \frac{2 - 3ت}{2 - 3ت} = \frac{-13 - 13ت}{13} = -1 - ت$$

∴ ل = $\sqrt{س^2 + ص^2}$ = $\sqrt{1 + 1}$ = $\sqrt{2}$ --- (1)

والعدد ع تمثله النقطة (-1، -1) وهي في الربع الثالث

∴ طا هـ = $\frac{ص}{س}$ = 1 ∴ هـ = 180 + 45 = 225 --- (2)

من (1) ، (2)

∴ الصورة القطبية هي ع = $\sqrt{2}$ (جتا 225 + ت جا 225)

مثال: إذا كان ع = ل (جتا هـ + ت جا هـ)

فاكتب علي الصورة القطبية كلا من: -ع ، $\bar{ع}$ ، $\frac{1}{ع}$ ، $\frac{1}{\bar{ع}}$

الحـــــل

-ع = ل [جتا (ط+ هـ) + ت جا (ط+ هـ)]

$\bar{ع}$ = ل [جتا (- هـ) + ت جا (- هـ)]

$$\frac{1}{ع} = \frac{1}{ل(جتا هـ + ت جا هـ)} = \frac{1}{ل} \times \frac{جتا هـ - ت جا هـ}{جتا^2 هـ + جا^2 هـ}$$

$$= \frac{1}{ل} [جتا (- هـ) + ت جا (- هـ)]$$

$$\frac{1}{\bar{ع}} = \frac{1}{ل(جتا هـ + ت جا هـ)} = \frac{1}{ل} \quad \frac{جتا هـ + ت جا هـ}{جتا^2 هـ + جا^2 هـ}$$

$$= \frac{1}{ل}(جتا هـ + ت جا هـ)$$

ملاحظة:

سعة العدد ع = هـ

(-ع) = ط+ هـ

$\bar{ع}$ = 2ط - هـ = - هـ

$\frac{1}{ع}$ = 2ط - هـ = - هـ

$\frac{1}{\bar{ع}}$ = هـ

مثال: ضع علي الصورة القطبية كلا من :-

1) جتا هـ - ت جا هـ

2) جا هـ + ت جتا هـ

3) - جا هـ + ت جتا هـ

4) - جا هـ - ت جتا هـ

الحـــــــل

١) جتا هـ - ت جا هـ = جتا (- هـ) + ت جا (- هـ)

٢) جا هـ + ت جتا هـ = جتا ($\frac{ط}{٢}$ - هـ) + ت جا ($\frac{ط}{٢}$ - هـ)

٣) - جا هـ + ت جتا هـ = جتا ($\frac{ط}{٢}$ + هـ) + ت جا ($\frac{ط}{٢}$ + هـ)

٤) - جا هـ - ت جتا هـ = جتا ($\frac{٣ط}{٢}$ - هـ) + ت جا ($\frac{٣ط}{٢}$ - هـ)

ملاحظة:

إذا كان ع = ل (جتا هـ + ت جا هـ)

-ع (المعكوس الجمعي) الصورة القطبية ← ل [جتا (ط+ هـ) + ت جا (ط+ هـ)]

عَ (المرافق) ← ل [جتا (- هـ) + ت جا (- هـ)

$\frac{١}{ع}$ (المعكوس الضربي) ← $\frac{١}{ل}$ [جتا (- هـ) + ت جا (- هـ)]

$\frac{١}{ع}$ ← (جتاهـ + ت جا هـ)

تمارين (٨)

- أوجد المقياس والسعة لكل من الأعداد الآتية ثم عبر عن كل منها بالصورة المثلثية:-

١) -١ + ت

٢) $\sqrt{٣}$ - ت

٣) -٢ + ٢ت

٤) $\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

٥) ٣$\sqrt{٢}$ + ٣$\sqrt{٢}$ ت

٦) ٢ت

- أكتب الصورة الجبرية لكل من الأعداد المركبة الآتية:-

٧) العدد الذي مقياسه ٢$\sqrt{٣}$ وسعته ١٢٠°

٨) العدد الذي مقياسه $\sqrt{٢}$ وسعته $\frac{٥ط}{٤}$

٩) العدد الذي مقياسه $\sqrt{٣}$ وسعته $\frac{١١ط}{٤}$

١٠) العدد الذي مقياسه $\sqrt{٦}$ وسعته ($-\frac{٥ط}{٦}$)

- ضع كلا من الأعداد الآتية علي صورة أ+ب ت حيث أ، ب ∈ ح ثم أكتب الصورة المثلثية لكل منها

١١) $\frac{٥ - \sqrt{٣}ت}{\sqrt{٣} - ٢ت}$

١٢) $\frac{٨(٢ + \sqrt{٣}ت)}{٥ - \sqrt{٣}ت}$

١٣) $\frac{٦ + ٢\sqrt{٣}ت}{٣ - \sqrt{٣}ت}$

١٤) $\frac{\sqrt{٣} - ت}{٢(جتا\frac{ط}{٢} + ت جا\frac{ط}{٢})}$

١٥) إذا كانت ع = ٢-٢ ت فأكتب الصورة المثلثية لكل من الأعداد ع ، -ع ، $\bar{ع}$ ، $\frac{١}{ع}$

١٦) مثل علي شكل أرجاند الأعداد $ع_١$ = -٣+ ٤ت ، $ع_٢$ = -٢ + ٣ت ، $ع_٣$ = $ع_١$-$ع_٢$ ثم أوجد مقياس وسعة $ع_٣$

- أوجد المقياس والسعة لكل من الأعداد الآتية:-

١٧) -٣ (جتا ٦٠° + ت جا ٦٠°)

١٨) ٤ (جتا ١٥٠° - ت جا ١٥٠°)

١٩) -٢ (جا ٢١٠° - ت جتا ٢١٠)

٢٠) ل (- جا هـ + ت جتا هـ)

ملاحظات هامة

مثال: عبر عن كل من الأعداد الآتية بالصورة المثلثية:-

١) ١ ٢) ت ٣) -١ ٤) -ت

الحل

١) ١+ ٠× ت ∴ س = ١ ، ص = ٠ ، ل = $\sqrt{١+٠}$ = ١

جتا هـ = $\frac{س}{ل}$ = $\frac{١}{١}$ = ١ ، جا هـ = $\frac{ص}{ل}$ = $\frac{٠}{١}$ = ٠

∴ هـ = ٠ ∴ ١ = ١× (جتا ٠ + ت جا ٠)

أي أن : ١= جتا٠ + ت جا ٠

٢) ت = ٠ + ١ × ت

∴ س = ٠ ، ص = ١ ، ل = $\sqrt{٠ + ١}$ = ١

، جتا هـ = $\frac{س}{ل}$ = $\frac{٠}{١}$ = ٠ ، جاهـ = $\frac{ص}{ل}$ = $\frac{١}{١}$ = ١

∴ هـ = ٩٠° = $\frac{ط}{٢}$ ∴ ت = ١ × (جتا $\frac{ط}{٢}$ + ت جا $\frac{ط}{٢}$)

أي أن : ت = جتا $\frac{ط}{٢}$ + ت جا $\frac{ط}{٢}$

٣) -١ = -١ + ٠ × ت ∴ س = -١ ، ص = ٠ ، ل = $\sqrt{١+٠}$ = ١

جتا هـ = $\frac{س}{ل}$ = $\frac{-١}{١}$ = -١ ، جا هـ = $\frac{ص}{ل}$ = $\frac{٠}{١}$ = ٠

∴ هـ = ١٨٠° = ط ∴ -١ = جتا ط + ت جا ط

أي أن : -١ = جتا ط + ت جا ط

٤) - ت = ٠ - ١ × ت ∴ س = ٠ ، ص = -١ ، ل = $\sqrt{٠+١}$ = ١

، جتا هـ = $\frac{س}{ل}$ = $\frac{٠}{١}$ = ٠ ، جا هـ = $\frac{ص}{ل}$ = $\frac{-١}{١}$ = -١

هـ = ٢٧٠° = $\frac{٣ط}{٢}$ ∴ - ت = ١× (جتا $\frac{٣ط}{٢}$ + ت جا $\frac{٣ط}{٢}$)

أي أن: - ت = جتا $\frac{٣ط}{٢}$ + ت جا $\frac{٣ط}{٢}$

الخلاصة:

١= جتا٠ + ت جا ٠ ت = جتا $\frac{ط}{٢}$ + ت جا $\frac{ط}{٢}$

-١ = جتا ط + ت جا ط - ت = جتا $\frac{٣ط}{٢}$ + ت جا $\frac{٣ط}{٢}$

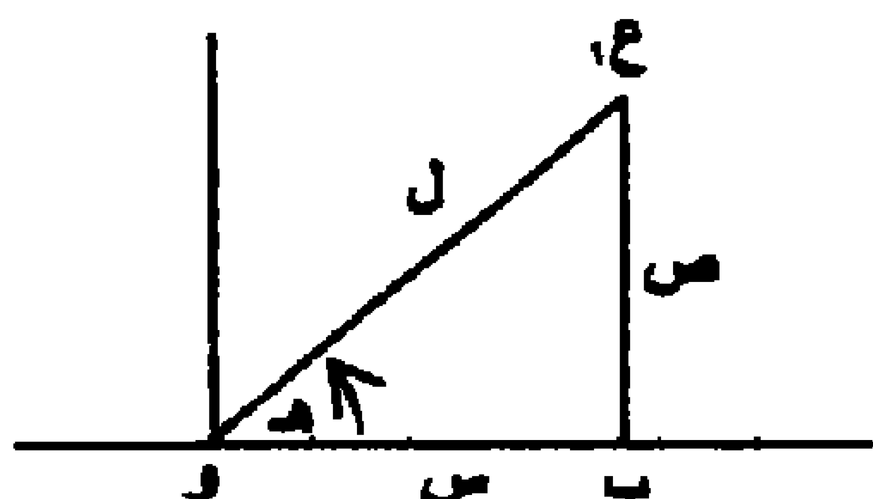
تحويل الصورة المثلثية الغير قياسية للعدد ع إلي الصورة المثلثية القياسية

ل (جتا هـ + ت جا هـ)

١) إذا كانت $ع_١$ = ل (جا هـ + ت جتا هـ)

∴ $\frac{س}{ل}$ = جا هـ ∴ $\frac{جاهـ}{ل}$ = جا هـ

، جتا هـ = $\frac{جتاهـ}{ل}$



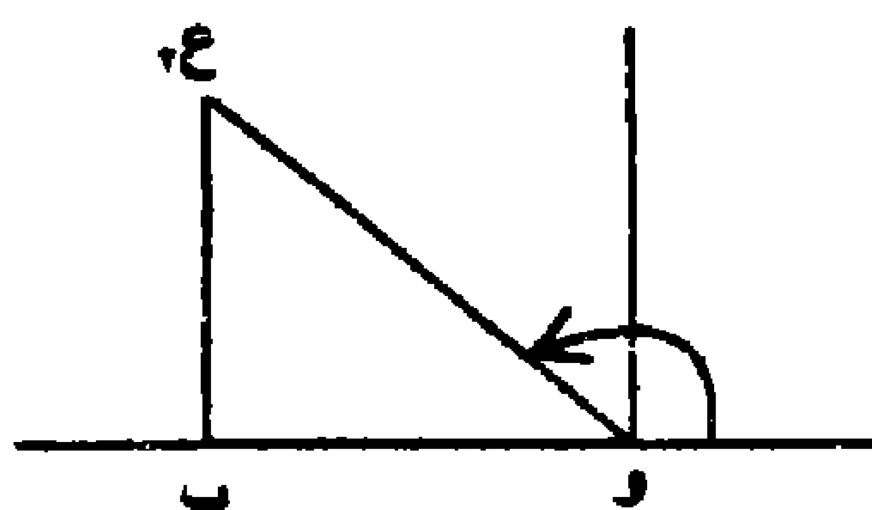
∴ السعة (هـ) في الربع الأول

∴ جا هـ ⟸ جتا هـ وذلك انتسابها للعدد $\frac{ط}{٢}$ = ٩٠°

∴ $ع_١$ = ل [جتا ($\frac{ط}{٢}$ - هـ) + ت جا ($\frac{ط}{٢}$ - هـ)]

٢) إذا كانت $ع_٢$ = ل (- جا هـ + ت جتا هـ)

∵ س = -   ، ص = +

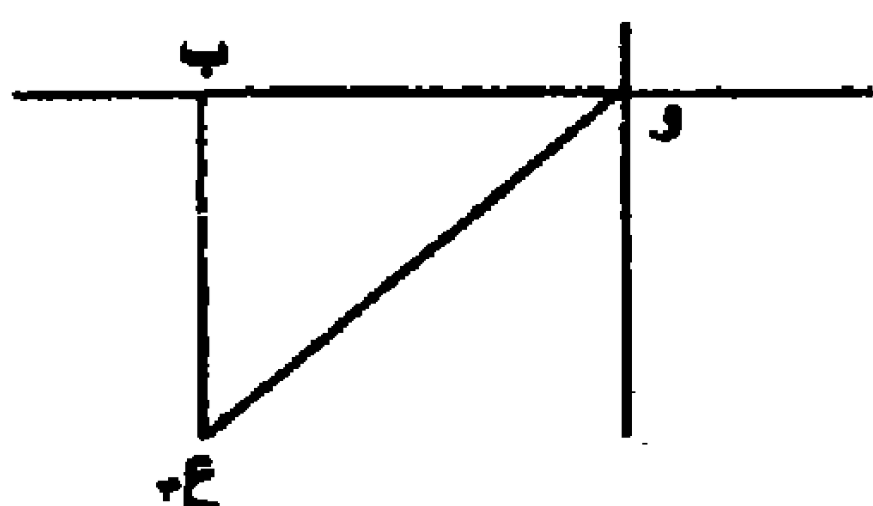


∴ العدد المركب يقع في الربع الثاني

∴ $ع_٢$ = ل [جتا ($\frac{ط}{٢}$ + هـ) + ت جا ($\frac{ط}{٢}$ + هـ)]

٣) إذا كانت $ع_٣$ = ل (- جا هـ - ت جتا هـ)

س= -   ، ص = -



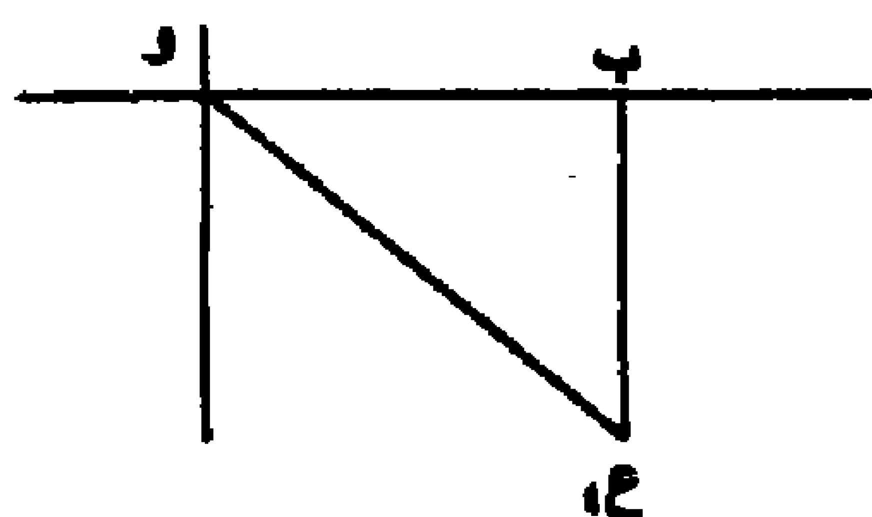
∴ العدد المركب يقع في الربع الثالث

∴ السعة تنسب للعدد $\frac{٣ط}{٢}$ = ٢٧٠°

∴ $ع_٣$ = ل [جتا ($\frac{٣ط}{٢}$ + هـ) + ت جا ($\frac{٣ط}{٢}$ + هـ)]

٤) إذا كانت $ع_٤$ = ل (جا هـ - ت جتا هـ)

س = +   ، ص = -



∴ العدد المركب يقع في الربع الرابع

∴ السعة تنسب للعدد ($\frac{٣ط}{٢}$ + هـ)

∴ $ع_٤$ = ل [جتا ($\frac{٣ط}{٢}$ + هـ) + ت جا ($\frac{٣ط}{٢}$ + هـ)]

الخلاصة : النسب المثلثية للعدد المركب وإشارتها غير مضبوطة وفي هذه الحالة تنسب الزوايا إلي $\frac{ط}{٢}$ ، $\frac{٣ط}{٢}$

- ل (- جتاهـ + ت جا هـ) = ل [جتا (ط ـ هـ) + ت جا (ط ـ هـ)]
- ل (- جتاهـ - ت جا هـ) = ل [جتا (ط + هـ) + ت جا (ط + هـ)]
- ل (جتاهـ - ت جا هـ) = ل [جتا (٢ط - هـ) + ت جا (٢ط - هـ)]

الخلاصة: النسب المثلثية للعدد المركب مضبوطة ولكن إشارتها غير مضبوطة

∴ تنسب الزوايا إلي ط ، ٢ ط

مثال: اكتب كل من الأعداد المركبة الآتية في الصورة القطبية الصحيحة:-

١) $ع_١$ = -٤ (جا ٣٠ ـ ت جا ٣٠)

٢) $ع_٢$ = -٢ (جا $\frac{١}{٤}$ ط ـ ت جتا $\frac{١}{٤}$ ط)

٣) $ع_٣$ = -٩ (جا $\frac{٥}{٣}$ ط + ت جتا $\frac{٥}{٣}$ ط)

الحـــل

١) $ع_١$ = -٤ [جتا (٩٠ ـ ٣٠) + ت جا(٩٠ ـ ٣٠)]

= -٤ [جتا ٦٠ + ت جا ٦٠] = ٤ (- جتا ٦٠ - ت جا ٦٠)

٢) $ع_٢$ = -٢ (جا $\frac{١}{٤}$ ط ـ ت جتا $\frac{١}{٤}$ ط)

= -٢ (جا ٤٥ ـ ت جتا ٤٥)

= -٢ [جتا (٩٠-٤٥) ـ ت جا (٩٠-٤٥)]

= -٢ (جتا ٤٥ ـ ت جا ٤٥)

= ٢ (جتا ٤٥ + ت جا ٤٥)

٣) $ع_٣$ = -٢ (جا $\frac{٥}{٣}$ ط ـ ت جتا $\frac{٥}{٣}$ ط)

= -٩ (جا ٣٠٠ ـ ت جتا ٣٠٠)

= -٩ [جا (٣٦٠-٦٠) + ت جتا (٣٦٠-٦٠)]

= -٩ (جا ٦٠ + ت جتا ٦٠)

= ٩ (- جا ٦٠ + ت جتا ٦٠) = ٩ (- جتا ٣٠ ـ ت جا ٣٠)

لأن ٦٠ تتم ٣٠°

- حقائق هندسية:

جا (أ + ب) = جا أ جتا ب + جتا أ حا ب

جتا (أ+ ب) = جتا أ جتا ب – جا أ جا ب

جا (أ – ب) = جا أ جتا ب – جتا أ جا ب

جتا (أ – ب) = جتا أ جتا ب + جا أ جا ب

جا٢أ = ٢ جا أ جتا أ ⇐ جا أ = ٢ جا $\frac{أ}{٢}$ جتا $\frac{أ}{٢}$

جتا ٢أ = جتا^{٢} أ – جا^{٢} أ ⇐ جتا أ = جتا^{٢} $\frac{أ}{٢}$ - جا^{٢} $\frac{أ}{٢}$

= ٢ جتا^{٢} أ – ١ = ٢ جتا^{٢} $\frac{أ}{٢}$ - ١

= ١ – ٢ جا^{٢} أ = ١- ٢ حا^{٢} $\frac{أ}{٢}$

أولاً : المقياس والسعة لحاصل ضرب عددين مركبين

مقياس (حاصل ضرب عددين مركبين) = حاصل ضرب مقياسهما
سعـــة (حاصل ضرب عددين مركبين) = مجموع سعتيهما

إذا كان ع$_{١}$ = ل$_{١}$ (جتاهـ$_{١}$ + ت جا هـ$_{١}$)

ع$_{٢}$ = ل$_{٢}$ (جتاهـ$_{٢}$ + ت جا هـ$_{٢}$)

∴ ع$_{١}$ ع$_{٢}$ = ل$_{١}$ ل$_{٢}$ [جتا (هـ$_{١}$+ هـ$_{٢}$) + ت جا (هـ$_{١}$+ هـ$_{٢}$)]

نتيجة(١):

إذا كان ع = ل (جتا هـ + ت حا هـ)

∴ ع^{٢} = ل^{٢} (جتا ٢ هـ + ت ج ٢ هـ)

نتيجة(٢):

إذا كان ع = ل (جتا هـ + ت جاهـ) ، ن عدد صحيح موجب فإن

ع^{ن} = ل^{ن} (جتا ن هـ + ت جا ن هـ)

ناتج قسمة عدد مركب على آخر

$\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{ل_1}{ل_2}$ [جتا (هـ١ - هـ٢) + ت جا (هـ١ - هـ٢)]

∴ خارج قسمة عددين مركبين هو عدد مركب

فمثلاً: إذا كان $ع_1$ = ٣ (جتا ٧٥ + ت جا ٧٥)

$ع_2$ = ٢ (جتا ٤٥ + ت جا ٤٥)

فإن : $\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{٣}{٢}$ [جتا (٧٥-٤٥) + ت جا(٧٥-٤٥)]

= $\frac{٣}{٢}$ (جتا ٣٠ + ت جا ٣٠)

، $\frac{ع_2}{ع_1} = \frac{٢}{٣}$ [جتا (٤٥-٧٥) + ت جا(٤٥-٧٥)]

= $\frac{٢}{٣}$ (جتا -٣٠ + ت جا -٣٠)

= $\frac{٢}{٣}$ (جتا ٣٣٠ + ت جا ٣٣٠)

نتيجة: إذا كان ع = ل (جتا هـ + ت جا هـ) فإن

$\frac{١}{ع} = \frac{١}{ل}$ [جتا (- هـ) + ت جا (- هـ)]

أما $\bar{ع}$ = ل (جتا (- هـ) + ت جا (- هـ)

فمثلاً: ع = ٢ (جتا ٤٥ + ت جا ٤٥)

∴ $\frac{١}{ع} = \frac{١}{٢}$ [جتا (- ٤٥) + ت جا (-٤٥)]

= $\frac{١}{٢}$ (جتا ٤١٥ + ت جا ٤١٥)

ملاحظة هامة

إذا كان $ع_1 = ل_1$ (جتا هـ١ + ت جا هـ١)

$ع_2 = ل_2$ (جتا هـ٢ + ت جا هـ٢)

$ع_3 = ل_3$ (جتا هـ٣ + ت جا هـ٣)

فإن : $\frac{ع_1 ع_2}{ع_3} = \frac{ل_1 ل_2}{ل_3}$ [جتا (هـ١ + هـ٢ - هـ٣) + ت جا (هـ١ + هـ٢ - هـ٣)]

مثال:
إذا كان $ع_١ = ٦$ (جتا ٧٠ + ت جا ٧٠) ، $ع_٢ = ٣$(جتا ٤٠ + ت جا ٤٠) فأوجد $\frac{ع_١}{ع_٢}$ ثم ضع الناتج علي صورة زوج مرتب .

الحـــــل

، $\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{ل_١}{ل_٢}$ [جتا ($هـ_١ - هـ_٢$) + ت جا ($هـ_١ - هـ_٢$)]

$= \frac{٦}{٣}$ [جتا (٧٠ - ٤٠) + ت جا (٧٠ - ٤٠)] = ٢ (جتا ٣٠ + ت جا ٣٠)

$= ٢ (\frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢}ت) = \sqrt{٣} + ت = (\sqrt{٣} ، ١)$

مثال: ضع العدد (١ - ت) علي الصورة المثلثية ثم أوجد قيم $(١ - ت)^٦$

الحـــــل

س = ١ ، ص = ١ ، $ل = \sqrt{١+١} = \sqrt{٢}$

جتا هـ $= \frac{س}{ل} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، جا هـ $= \frac{ص}{ل} = - \frac{١}{\sqrt{٢}}$

∴ هـ = ٣٦٠ – ٤٥ = ٣١٥

$١ - ت = \sqrt{٢}$ (جتا ٣١٥ + ت جا ٣١٥)

$(١ - ت)^٦ = (\sqrt{٢})^٦$ (جتا ٦× ٣١٥ + ت جا ٦× ٣١٥)

= ٨ (جتا ١٨٩٠ + ت جا ١٨٩٠)

= ٨ (جتا ٩٠ + ت جا ٩٠) = ٨ ت

مثال: إذا كان $ع_١ = ل_١$(جتا (أ + ب) + ت جا (أ + ب) ، $ع_٢ = ل_٢$(جتا (أ - ب) + ت جا (أ - ب)
أوجد $ع_١ ع_٢$

الحـــــل

$ع_١ ع_٢ = ل_١ ل_٢$ (جتا ٢أ + ت جا ٢أ)

مثال: أوجد الصورة المثلثية لحاصل ضرب $ع_١ ع_٢$ إذا كان :

$ع_١ = -$ جا ٢٤٠ – ت جتا ٢٤٠ ، $ع_٢ = ٧$(جا ١٢٠ - ت جتا ١٢٠)

الحـــــل

ع$_1$ = جا ٦٠ + ت جتا ٦٠ = جتا ٣٠ + ت جا ٣٠

ع$_2$ = ٧ (جا ٦٠ + ت جتا ٦٠) = ٧ (جتا ٣٠ + ت جا ٣٠)

∴ ع$_1$ ع$_2$ = ٧ (جتا ٦٠ + ت جا ٦٠)

∴ مقياس ع$_1$ ع$_2$ يساوي ٧ سعة ع$_1$ ع$_2$ = ٦٠°

<u>مثال</u>: إذا كان ع$_1$ = - ٣٠ (جتا هـ + ت جا هـ) ، ع$_2$ = ٥ (جتا هـ - ت جا هـ) أوجد $\frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2}$

الحـــــل

ع$_1$ = ٣٠ (- جتا هـ - ت جا هـ)

= ٣٠ [جتا (ط + هـ) + ت جا (ط + هـ)]

ع$_2$ = ٥ [جتا (- هـ) + ت جا (- هـ)]

∴ $\frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2}$ = ٦ [جتا (ط + ٢ هـ) + ت جا (ط + ٢ هـ)]

<u>مثال</u>: اختصر لأبسط صورة : $\frac{(\text{جتا } \frac{\text{ط}}{٤} + \text{ت جا } \frac{\text{ط}}{٤})^{٦} \, (\text{جتا } \frac{\text{ط}}{٣} + \text{ت جا } \frac{\text{ط}}{٣})^{٥}}{(\text{جتا } \frac{\text{ط}}{٦} + \text{ت جا } \frac{\text{ط}}{٦})^{٤}}$

الحـــــل

$\frac{(\text{جتا } \frac{٣\text{ط}}{٢} + \text{ت جا } \frac{٣\text{ط}}{٢}) \, (\text{جتا } \frac{٥\text{ط}}{٣} + \text{ت جا } \frac{٥\text{ط}}{٣})}{(\text{جتا } \frac{٢\text{ط}}{٣} + \text{ت جا } \frac{٢\text{ط}}{٣})}$

= جتا ($\frac{٣\text{ط}}{٢}$ + $\frac{٥\text{ط}}{٣}$ - $\frac{٢\text{ط}}{٣}$) + ت جا ($\frac{٣\text{ط}}{٢}$ + $\frac{٥\text{ط}}{٣}$ - $\frac{٢\text{ط}}{٣}$)

= جتا $\frac{٥\text{ط}}{٢}$ + ت جا $\frac{٥\text{ط}}{٢}$ = ت

<u>مثال</u>: إذا كان ع$_1$ = ١٠٠ (جتا هـ + ت جا هـ) ، ع$_2$ = $\frac{١}{٢٠}$ (جا ٢ هـ + ت جتا ٢ هـ)
حيث ظا هـ = $\frac{٣}{٤}$ ، هـ ∈] ٠ ، ٩٠ [أوجد الصورة المثلثية والصورة الجبرية لحاصل الضرب ع$_1$ ع$_2$.

الحـــــــل

$ع_٢ = \frac{١}{٢٠}$ [جتا (٩٠-٢هـ) + ت(٩٠-٢هـ)]

$ع_١ ع_٢ = ١٠٠ \times \frac{١}{٢٠}$ [جتا (هـ+٩٠-٢هـ) + ت جا (هـ+٩٠-٢هـ)]

= ٥ [جتا (٩٠- هـ) + ت جا (٩٠- هـ)]

= ٥ [جا هـ + ت جا هـ)

= ٥ $[\frac{٣}{٥} + \frac{٤}{٥}$ ت] = ٣ + ٤ ت وهي الصورة الجبرية

<u>مثال</u>: أوجد قيمة $(\frac{١-ت}{١+ت})^٤$

الحـــــــل

$\frac{١-ت}{١+ت} \times \frac{١-ت}{١-ت} = \frac{١-٢ت+ت^٢}{١-ت^٢} = \frac{-٢ت}{١+١} = -ت$

$\therefore (\frac{١-ت}{١+ت})^٤ = (-ت)^٤ = ١$

<u>مثال</u>: إذا كان $ع_١$ = ١٠(جتا ٣١٠+ت جا ٣١٠) ، $ع_٢$ = ٥(جتا١٠٠+ت جا ١٠٠)

أوجد الصورة المثلثية والجبرية لكل من $\frac{ع_١}{ع_٢}$ ، $\frac{ع_٢}{ع_١}$

الحـــــــل

$\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{١٠}{٥}$ [جتا (٣١٠-١٠٠) + ت جا (٣١٠-١٠٠)]

= ٢ [جتا ٢١٠ + ت جا ٢١٠]

= ٢[- جتا٣٠- ت جا ٣٠] الصورة المثلثية

= ٢ $[-\frac{\sqrt{٣}}{٢} - ت \times \frac{١}{٢}] = -\sqrt{٣} - ت$ الصورة الجبرية

$\frac{ع_٢}{ع_١} = \frac{١}{٢}$ [جتا (-٢١٠) + ت جا (-٢١٠)]

= $\frac{١}{٢}$ [جتا ١٥٠ + ت جا ١٥٠]

= $\frac{١}{٢}$ [- جتا٣٠+ت جا ٣٠] الصورة المثلثية

= $\frac{١}{٢}$ $[-\frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢}$ ت] = $-\frac{\sqrt{٣}}{٤} + \frac{١}{٤}$ت الصورة الجبرية

مثال: ضع كل من العددين $\sqrt{2}$ ت ، ١+ ت على الصورة المثلثية ثم أوجد $\left(\frac{\sqrt{2}\,ت}{1+ت}\right)^8$

الحـــــل

$\sqrt{2}$ ت = $\sqrt{2}$ (جتا $\frac{ط}{2}$ + ت جا $\frac{ط}{2}$)

١+ ت = $\sqrt{2}$ (جتا $\frac{ط}{4}$ + ت جا $\frac{ط}{4}$)

= جتا ($\frac{ط}{4}$) + ت جا $\frac{ط}{4}$

$\left(\frac{\sqrt{2}\,ت}{1+ت}\right)^8$ = جتا ٢ ط + ت جا ٢ ط = ١ + ت × ٠ = ١

تمارين (٩)

■ **أوجد الصورة المثلثية لكل من $ع_1$ $ع_2$ ، $ع_1$ ÷ $ع_2$ في كل مما يأتي :-**

(١) $ع_1$ = ٦(جتا $\frac{ط}{3}$ + ت جا $\frac{ط}{3}$) ، $ع_2$ = ٢ (جتا $\frac{ط}{3}$ + ت جا $\frac{ط}{3}$)

(٢) $ع_1$ = ٨(جتا $\frac{ط}{4}$ + ت جا $\frac{ط}{4}$) ، $ع_2$ = ٤ (جتا $\frac{ط}{2}$ - ت جا $\frac{ط}{2}$)

(٣) $ع_1$ = ١٠(جتا ٣٠٠° - ت جا ٣٠٠°) ، $ع_2$ = ٤ (جا ٣٠٠° – ت جتا ٣٠٠°)

(٤) $ع_1$ = $ل_1$(جتاهـ + ت جاهـ) ، $ع_2$ = $ل_2$ (جتاهـ - ت جاهـ)

■ **أوجد الصور المثلثية لكل من $ع^2$ ، في كل مما يأتي:-**

(٥) ع = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (جتا $\frac{3ط}{2}$ + ت جا $\frac{3ط}{2}$)

(٦) ع = $\frac{1}{2}$ (جا أ – ت جتا أ)

(٧) أكتب الصورة المثلثية لكل من العددين المركبين :

$ع_1$ = $\frac{1}{2}$ (-١ + ت $\sqrt{3}$) ، $ع_2$ = $\frac{1}{2}$ (-١ - ت $\sqrt{3}$) ثم أثبت أن :

أولاً: $ع_1^2$ = $ع_2$ **ثانياً:** $ع_2^2$ = $ع_1$ **ثالثاً:** $ع_1^3$ = $ع_2^3$ = ١

(٨) إذا كان $ع_1$ = ٤(جتا ٣هـ - ت جا٣هـ) ، $ع_2$ = -٢(جتا هـ - ت جا هـ) حيث هـ ∈]١٨٠، ٢٧٠[

، طا هـ = $\frac{1}{2}$ فأوجد الصورة المثلثية والصورة الجبرية لخارج القسمة $\frac{ع_1}{ع_2}$

(٩) إذا كان س = $\sqrt{3}$ + ت ، ص = ١ - ت فأوجد الصورة المثلثية لكل من س ، ص ،

$ص^2$ ÷ $س^2$

(١٠) اختصر لأبسط صورة $\frac{(جتا \frac{ط}{6} + ت جا \frac{ط}{6})^6 \ (جتا \frac{ط}{4} + ت جا \frac{ط}{4})^5}{(جتا \frac{ط}{3} + ت جا \frac{ط}{3})^2}$

نظرية ديموافر

- إذا كان ن عددا نسبيا فإن : (جتا هـ + ت جا هـ)^{ن} = جتا هـ + ت جا ن هـ
- إذا كان ن عدد صحيح موجب أو سالب فإن:

(جتا هـ + ت جا هـ) ^{ن} = [جتا (هـ + ٢ رط) + ت جا (هـ+ ٢رط)]^{ن}

= جتا ن هـ + ت جا ن هـ

- إذا كان ن كسر حقيقي وليكن ن = $\frac{١}{ك}$ (جتا هـ + ت جا هـ)$^{\frac{١}{ك}}$

= جتا $\frac{هـ + ٢ رط}{ك}$ + ت جا $\frac{هـ + ٢ رط}{ك}$

لذلك المقدار (جتا هـ + ت جا هـ)$^{\frac{١}{ك}}$ له ك من القيم المختلفة نحصل عليها بالتعويض في المقدار (جتا $\frac{هـ + ٢ رط}{ك}$ + ت جا $\frac{هـ + ٢ رط}{ك}$) عن ر = ٠، ١، ٢،..... إلي (ك - ١)

مثال: اختصر الاتي: (جتا $\frac{٣ ط}{٤}$ + ت جا $\frac{٣ ط}{٤}$)^{٤}

الحـــــل

(جتا $\frac{٣ ط}{٤}$ + ت جا $\frac{٣ ط}{٤}$)^{٤} = جتا $\frac{٣ ط}{٤}$ × ٤ + ت جا $\frac{٣ ط}{٤}$ × ٣

= جتا ٣ ط + ت جا ٣ ط

= -١ + ت × ٠ = -١

مثال: اثبت ان $\frac{(\text{جتا } \frac{ط}{٦} + \text{ت جا } \frac{ط}{٦})^{٥} \; (\text{جتا } \frac{ط}{٣} + \text{ت جا } \frac{ط}{٣})^{٤}}{(\text{جتا } \frac{٥ط}{٦} + \text{ت جا } \frac{٥ط}{٦})^{٢}}$ = ت

الحـــــل

$\frac{(\text{جتا } \frac{ط}{٦} + \text{ت جا } \frac{ط}{٦})^{٥} \; (\text{جتا } \frac{ط}{٣} + \text{ت جا } \frac{ط}{٣})^{٤}}{(\text{جتا } \frac{٥ط}{٦} + \text{ت جا } \frac{٥ط}{٦})^{٢}}$

= $\frac{(\text{جتا } \frac{٥ط}{٦} + \text{ت جا } \frac{٥ط}{٦}) \; (\text{جتا } \frac{٤ط}{٣} + \text{ت جا } \frac{٤ط}{٣})}{(\text{جتا } \frac{٥ط}{٣} + \text{ت جا } \frac{٥ط}{٣})}$

$$= \frac{\text{جتا}\left(\frac{5\text{ط}}{6}+\frac{4\text{ط}}{3}\right)+\text{ت جا}\left(\frac{5\text{ط}}{6}+\frac{4\text{ط}}{3}\right)}{\text{جتا}\frac{5\text{ط}}{3}+\text{ت جا}\frac{5\text{ط}}{3}} = \frac{\text{جتا}\frac{13\text{ط}}{6}+\text{ت جا}\frac{13\text{ط}}{6}}{\text{جتا}\frac{5\text{ط}}{3}+\text{ت جا}\frac{5\text{ط}}{3}}$$

$$= \text{جتا}\left(\frac{13\text{ط}}{6}-\frac{5\text{ط}}{3}\right)+\text{ت جا}\left(\frac{13\text{ط}}{6}-\frac{5\text{ط}}{3}\right)$$

$$= \text{جتا}\frac{\text{ط}}{2}+\text{ت جا}\frac{\text{ط}}{2} = 0+\text{ت}+1=\text{ت}$$

<u>مثال</u>: أثبت أن: $\frac{\text{ت}}{\left(\text{جتا}\frac{\text{ط}}{6}-\text{ت جا}\frac{\text{ط}}{6}\right)^{7}} = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{3}\,\text{ت}\right)$

الحـــــــل

$$\text{الطرف الأيمن} = \frac{\text{ت}}{\left(\text{جتا}\frac{\text{ط}}{6}-\text{ت جا}\frac{\text{ط}}{6}\right)^{7}} = \frac{\text{ت}}{\left[\text{جتا}\left(-\frac{\text{ط}}{6}\right)+\text{ت جا}\left(-\frac{\text{ط}}{6}\right)\right]^{7}}$$

$$= \frac{\text{ت}}{\text{جتا}\left(-\frac{7\text{ط}}{6}\right)+\text{ت جا}\left(-\frac{7\text{ط}}{6}\right)} = \frac{\text{ت}}{\text{جتا}\frac{7\text{ط}}{6}-\text{ت جا}\frac{7\text{ط}}{6}}$$

$$= \frac{\text{ت}}{\text{جتا}\,210^{\circ}-\text{ت جا}\,210^{\circ}} = \frac{\text{ت}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\text{ت}} = \frac{2\text{ت}}{-\sqrt{3}+\text{ت}}$$

$$= \frac{2\text{ت}}{-\sqrt{3}+\text{ت}} \cdot \frac{-\sqrt{3}-\text{ت}}{-\sqrt{3}-\text{ت}}$$ بالضرب في مرافق المقام

$$= \frac{2\left(1-\sqrt{3}\,\text{ت}\right)}{4} = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{3}\,\text{ت}\right) = \text{الطرف الأيسر}$$

<u>مثال</u>: باستخدام نظرية ديموافر عبر عن كل من : جا٣هـ ، جتا ٣هـ بدلالة قوى جاهـ ، جتا هـ

الحـــــــل

الفكرة: نكتب العدد الذي مقياسه = ١ ، سعته = ٣ هـ على صورة ديموافر

∵ جتا ٣هـ + ت جا٣هـ = $(\text{جتاهـ} + \text{ت جا هـ})^3$

بفك الطرف الأيسر بنظرية ذات الحدين

= جتا^3 هـ + ٣ جتا^{2}هـ (ت جاهـ) + ٣ جتا هـ (ت جاهـ)^2 + (ت جاهـ)^3

= جتا^3 هـ + ٣ جتا^{2}هـ جتا^2 هـ ت – ٣جا^2 هـ جتاهـ - ت جا^3 هـ

= (جتا^3 هـ - ٣جا^{2}هـ جتا هـ) + (٣جاهـ جتا^2 هـ - جا^{3}هـ) ت

وبمساواة الحقيقي بالحقيقي والتخيلي بالتخيلي

∴ جتا٣هـ = جتا^{٣}هـ - ٣جا^{٢}هـ جتا هـ

= جتا^{٣}هـ - ٣(١ - جتا^{٢}هـ) جتا هـ

= جتا^{٣}هـ - ٣جتاهـ + ٣جتا^{٣}هـ

= ٤جتا^{٣}هـ - ٣ جتا هـ

، جا٣هـ = ٣جاهـ جتا^{٢}هـ - جا^{٣} هـ

= ٣جاهـ (١ - جا^{٢}هـ) – جا^{٣} هـ

= ٣جاهـ - ٤جا^{٣}هـ

<u>**مثال:**</u> **باستخدام نظرية ديموافر أو جد قيمة كل من جتا ٢هـ ، جا٢هـ بدلالة النسب المثلثية للزواية هـ .**

الحــــــــل

من ديموافر (جتا هـ + ت جاهـ)^{٢} = جتا ٢هـ + ت جا٢هـ ----- (١)

، جبرياً (جتا هـ + ت جاهـ)^{٢} = جتا^{٢}هـ + ت^{٢} جا^{٢}هـ + ٢جاهـ جتاهـ ت

= جتا^{٢}هـ - جا^{٢}هـ + ٢جاهـ جتاهـ ت

= (جتا^{٢}هـ - جا^{٢}هـ) + ٢جاهـ جتاهـ ت---- (٢)

من(١) ، (٢) واستخدام خصائص تساوي عددين مركبين

∴ جتا٢هـ+ ت جا ٢هـ = (جتا^{٢}هـ - جا^{٢}هـ) + ٢جاهـ جتاهـ ت

∴ جتا٢هـ = جتا^{٢}هـ - جا^{٢}هـ ، جا٢هـ = ٢جاهـ جتاهـ ت

<u>**مثال:**</u> **إذا كان ع$_{١}$ = ٢(جتا هـ + ت جاهـ) ، ع$_{٢}$ = ٤(جتا٢هـ + ت جا٢هـ)**

ع$_{٣}$ = $\frac{١}{٢}$ (جتا$\frac{هـ}{٢}$ + ت جا$\frac{هـ}{٢}$) أوجد الصورة الجبرية للعدد: $\frac{ع_{١}^{٥} \times ع_{٢}^{-٣}}{ع_{٣}}$

علماً بأن هـ ∈]٠ ، ٩٠[، ظا هـ = $\frac{٣}{٤}$

الحــــــــل

ع$_{١}^{٥}$ = ٢^{٥} (جتا ٥هـ + ت جا٥هـ) ---- (١)

، ع$_{٢}^{-٣}$ = ٤$^{-٣}$ [جتا(-٦هـ) + ت جا(-٦هـ)]

= ٢$^{-٦}$ [جتا(-٦هـ) + ت جا (-٦هـ)] ---- (٢)

ع${}_3^2$ = ($\frac{1}{2}$)^2 [جتاهـ + ت جا هـ] ----- (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣)

$\frac{ع_1^5 \times ع_2^{-3}}{ع_3}$ = $\frac{2^5 \times 2^{-10}}{(\frac{1}{2})^2}$ [جتا(٥هـ ٦هـ - هـ) + ت جا(٥هـ ٦هـ هـ)]

= ٢[جتا(-٢هـ) + ت جا (-٢هـ)] ---- (٤)

، ∵ طاهـ = $\frac{3}{4}$ ، هـ ∈] ٠ ، ٩٠[

∴ جتا (-٢هـ) = جتا ٢هـ = ٢جتا^2 هـ -١

= ٢× ($\frac{4}{5}$)^2 -١ = $\frac{32}{25}$ -١ = $\frac{7}{25}$

، جا(-٢هـ) = - جا٢هـ = -٢جاهـ جتاهـ

= -٢× $\frac{3}{5}$ × $\frac{4}{5}$ = - $\frac{24}{25}$

، بالتعويض في (٤) ينتج أن :-

$\frac{ع_1^5 \times ع_2^{-3}}{ع_3}$ = ٢($\frac{7}{25}$ - $\frac{24}{25}$ ت) = $\frac{14}{25}$ - $\frac{48}{25}$ ت

<u>**مثال**</u>**: أوجد المقياس والسعة للعدد المركب ع = (١+ جتاأ + ت جاأ)^5**

الحـــــــــل

نضع ١+ جتا أ + ت جا أ في الصورة القطبية

∵ ١+ جتا أ = ٢ جتا^2 $\frac{أ}{2}$ ، جا أ = ٢ جا $\frac{أ}{2}$ جتا $\frac{أ}{2}$

∴ ١+ جتا أ + ت جا أ = ٢ جتا^2 $\frac{أ}{2}$ + ت × ٢ جا $\frac{أ}{2}$ جتا $\frac{أ}{2}$

= ٢ جتا $\frac{أ}{2}$ (جتا $\frac{أ}{2}$ + ت جا $\frac{أ}{2}$)

∴ ع^5 = ٢^5 جتا^5 $\frac{أ}{2}$ (جتا٥ × $\frac{أ}{2}$ + ت جا ٥ × $\frac{أ}{2}$)

∴ | ع | = ٣٢ جتا^5 $\frac{أ}{2}$ ، سعة العدد = $\frac{5أ}{2}$

مثال: اختصر العدد الآتي إلي الصورة الجبرية :-

$$ع = \frac{\left(\text{جتا}\frac{ط}{٣} + \text{ت جا}\frac{ط}{٣}\right)^{٥} \times \left(\text{جتا}\frac{ط}{٤} + \text{ت جا}\frac{ط}{٤}\right)^{٣}}{\left(\text{جتا}\frac{ط}{٦} + \text{ت جا}\frac{ط}{٦}\right)^{٧}}$$

الحـــــــل

بتطبيق نظرية ديموافر علي البسط والمقام

$$\therefore ع = \frac{\left(\text{جتا}\frac{٥}{٣}ط + \text{ت جا}\frac{٥}{٣}ط\right) \times \text{جتا}\left(\frac{٣}{٤}ط + \text{ت جا}\frac{٣}{٤}ط\right)}{\text{جتا}\left(\frac{٧}{٦}ط\right) + \text{ت جا}\left(\frac{٧}{٦}ط\right)}$$

$$= \left[\text{جتا}\left(\frac{٥}{٣}ط + \frac{٣}{٤}ط - \frac{٧}{٦}ط\right) + \text{ت جا}\left(\frac{٥}{٣}ط + \frac{٣}{٤}ط - \frac{٧}{٦}ط\right)\right]$$

$$= \text{جتا}\frac{٥}{٤}ط + \text{ت جا}\frac{٥}{٤}ط = \text{جتا } ٢٢٥ + \text{ت جا } ٢٢٥$$

$$= \text{جتا}\left(١٨٠ + ٤٥\right) + \text{ت جا}\left(١٨٠ + ٤٥\right)$$

$$= -\frac{١}{٢}\sqrt{٢} - \frac{١}{٢}\sqrt{٢}\ ت = -\frac{١}{٢}\sqrt{٢}\left(١ + ت\right)$$

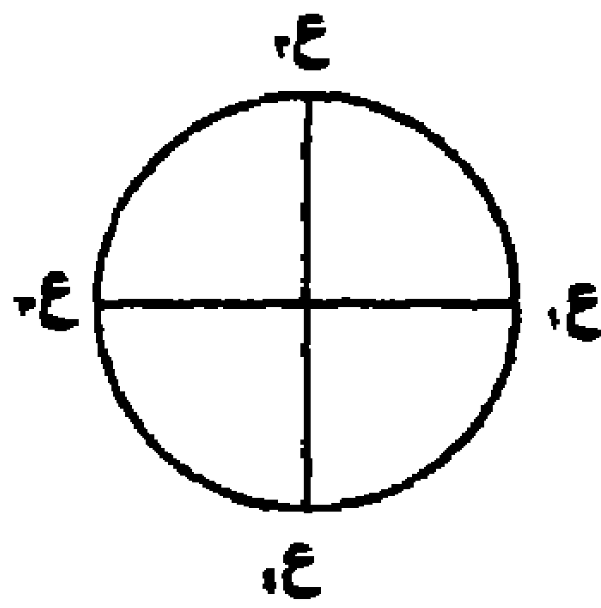
استخدام نظرية ديموافر لايجاد جذور الأعداد المركبة

إذا كان العدد المركب ع = ل(جتا هـ + ت جا هـ) ، ن عدد صحيح موجب فإن ع له ن من الجذور المختلفة التي تعطي بالقانون :

$$ع^{\frac{1}{ن}} = ل^{\frac{1}{ن}} [جتا \frac{هـ + ٢ ك ط}{ن} + ت جا \frac{هـ + ٢ ك ط}{ن}] ، ك = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ....$$

مثال: للمعادلة $س^٤ = ١$ أربعة جذور أحدهما $ر_١$ = جتا. + ت جا.) أوجد الجذور الأخري.

الحـــــل



∴ $س^٤ = ١$

∵ $ع_١$ = جتا. + ت جا.

لإيجاد بقية الجذور يضاف لكل زاوية ($\frac{٣٦٠}{٤} = ٩٠$)

∴ $ع_٢$ = جتا ٩٠ + ت جا٩٠

$ع_٣$ = جتا١٨٠ + ت جا١٨٠

$ع_٤$ = جتا ٢٧٠ + ت جا ٢٧٠

مثال: ضع العدد المركب ـ ٨ + ٨ $\sqrt{٣}$ ت في الصورة ر(جتاهـ + ت جاهـ)

ثم أوجد $\sqrt[٤]{٨+٨\sqrt{٣} ت}$

الحـــــل

ـ ٨ + ٨ $\sqrt{٣}$ ت = ر(جتاهـ + ت جا هـ)

س = ـ ٨ ، ص = ٨ $\sqrt{٣}$ ∴ ر = $\sqrt{٦٤ + ٦٤ \times ٤}$ = ١٦

∴ طا هـ = | $\frac{س}{ص}$ | = | $\frac{٨\sqrt{٣}}{٨ -}$ | = $\sqrt{٣}$ ∴ هـ = ٦٠° وتقع في الربع الثاني

∴ هـ = ١٨٠ ـ ٦٠ = ١٢٠

∴ ـ ٨ + ٨ $\sqrt{٣}$ ت = ١٦ (جتا ١٢٠ + ت جا ١٢٠)

لإيجاد الجذر الرابع فقط لابد من ايجاد الجذر الأول

$ع_1 = \sqrt[4]{16}$ [جتا $\frac{120}{4}$ + ت جا $\frac{120}{4}$] = ٢ [جتا ٣٠ + ت جا ٣٠]

$ع_2$ = ٢[جتا (٣٠ + ٢٧٠) + ت جا(٣٠ + ٢٧٠)] = ٢[جتا ٣٠٠ + ت جا٣٠٠]

<u>مثال</u>: أثبت أن (١+ت)^{٢٠} = - ١٠٢٤ حيث ت = $\sqrt{-1}$

الحـــــل

(١+ت)^{٢٠} = [(١ + ت)^{٢}]^{١٠}

= (١- ١+ ٢ت)^{١٠} = (٢ت)^{١٠}

= ٢^{١٠} × ت^{١٠} = ١٠٢٤ × ت^{٢} = ١٠٢٤ × -١ = - ١٠٢٤

<u>مثال</u>: أوجد الجذور الخمسة للعدد ٣٢

الحـــــل

٣٢ × ١ = ٣٢ [جتا . + ت جا.]

∴ $ع_1 = \sqrt[5]{32}$ [جتا $\frac{٠}{٥}$ + ت جا $\frac{٠}{٥}$] = ٢ [جتا ٠ + ت جا ٠]

لإيجاد بقية الجذور يضاف لكل زاوية علي التتابع $\frac{٣٦٠}{٥}$ = ٧٢

$ع_2$ = ٢ [جتا٧٢ + ت جا ٧٢]

$ع_3$ = ٢[جتا١٤٤ + ت جا ١٤٤]

$ع_4$ = ٢ [جتا ٢١٦ + ت جا ٢١٦]

$ع_5$ = ٢ [جتا٢٨٨ + ت جا ٢٨٨]

<u>مثال</u>: إذا كانت س = ١+ ت فحول س إلى الصورة المثلثية ثم أوجد قيمة س^{١٠}

الحـــــل

س = ١+ ت

ر = $\sqrt{1+1}$ = ٢

طاهـ = $\frac{١}{١}$ = ١ ∴ هـ = ٤٥°

س = $\sqrt{٢}$ (جتا ٤٥ + ت جا٤٥)

س^{١٠} = [$\sqrt{٢}$ (جتا ٤٥ + ت جا ٤٥)]^{١٠} = ($\sqrt{٢}$)^{١٠} (جتا ٤٥٠ + ت جا٤٥٠)

= ٢^{5} (جتا٩٠ + ت جا٩٠) = ٣٢ ت

إيجاد الجذرين التربيعيين للعدد المركب

لكل عدد مركب ع = ل (جتاهـ + ت جاهـ) يوجد جذران تربيعيان مقياس كل منهما = $\sqrt{ل}$

وسعة الأولي = $\frac{هـ}{٢}$ وسعة الثاني = ($\frac{هـ}{٢}$ + ط)

أي الجذران هما

$\sqrt{ل}$ (جتا $\frac{هـ}{٢}$ + ت جا $\frac{هـ}{٢}$) ، $\sqrt{ل}$ [جتا ($\frac{هـ}{٢}$ + ط) + ت جا ($\frac{هـ}{٢}$ + ط)]

مثال: أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ع = -٢ + ٢ $\sqrt{٣}$ ت بتحويله إلي الصورة القطبية

الحـــــل

نضع العدد ع بالصورة القطبية

|ع| = $\sqrt{(-٢)^٢ + (٢\sqrt{٣})^٢}$ = $\sqrt{٤ + ١٢}$ = ٤ = ل

جتا ي = | $\frac{س}{ل}$ | = $\frac{٢}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$ ∴ ي = ٦٠°

∵ ع = (-٢ ، ٢ $\sqrt{٣}$) تقع في الربع الثاني ∴ هـ = ١٨٠ - ٦٠ = ١٢٠

∴ ع = ٤ (جتا ١٢٠ + ت جا ١٢٠)

∴ $\sqrt{ع}$ = $\sqrt{٤}$ (جتا $\frac{١٢٠}{٢}$ + ت جا $\frac{١٢٠}{٢}$)

= ٢ (جتا ٦٠ + ت جا ٦٠) = ١ + $\sqrt{٣}$ ت

أ، $\sqrt{ع}$ = $\sqrt{٤}$ [جتا (٦٠+١٨٠) + ت جا (٦٠+١٨٠)]

= ٢ [(- جتا ٦٠) - (ت جا ٦٠)] = -١ - $\sqrt{٣}$ ت

ملاحظة :

كل من الجذرين التربيعيين لأي عدد مركب هو المعكوس الجمعي للآخر فإذا كان الجذر الأول هو س + ت ص فإن الآخر - س - ت ص = - (س+ ت ص) .

إيجاد الجذرين التربيعيين لعدد مركب جبرياً

مثال: أوجد جبرياً الجذرين التربيعيين للعدد ع = -٧ + ٢٤ ت

الحـــــل

نفرض أن $\sqrt{-٧ + ٢٤ ت}$ = س + ت ص وبتربيع الطرفين

-٧ + ٢٤ ت = $س^٢$ - $ص^٢$ + ٢ س ص ت

∴ $س^٢ - ص^٢ = -٧$ ---- (١)

، ٢ س ص = ٢٤ ---- (٢)

∴ ص = $\frac{١٢}{س}$

بالتعويض في (١) ∴ $س^٢ - \frac{١٤٤}{س^٢} = -٧$

∴ $س^٤ + ٧ س^٢ - ١٤٤ = ٠$

$(س^٢ - ٩)(س^٢ + ١٦) = ٠$ ∴ $س^٢ = ٩$

∴ س = ± ٣ أو $س^٢ = -١٦$ وهذا مرفوض

بالتعويض في (٢) ∴ ص = ± $\frac{١٢}{٣}$ = ٤

∴ الجذران التربيعيان هما ± (٣ + ٤ ت)

مثال: ضع العدد ٢ت بالصورة القطبية

الحـــــل

∴ ٢ت = ٢ (جتا٩٠ + ت جا٩٠)

∴ $\sqrt{٢ت}$ = $\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{١}{٢}$ × ٩٠ + ت جا $\frac{١}{٢}$ × ٩٠)

= $\sqrt{٢}$ (جتا ٤٥ + ت جا٤٥) = ١ + ت

، $\sqrt{٢ت}$ = $\sqrt{٢}$ [جتا(٤٥ + ١٨٠) + ت جا (٤٥ + ١٨٠)]

= $\sqrt{٢}$ (- جتا ٤٥ - ت جا٤٥) = -١ - ت

∴ الجذران هما ± (١ + ت)

ثانياً : الطريقة الجبرية :-

نفرض أن $\sqrt{٢ ت}$ = س + ت ص

∴ ٢ت = $(س^٢ - ص^٢)$ + ٢ س ص ت

∴ $س^٢ - ص^٢ = ٠$ ----- (١) ، ٢س ص = ٢

∴ س ص = ١ ∴ ص = $\frac{١}{س}$ ----- (٢) بالتعويض في (١)

∴ $س^2 - \frac{1}{س} = 0$ ∴ $س^4 = 1$ ∴ $س = \pm 1$

بالتعويض في (٢) ∴ $ص = \pm 1$

∴ الجذران هما $\pm 1 \pm 1 \times ت = \pm (1+ت)$

مثال: إذا كان $\sqrt{\frac{-7 + 26ت}{5 - 2ت}} = أ + ت\, ب$ حيث أ ، ب حقيقيان أوجد قيم أ ، ب

الحـــــل

الكسر $= \frac{-7 + 26ت}{5 - 2ت} \times \frac{5 + 2ت}{5 + 2ت} = \frac{-35 + 166ت + 52ت^2}{25 - 4ت^2}$

$= \frac{-87 + 116ت}{29} = -3 + 4ت$

∴ $\sqrt{-3 + 4ت} = أ + ب\, ت$ وبالتربيع

∴ $-3 + 4ت = أ^2 - ب^2 + 2\, أ\, ب\, ت$

∴ $أ^2 - ب^2 = -3$ ------ (١)

، $2\, أ\, ب = 4$ ∴ $ب = \frac{2}{أ}$ وبالتعويض في (١)

∴ $أ^2 - \frac{4}{أ^2} = -3$ ∴ $أ^4 + 3أ^2 - 4 = 0$

∴ $(أ^2 + 4)(أ^2 - 1) = 0$

∴ $أ^2 = 1$ ∴ $أ = \pm 1$ ∴ $ب = \pm 2$

مثال: أوجد قيم س ، ص الحقيقية التي تحقق المعادلة :

$(س + ت\, ص)^2 - 4\, \frac{\sqrt{3} + ت}{\sqrt{3} - ت} + 4 = صفر$

الحـــــل

$\frac{\sqrt{3} + ت}{\sqrt{3} - ت} = \frac{\sqrt{3} + ت}{\sqrt{3} - ت} \times \frac{\sqrt{3} + ت}{\sqrt{3} + ت} = \frac{3 + 2\sqrt{3}\, ت + ت^2}{3 - ت^2} = \frac{2 + 2\sqrt{3}\, ت}{4}$

بالتعويض بهذه القيمة عن الكسر في المعادلة

∴ $(س + ت\, ص)^2 - 4\, \frac{2 + 2\sqrt{3}\, ت}{4} + 4 = صفر$

∴ $(س + ت\, ص)^2 - 2 - 2\sqrt{3}\, ت + 4 = 0$

∴ $(س + ت\, ص)^2 = -2 + 2\sqrt{3}\, ت$

∴ $س^2 - ص^2 + 2\, س\, ص\, ت = -2 + 2\sqrt{3}\, ت$

∴ $س^٢ - ص^٢ = -٢$ ----- (١) ، $٢ س ص = ٢\sqrt{٣}$ ----- (٢)

∴ $س ص = \sqrt{٣}$ ∴ $ص = \frac{\sqrt{٣}}{س}$

بالتعويض في (١) ∴ $-٢ = س^٢ - \frac{٣}{س^٢}$

بالضرب في $س^٢$ ∴ $-٢ س^٢ = س^٤ - ٣$

∴ $س^٤ + ٢س^٢ - ٣ = ٠$ ∴ $(س^٢ + ٣)(س^٢ - ١) = ٠$

∴ $س^٢ = -٣$ (مرفوض) أ، $س^٢ = ١$ ∴ $س = \pm ١$

بالتعويض في (٢) ∴ $ص = \pm \sqrt{٣}$

<u>مثال</u>: إذا كانت س ∈ ك فأوجد مجموعة الحل للمعادلة $س^٢ - (٢+ت) س - (١+٥ ت) = ٠$

الحـــــل

∵ $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$ حيث أ = ١ ، ب = -(٢+ت) ، جـ = -(١+٥ ت)

∴ $س = \frac{(٢+ت) \pm \sqrt{٣ + ٤ت + ٤ + ٢٠ت}}{٢} = \frac{(٢+ت) \pm \sqrt{٧ + ٢٤ت}}{٢}$

ثم نفرض أن $\sqrt{٧ + ٢٤ت} = ل + ت م$ وبتربيع الطرفين

∴ $٧ + ٢٤ت = ل^٢ - م^٢ + ٢ل م ت$

∴ $ل^٢ - م^٢ = ٧$ ----- (١) ، $٢ل م = ٢٤$ ----- (٢)

بتربيع (١) ، (٢) والجمع ∴ $(ل^٢ + م^٢)^٢ = ٦٢٥$

∴ $ل^٢ + م^٢ = ٢٥$ ------ (٣)

بجمع (١) ، (٣) ∴ $٢ل^٢ = ٣٢$ ∴ $ل^٢ = ١٦$ ∴ $ل = \pm ٤$

بطرح (١) من (٣) ∴ $٢م^٢ = ١٨$ ∴ $م^٢ = ٩$ ∴ $م = \pm ٣$

∴ $\sqrt{٧ + ٢٤ت} = \pm (٤ + ٣ت)$

∴ $س = \frac{(٢+ت) \pm (٤ + ٣ت)}{٢}$

∴ $س = \frac{٢ + ت + ٤ + ٣ت}{٢} = \frac{٦ + ٤ت}{٢} = ٣ + ٢ت$

أ، $س = \frac{٢ + ت - ٤ - ٣ت}{٢} = \frac{-٢ - ٢ت}{٢} = -١ - ت$

∴ مجموعة الحل للمعادلة هي : { ٣ + ٢ت ، -١ - ت }

تمارين (١٠)

- إستخدم نظرية ديموافر الجذرين التربيعين لكل من الأعداد الآتية:

١) -٢ ت　　　　٢) $١ - \sqrt{٣}$ ت

٣) $-٢ + ٢\sqrt{٣}$ ت　　　　٤) ٤ (جتا $\frac{ط}{٣}$ - ت جا $\frac{ط}{٣}$)

٥) ٩ (جتا ٣٠٠° + ت جا ٣٠٠°)　　　　٦) $\frac{-٨}{١+\sqrt{٣}\text{ ت}}$

- أوجد الجذرين التربيعين لكل مما يأتي دون التحويل للصورة المثلثية :-

٧) $-٨ - ٦$ ت　　　　٨) ٥ $-$ ١٢ ت

٩) $\frac{-٧ + \text{ت}}{١ + \text{ت}}$　　　　١٠) $\frac{٣١+١٧\text{ت}}{١ - \text{ت}}$

١١) إذا كان $ع^{٢} = ٣ + ٤$ ت أثبت أن $ع + ٥ ع^{-١} = \pm ٤$

١٢) إذا كان $(س+ \text{ت ص})^{٢} + \frac{٨(١-\text{ت})}{١+\text{ت}} + ١٥ =$ صفر فأوجد قيمتى س ، ص الحقيقية التى تحقق المعادلة .

١٣) إذا كان س+ ت ص = $\frac{٧- ٤ \text{ ت}}{٢ + \text{ت}}$ حيث س ، ص حقيقيتان فأوجد قيمة $\sqrt{٢\text{س}- \text{ت ص}}$

١٤) إذا كانت س = $\frac{١+٢ \text{ ت}}{١ - \text{ت}}$ ، ص = $\frac{١-٢ \text{ ت}}{١ + \text{ت}}$ أوجد : قيمة $\sqrt{٥ \text{ س} + ٣\text{ص}}$

١٥) إذا كانت س ∍ كـ حل المعادلة

$$(٢+ \text{ت}) \text{س}^{٢} - ٣ (١+ ٣\text{ت}) \text{س} - ٤(١ - ٢ \text{ ت}) = \text{صفر}$$

- أوجد الصورة المثلثية لقيم المقادير الآتية:-

١٦) $(-\sqrt{٣} + \text{ت})^{\frac{١}{٣}}$　　　　١٧) $(-٦٤ \text{ ت})^{\frac{١}{٣}}$

١٨) $(١ + \text{ت})^{\frac{١}{٤}}$　　　　١٩) $(٣٢)^{\frac{١}{٥}}$

- حل كل من المعادلات الآتية في كـ :-

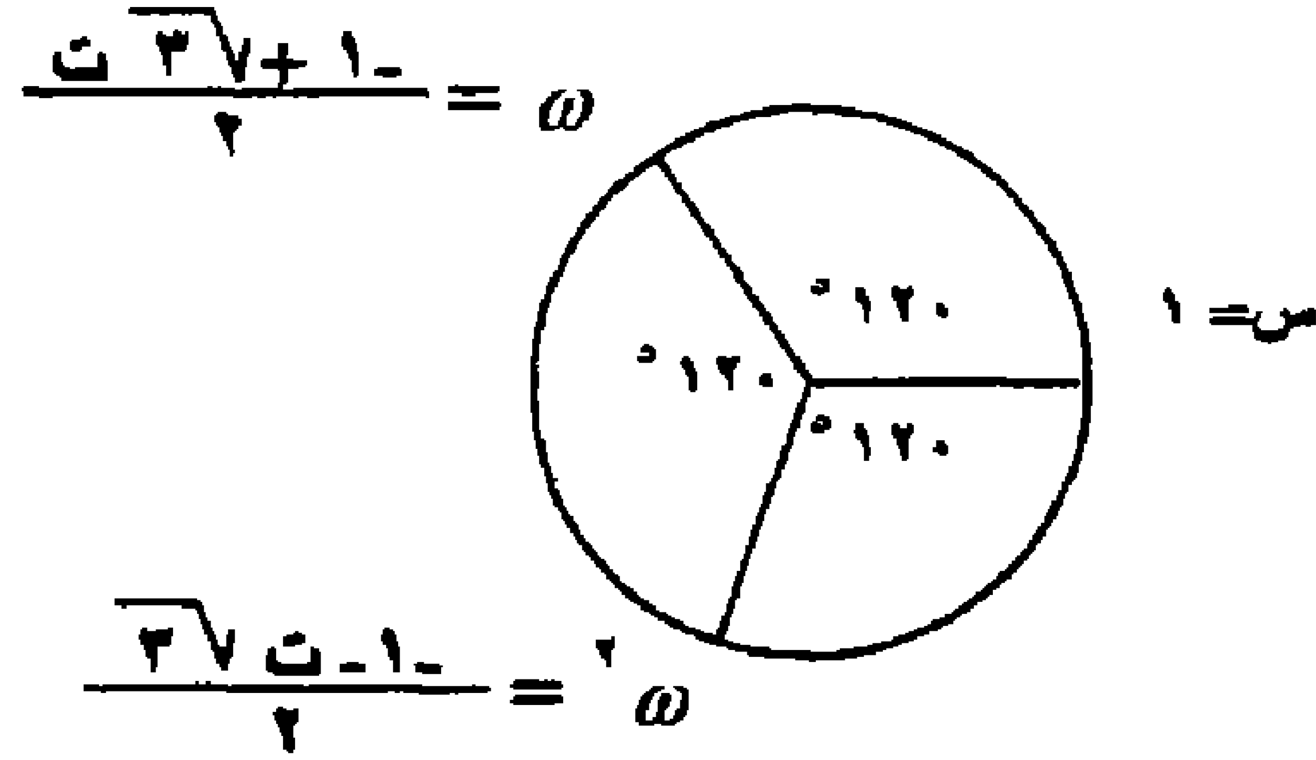
٢٠) $\text{س}^{٥} + ١ = ٠$

٢١) $ع^{٥} = ١ - \sqrt{٣}$ ت

الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

[س= ١ ، ω = $\frac{-١+\sqrt{٣} ت}{٢}$ ، $\omega^٢$ = $\frac{-١-ت \sqrt{٣}}{٢}$]

أي للواحد الصحيح ثلاثة جذور أحدهما حقيقي والجذران الآخران تخيليان مترافقان



- **خواص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح :**

١. مربع أحد الجذرين التخيلين = الجذر التخيلي الآخر .

٢. مجموع الجذور التكعيبية للواحد الصحيح = صفر .

٣. الفرق بين الجذرين التخيلين = ± ت $\sqrt{٣}$

٤. حاصل ضرب الجذرين التخيلين = ١

- **علاقات هامة بين الجذور التكعيبية للواحد الصحيح :**

١+ ω + $\omega^٢$ = ٠	ω × $\omega^٢$ = ١	ω - $\omega^٢$ = ± ت$\sqrt{٣}$
جمع الجذور ١+ ω = - $\omega^٢$ ١+ $\omega^٢$ = - ω $\omega^٢$ + ω = -١ أ+ أ ω + أ $\omega^٢$ = ٠	**ضرب الجذور** $\omega = \frac{١}{\omega^٢}$ $\omega^٢ = \frac{١}{\omega}$ $\omega^٣$ = ١	**طرح الجذور** إذا اعتبرنا ω - $\omega^٢$ = ت$\sqrt{٣}$ فإن: $\omega^٢$ + ω = - ت$\sqrt{٣}$ والعكس صحيح

- **كيفية اختزال قوى ω :**

اقسم الأس على ٣ وباقي خارج القسمة هو الأس الجديد لـ ω .

$\omega^{16} = \omega$ ، $\omega^{29} = \omega^{2}$ ، $\omega^{32} = \omega^{2}$ ، $\omega^{30} = 1$

مثال: أثبت أن $(1+\omega^{2})^{15} = -1$

الحـــــل

$\because 1+\omega+\omega^{2} = 0$ $\therefore (1+\omega^{2}) = -\omega$

$(1+\omega^{2})^{15} = (-\omega)^{15}$ $\therefore$ الأس يقبل القسمة على ٣

$\therefore [(-\omega)^{3}]^{5} = (-1)^{5} = -1 =$ الطرف الأيسر

مثال: أثبت أن : $\dfrac{1}{4+3\omega+2\omega^{2}} + \dfrac{1}{5+3\omega-\omega^{2}} = 1$

الحـــــل

نجعل المقدار المكون من ثلاثة حدود ثنائي الحد

$\therefore 4+3\omega+2\omega^{2}$ ، $\because \omega^{2} = -1-\omega$

$\therefore 4+3\omega-2-2\omega = 2+\omega$

$\therefore 5+3\omega+4\omega^{2} = 5+3\omega-4-4\omega = 1-\omega$

$\therefore$ المقدار $= \dfrac{1}{2+\omega} + \dfrac{1}{1-\omega} = \dfrac{1-\omega+2+\omega}{(1-\omega)(2+\omega)} = \dfrac{3}{2-2\omega+\omega-\omega^{2}}$

$= \dfrac{3}{2-\omega-\omega^{2}} = \dfrac{3}{2-(\omega+\omega^{2})} = \dfrac{3}{2+1} = \dfrac{3}{3} = 1$

مثال: إذا كان ω أحد الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فأوجد قيمة :

$$\left(\frac{2+3\omega-4\omega^{2}}{3-4\omega+2\omega^{2}} - \frac{2-3\omega-4\omega^{2}}{2\text{س}+3\omega^{2}-4}\right)^{8}$$

الحـــــل

الكسر الأول : $\dfrac{2+3\omega-4\omega^{2}}{3-4\omega+2\omega^{2}} = \dfrac{\omega(2\omega^{2}+3-4\omega)}{(3-4\omega+2\omega^{2})} = \omega$

الكسر الثاني : $\frac{2 - 3\omega - 4\omega^{2}}{2س + 3\omega^{2} - 4} = \frac{2 - 3\omega - 4\omega^{2}}{\omega(2 + 3\omega - 4\omega^{2})} = \frac{1}{\omega}$

∴ المقدار $\left[\omega - \frac{1}{\omega}\right]^{8} = [\omega - \omega^{2}]^{8}$

$(\pm\sqrt{3}\,ت)^{8} = [(\pm\sqrt{3}\,ت)^{2}]^{4} = (3ت)^{4} = 3ت^{4} = 3$

<u>مثال</u>: أثبت أن:

$(2 + 2\omega + \frac{3}{\omega})^{2} + (2 + 3\omega + \frac{2}{\omega})^{2} + (3 + 2\omega^{2} + \frac{2}{\omega^{2}})^{2} =$ صفر

الحـــــل

الطرف الأيمن = $(2 + 2\omega + 3\omega^{2})^{2} + (2 + 3\omega + 2\omega^{2})^{2} + (3 + 2\omega^{2} + 2\omega)^{2}$

$= [2(1+\omega) + 3\omega^{2}]^{2} + [2(1+\omega^{2}) + 3\omega]^{2} + [2(\omega + \omega^{2}) + 3]^{2}$

$= [-2\omega^{2} + 3\omega^{2}]^{2} + [2 \times -\omega + 3\omega]^{2} + (-2\omega + 3)^{2}$

$= (\omega^{2})^{2} + \omega^{2} + 1 = \omega^{4} + \omega^{2} + 1$

$= \omega + \omega^{2} + 1 =$ صفر

<u>مثال</u>: أثبت أن : $\frac{1 + \omega - \omega^{2}}{1 - \omega + \omega^{2}} = \omega$

الحـــــل

$\frac{(1 + \omega) - \omega^{2}}{(1 + \omega) - \omega} = \frac{-\omega^{2} - \omega^{2}}{-\omega - \omega} = \frac{-2\omega^{2}}{-2\omega} = \omega$

<u>مثال</u>:أثبت أن : $\frac{3 + \omega}{1 + 2\omega} + \frac{3 + \omega^{2}}{1 + 2\omega^{2}} = 1$

الحـــــل

الطرف الأيمن = $\frac{(3 + \omega)(1 + 2\omega^{2}) + (3 + \omega^{2})(1 + 2\omega)}{(1 + 2\omega)(1 + 2\omega^{2})}$

$= \frac{3 + 6\omega^{2} + \omega + 2\omega + 3 + 6\omega + \omega^{2} + 2\omega^{2}}{1 + 2\omega^{2} + 2\omega + 4\omega^{2}}$

$$= \frac{10 + 7\omega + 7\omega^2}{5 + 2(\omega + \omega^2)} = \frac{10 + 7(\omega + \omega^2)}{5 + 2(\omega + \omega^2)} = \frac{10 - 7}{5 - 2} = \frac{3}{3} = 1$$

مثال: إذا كانت ١، ω ، ω^2 هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فأثبت أن:

$$\omega - \omega^2 = \omega^2 - \omega = \pm \sqrt{3}\,ت$$

الحــــــل

$$\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}\,ت}{2} \quad ، \quad \omega^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}\,ت}{2}$$

$$\omega - \omega^2 = \sqrt{3}\,ت \quad ، \quad \omega^2 - \omega = -\sqrt{3}\,ت$$

الفرق بين ω ، ω^2 $= \pm \sqrt{3}\,ت$

مثال: أثبت أن : $\sqrt{\frac{5 + 5\omega + 6\omega^2}{7 + 6\omega^{-2} + 6\omega^{-1}}} = \pm \omega^2$

الحــــــل

بالتربيع للطرفين

$$\frac{5 + 5\omega + 6\omega^2}{7 + \frac{6}{\omega^2} + \frac{6}{\omega}} = \omega^4$$

$$= \frac{5(1 + \omega) + 6\omega^2}{7 + \frac{6}{\omega^2} + \frac{6}{\omega}} = \omega^4$$

$$= \sqrt{\frac{5 \times -\omega^2 + 6\omega^2}{7 + 6\omega + 6\omega^2}} = \sqrt{\frac{\omega^2}{1}} = \sqrt{\omega^4} = \omega^2 \text{ الطرف الأيسر}$$

مثال: حل المعادلة $س^2 = 1 + \omega^2$ حيث س ∈ ك

الحــــــل

$$س^2 = 1 + \frac{-1 - \sqrt{3}\,ت}{2} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,ت = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,ت$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,ت$$

$س^{٢} = [\text{جتا}٦٠ + ت\ \text{جا}٦٠]$

$س = (\text{جتا}\ \frac{٦٠}{٢} + ت\ \text{جا}\frac{٦٠}{٢}) = (\text{جتا}٣٠ + ت\ \text{جا}\ ٣٠)$

يضاف $\frac{٣٦٠}{٢} = ١٨٠$ ∴ $س_{٢} = (\text{جتا}\ ٢١٠ + ت\ \text{جا}٢١٠)$

مثال: أثبت أن

$$\frac{١}{٢-٢\omega+\omega^{٢}} + \frac{١}{٣+٢\omega-\omega^{٢}} = \frac{٥}{١٣}$$

الحـــــل

$\because ٢-٢\omega+\omega^{٢} = ٢-٢\omega-١-\omega = ١-٣\omega$

، $٣+٢\omega-\omega^{٢} = ٣+٢\omega-١(-١-\omega) = ٣+٢\omega+١+\omega = ٤+٣\omega$

$$\text{الطرف الأيمن} = \frac{١}{١-٣\omega} + \frac{١}{٤+٣\omega}$$

$$= \frac{٤+٣\omega+١-٣\omega}{(١-٣\omega)(٤+٣\omega)} = \frac{٥}{٤+٣\omega-١٢\omega-٩\omega^{٢}}$$

$$= \frac{٥}{٤-٩\omega-٩\omega^{٢}} = \frac{٥}{٤-٩(\omega+\omega^{٢})} = \frac{٥}{١٣}$$

مثال: أثبت أن $\sqrt{\frac{١+١٠\omega+١٠\omega^{٢}}{١-٣\omega+٣\omega^{٢}}} = \pm \frac{٣}{٢}ت$

الحـــــل

$$\text{الطرف الأيمن} = \sqrt{\frac{١+١٠(\omega+\omega^{٢})}{١-٣(\omega+\omega^{٢})}} = \sqrt{\frac{١-١٠}{١+٣}} = \sqrt{\frac{-٩}{٤}} = \pm \frac{٣}{٢}\ ت$$

مثال: إذا كانت $س = \frac{-١+\sqrt{٣}\ ب}{٢}$ فاثبت أن $س^{١٠} + س^{٨} + ١ = ٠$

الحـــــل

$س = \omega = \frac{١+\sqrt{٣}\ ب}{٢}$

$\omega^{١٠} + \omega^{٨} + ١ = ٠$ $\omega + \omega^{٢} + ١ = ٠$

مثال: أثبت أن $(1+\omega)^3 + (1-\omega-\omega^2)^3 = 7$

الحـــــل

$(1+\omega)^3 + [1-(\omega+\omega^2)]^3$

$= (-\omega^2)^3 + (1+1)^3$

$= -\omega^6 + 2^3 = -1 + 8 = 7$

مثال: اختصر إلي ابسط صورة $\left(2+\frac{1}{\omega}\right)^2 - \left(\frac{\omega^{0}-1}{\omega}\right)^2$

الحـــــل

$(2+\omega^2)^2 + \left(\omega^3 - \frac{1}{\omega}\right)^2$

$= 4 + 4\omega^2 + \omega^4 + 1 - 2\omega + \omega^2$

$= 5 + 5\omega^2 + \omega - 2\omega$

$= 5(1+\omega^2) - \omega$

$= -5\omega - \omega = -6\omega$

تمارين (١١)

■ إذا كانت ١ ، ω ، $\omega^{٢}$ هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فاثبت أن:

(١) $(٢+١١\omega+٢\omega^{٢})(٢+١١\omega^{٢}+٢\omega^{٤}) = ٨١$

(٢) $\left(\frac{١}{١+\omega^{٥}} - \frac{١}{١+\omega^{٤}}\right)^{٢} = -٣$

(٣) $\left(\frac{\omega^{٢}+١}{\omega}\right)^{٢} - \left(\frac{\omega^{٢}-١}{\omega}\right)^{٢} = -٣$

(٤) $\frac{(٢+١١\omega+٢\omega^{٢})(٢+١١\omega^{٢}+٢\omega^{٤})}{(١-\quad+\omega^{٢})(١+\omega-\quad)} = \frac{٩}{٢}$

(٥) $(\omega-\omega^{٢})\left(\frac{\omega-٣}{٤+٢\omega} - \frac{\omega^{٢}-٣}{٤+٢\omega^{٢}}\right) = -\frac{٥}{٢}$

(٦) $(٥+\omega)\left(\frac{١}{٥+٤\omega+٣\omega^{٢}} - \frac{١}{٣\omega+٢\omega^{٢}}\right) = ٤$

(٧) $\left(\frac{١}{١+٢\omega-٢\omega^{٢}} - \frac{١}{١-٢\omega+٢\omega^{٢}}\right) = -\frac{٤٨}{١٦٩}$

(٨) $\left(\text{أ}+\frac{\text{ب}}{\omega}\right)\left(\text{أ}+\frac{\text{ب}}{\omega^{٢}}\right) = (\text{أ}-\text{ب})^{٢}+\text{أب}$

(٩) $\left(١+٣\omega^{٢}-\frac{٤}{\omega^{٢}}\right)\left(١+٣\omega-\frac{٤}{\omega}\right) =$ عدد حقيقي

(١٠) $\left(\frac{\text{أ}+١}{\text{أ}+(٢\text{أ}+١)\omega+\text{أ}\omega^{٢}}\right)^{٦}$ لا يتوقف علي قيمة أ

(١١) $\left(\frac{٥-٣\omega^{٢}}{٥\omega-٣} - \frac{٢-٧\omega}{٢\omega^{٢}-٧}\right)^{٤} = ٩$

(١٢) <u>أوجد مجموعة ن حداً الأولى من المتتابعة:</u>

(١، ω ، $\omega^{٢}$ ، $\omega^{٣}$ ، ......) ثم أوجد هذا المجموع في أبسط صورة عندما ن = ٣م ، ٣م+١ ، ٣م + ٢ حيث م عدد صحيح

(١٣) إذا كانت س = $-\frac{١}{٢}+\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ت فاثبت أن س^{٢٣} + س^{١٦} +١ = صفر

(١٤) أوجد جذري المعادلة : س^{٢}+ $(١+٢\omega+\omega^{٢})(١+\omega+٢\omega^{٢}) = ٠$

(١٥) أوجد قيمة ت + $\omega^{٢}$ + $ت^{٣}$ + $\omega^{٤}$ + $ت^{٥}$ + $\omega^{٦}$ + ... إلي ١٥ حداً

(١٦) أوجد مجموع ٢٣ حداً من المتتابعة الآتية إبتداء من الحد الأول :

(ω ، $ت^{٢}$ ، $\omega^{٣}$ ، $ت^{٤}$ ، $\omega^{٥}$ ، $ت^{٦}$ ، .....)

(١٧) أوجد قيمة (١ - ω) (١ - $\omega^{٢}$) (١ - $\omega^{٤}$)(١ - $\omega^{٨}$)

(١٨) كون المعادلة التي جذرها (١+ ω - $\omega^{٢}$) ^{٣} ، (١ - ω + $\omega^{٢}$) ^{٣}

(١٩) إذا كان س + ص ت = ($\frac{١}{ت}$ - ω - $\omega^{٢}$) ^{٦} حيث س ، ص عددان حقيقيان فأوجد س ، ص

(٢٠) إذا كان (١ - ت) (س+ ص ت) = ١٩ ($\frac{١}{٢ - ٣ \omega^{٢}}$ + $\frac{١}{٥ + ٣ \omega^{٢}}$) فاثبت أن

س = ص = $\frac{٧}{٢}$

(٢١) حل المعادلة $س^{٢}$ = ١ + $\omega^{٢}$

الباب الثالث

المحددات

المحدد هو مجموعة من العناصر مرتبة علي هيئة صفوف وأعمدة بشرط ..... عدد الصفوف = عدد الأعمدة وكل محدد له قيمة محددة .

* محدد ٢×٢ ويأخذ الصورة $\begin{vmatrix} ب & أ \\ ء & جـ \end{vmatrix}$

مثال١: أوجد قيمة :-

[أ] $\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{vmatrix}$ = ٤ - ٦ = -٢

[ب] $\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{vmatrix}$ = جا^٢ أ + جتا^٢ أ = ١

* محدد ٣×٣

مثال٢: أوجد قيمة
$$\begin{matrix} + & - & + \end{matrix}$$
$$\begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٢ & ١ & ٣ \\ ١ & ٣ & ٢ \end{vmatrix}$$

المحدد = + ١ $\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix}$ -٢ $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix}$ +٣ $\begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix}$ = ٥ + ٢ + ٢١ = ١٨

ملاحظة : فك المحدد ممكن باستخدام أي صف أو أي عمود مع ملاحظة الإشارات .

مثال٣: حل المعادلة $\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & س \\ س & س & ١ \\ س & ٢ & ٠ \end{vmatrix}$ = ٣ س

الحـــــــل

∴ س (س^٢ – ٢س) = ٣ س

س^٣ – ٢س^٢ -٣ س = ٠ ، س(س^٢ – ٢س -٣) = ٠

س(س-٣) (س+١) = ٠

∴ س = ٠ ، س = ٣ ، س = -١

مثال٤: إذا كانت (س- ١) أحد عوامل المحدد $\begin{vmatrix} ٤ & ك & س+١ \\ س+١ & ٤ & ك \\ ٦ & ٧ & ٥ \end{vmatrix}$ فأوجد قيمة ك ؟

الحـــــــل

∵ (س-١) أحد عوامل المحدد

∴ المحدد = ٠ عندما س-١ = ٠ أي عندما س = ١ ∴ $\begin{vmatrix} ٤ & ك & ٢ \\ ٢ & ٤ & ك \\ ٦ & ٧ & ٥ \end{vmatrix} = ٠$

∴ ٢(٢٤-١٤) – ك (٦ك-١٠) + ٤ (٧ك-٢٠) = ٠

٢٠+٦ك^{٢} + ١٠ك +٢٨ك - ٨٠ = ٠

-٦ ك^{٢} +٣٨ك - ٦٠ = ٠ ÷ -٢

٣ ك^{٢} – ١٩ك + ٥٠ = ٠

(٣ك- ١٠) (ك- ٣) =٠ ∴ ك = $\frac{١٠}{٣}$ ك = ٣

مثال٥ : إذا كان $\begin{vmatrix} و & ء \\ ١ & هـ \end{vmatrix}$ =٢ فاوجد قيمة $\begin{vmatrix} و & ء \\ ١ & هـ \end{vmatrix}$ ، $\begin{vmatrix} ١ & و \\ هـ & ء \end{vmatrix}$ ، $\begin{vmatrix} ١ & ء \\ ١ & وهـ \end{vmatrix}$

الحـــــــل

∵ $\begin{vmatrix} و & ء \\ ١ & هـ \end{vmatrix}$ =٢

∴ ء-و هـ = ٢ ∴ ء = وهـ + ٢

∴ $\begin{vmatrix} و & ء \\ ١ & هـ \end{vmatrix}$ = ء- وهـ = و هـ + ٢– وهـ = ٢

، $\begin{vmatrix} ١ & و \\ هـ & ء \end{vmatrix}$ =وهـ - ء = وهـ - وهـ -٢ = - ٢

، $\begin{vmatrix} ١ & ء \\ ١ & وهـ \end{vmatrix}$ = ء – و هـ = وهـ + ٢ – و هـ = ٢

مثال٦: إذا كانت جـ جذراً للمعادلة س^{٢} – س – ١ = ٠

فاثبت ان: $\begin{vmatrix} ٣ & جـ \\ جـ & ١ \end{vmatrix}$ - $\begin{vmatrix} جـ & ٠ \\ ٢جـ & ١ \end{vmatrix}$ + $\begin{vmatrix} ٣ & جـ \\ جـ & ١ \end{vmatrix}$ = ٠

الحـــــــل

الطرف الأيمن : (جـ^٢ – ٣) – (جـ) + (١٤ ـ ١٢)

∴ جـ^٢ ـ٣ – جـ + ٢

جـ^٢ – جـ ـ١

∵ جـ جذرا للمعادلة س^٢ – س – ١ = ٠

∴ جـ^٢ – جـ ـ١ =٠ وهذا يحقق صحة المطلوب

تمارين (١٢)

(١) أكتب المحددات التي تنشأ من حذف المتغيرات من المعادلات الآتية:-

أ) ٢س = ـ٢ ، س + ٣ = ٢

ب) ٢س – ص = ١ ، س + ٣ ص =٤ ، ٥ س – ٢ص = ٣

ج) س- ص = ٣ ، ٣س+ ٢ص = ٤ ، - س + ٣ص = ـ٥

(٢) أوجد قيمة المحددات الآتية : -

[أ] $\begin{vmatrix} ٥ & ١ \\ -١ & ٢ \end{vmatrix}$ [ب] $\begin{vmatrix} ٠ & ٢ \\ ٥ & ٠ \end{vmatrix}$ [ج] $\begin{vmatrix} -٢ & ١ \\ ٤ & -٢ \end{vmatrix}$

[ء] $\begin{vmatrix} س & ٠ \\ ٠ & -س \end{vmatrix}$ [و] $\begin{vmatrix} ٠ & ٠ \\ -٢ & ٠ \end{vmatrix}$ [هـ] $\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & ٤ \end{vmatrix}$

(٣) باستخدام عناصر الصف الأول ، أوجد قيمة المحددات الآتية :-

[أ] $\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ٤ & ٢ \\ -٣ & -١ & ٥ \end{vmatrix}$ [ب] $\begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٢ & ١ & ٣ \\ ١ & ٣ & ٢ \end{vmatrix}$ [ج] $\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \end{vmatrix}$

[ء] $\begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٦ & ٥ & ٤ \\ ٩ & ٨ & ٧ \end{vmatrix}$ [و] $\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ٢ \\ ٠ & ٤ & ٠ \\ -١ & ٠ & ١ \end{vmatrix}$ [هـ] $\begin{vmatrix} -٢ & ١ & ٠ \\ -٣ & ٠ & -١ \\ ٠ & ٣ & ٢ \end{vmatrix}$

(٤) حل كلا من المعادلات الآتية:-

أ) $\begin{vmatrix} -٢س & س^٢ \\ س & س \end{vmatrix} = -١$ ب) $\begin{vmatrix} ١ & س \\ س & ٣ \end{vmatrix} = ١$ ج) $\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & س \\ س & س & ١ \\ س & ٢ & ٥ \end{vmatrix} = ٣س$

خواص المحددات

(١) قيمة المحدد ($\triangle$) = مجموع حواصل ضرب عناصر أي صف (عمود) × العوامل المرافقة لها.

مثال٧: أوجد قيمة المحدد $\begin{vmatrix} ٣ & ٢- & ٥ \\ ٧ & ٠ & ٤ \\ ٦- & ٢ & ١ \end{vmatrix}$

الحـــــل

باستخدام عناصر الصف الثاني

$\begin{vmatrix} ٢- & ٠ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} ٧ -$ صفر + $\begin{vmatrix} ٣ & ٢- \\ ٦- & ٢ \end{vmatrix} ٤- = \Delta \therefore$

$١٢ \times ٧ - ٦ \times ٤ = \Delta \therefore$

$١٠٨- = ٨٤ - ٢٤-$

(٢) قيمة المحدد لا تتغير .... إذا تبدلت الصفوف بالأعمدة أو الأعمدة بالصفوف بنفس ترتيبها

$\therefore$ المحدد = محورته $\qquad \Delta' = \Delta \therefore$

مثال٨: حقق الخاصية السابقة إذا كان : $\begin{vmatrix} ٢- & ١ & ٣ \\ ١- & ١ & ٠ \\ ٥ & ٤ & ٢ \end{vmatrix}$

الحـــــل

$\begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{vmatrix} ٢- \begin{vmatrix} ١- & ٠ \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix} ١ - \begin{vmatrix} ١- & ١ \\ ٥ & ٤ \end{vmatrix} ٣ = \Delta \therefore$

$٢٩ = ٤ + ٢ - ٢٧ = ٢- \times ٢- \; ٢ \times ١ - ٩ \times ٣ =$

$٢٩ = ١ \times ٢ + ٩ \times ٣ = \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ١- & ٢- \end{vmatrix} ٢ + ٠ ٠ - \begin{vmatrix} ٤ & ١ \\ ٥ & ١- \end{vmatrix} ٣ = \begin{vmatrix} ٢ & ٠ & ٣ \\ ٤ & ١ & ١ \\ ٥ & ١- & ٢- \end{vmatrix} = \Delta' \cdot$

$\therefore$ المحدد = محورته

(٣) قيمة المحدد لا تتغير .... بإضافة أي صف أو عمود مضروبا في عدد ثابت إلي صف أو عمود آخر .

<u>مثال٩</u>: بدون فك المحدد أثبت أن :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \text{جـ} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{أ} & \text{جـ} & \text{ب} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{جـ}+1 & \text{ب}+1 & \text{أ}+1 \\ \text{جـ} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{جـ}+\text{أ} & \text{ب}+\text{جـ} & \text{أ}+\text{ب} \end{vmatrix}$$

الحـــــــل

نضيف − ص_2 إلي ص_1

$$\therefore \begin{vmatrix} \text{جـ}+1-\text{جـ} & \text{ب}+1-\text{ب} & \text{أ}+1-\text{أ} \\ \text{جـ} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{جـ}+\text{أ} & \text{ب}+\text{جـ} & \text{أ}+\text{ب} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \text{جـ} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{جـ}+\text{أ} & \text{ب}+\text{جـ} & \text{أ}+\text{ب} \end{vmatrix}$$ ثم نضيف − ص_2 إلي ص_3

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \text{جـ} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{جـ}+\text{أ}-\text{جـ} & \text{ب}+\text{جـ}-\text{ب} & \text{أ}+\text{ب}-\text{أ} \end{vmatrix}$$

∴ الطرفان متساويان .

(٤) قيمة المحدد علي الصورة المثلثية = حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي .

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} \quad ، \quad \begin{vmatrix} -1 & 7 & 5 \\ 4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

<u>مثال١٠</u>: أوجد قيمة : $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

∵ المحدد علي الصورة المثلثية

∴ قيمة المحدد = حاصل ضرب عناصر قطره الرئيسي

$= 3 \times 5 \times 7 = 105$

(٥) إذا ضرب كل عنصر من عناصر أي صف أو عمود في عدد ثابت فإن قيمة المحدد تضرب في نفس العدد .

$$\therefore \text{ك} \times \Delta = \begin{vmatrix} \text{٢ك} & \text{٣ك} & \text{٥ك} \\ \text{٤} & \text{٧} & \text{١٠} \\ \text{١-} & \text{١} & \text{٣} \end{vmatrix} \qquad \therefore \Delta = \frac{\text{١}}{\text{ك}} \begin{vmatrix} \text{٢ك} & \text{٣ك} & \text{٥ك} \\ \text{٤} & \text{٧} & \text{١٠} \\ \text{١-} & \text{١} & \text{٣} \end{vmatrix}$$

نتيجة : العامل المشترك لعناصر صف (أو عمود) هو أحد عوامل المحدد .

مثال ١١ : بدون فك المحدد أثبت أن:

$$\begin{vmatrix} \text{س} & \text{س}^{٢} & \text{س}^{٣} \\ \text{ص} & \text{ص}^{٢} & \text{ص}^{٣} \\ \text{ع} & \text{ع}^{٢} & \text{ع}^{٣} \end{vmatrix} = \text{س ص ع} \begin{vmatrix} \text{١} & \text{س} & \text{س}^{٢} \\ \text{١} & \text{ص} & \text{ص}^{٢} \\ \text{١} & \text{ع} & \text{ع}^{٢} \end{vmatrix}$$

الحـــــل

بأخذ س ← عامل مشترك من ص١

، ص ← عامل مشترك من ص٢

، ع ← عامل مشترك من ص٣

$$\therefore \text{س ص ع} \begin{vmatrix} \text{١} & \text{س} & \text{س}^{٢} \\ \text{١} & \text{ص} & \text{ص}^{٢} \\ \text{١} & \text{ع} & \text{ع}^{٢} \end{vmatrix} = \text{الطرف الأيسر}$$

(٦) تتغير إشارة المحدد إذا تبادل الوضع صفان أو عمودان .

مثال ١٢ : بدون فك المحدد أثبت أن:

$$\begin{vmatrix} \text{١} & \text{٢} & \text{٣} \\ \text{٦} & \text{٥} & \text{٤} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ \text{١} & \text{٢} & \text{٣} \\ \text{٦} & \text{٥} & \text{٤} \end{vmatrix}$$

الحـــــل

$\text{ص}_{١}$ ، $\text{ص}_{٣}$ يتبادلان الوضع : $\therefore - \begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ \text{٦} & \text{٥} & \text{٤} \\ \text{١} & \text{٢} & \text{٣} \end{vmatrix}$

ثم ص$_2$ ، ص$_3$ يتبادلان الوضع : ∴ - × - $\begin{vmatrix} ع & ص & س \\ ٣ & ٢ & ١ \\ ٤ & ٥ & ٦ \end{vmatrix}$ = الأيسر

(٧) خاصية التجزئ (تحويل محدد إلي مجموع محددين) ويستفاد منها :

[١] ينتج عامل مشترك بعد التجزئ كان من الصعب استخراجه قبل التجزئ.

[٢] ينتج بعد التجزئ صفان أو عمودان متساويان .

مثال١٣: $\begin{vmatrix} ع+جـ & ص+ب & س+أ \\ و & هـ & ء \\ م & ل & ك \end{vmatrix}$

الحـــــــل

$$\begin{vmatrix} جـ & ب & أ \\ و & هـ & ء \\ م & ل & ك \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ع & ص & س \\ و & هـ & ء \\ م & ل & ك \end{vmatrix} =$$

<u>نتيجة</u> :

<u>قاعدة جمع المحددات:-</u>

أ- أن يكونا من نفس الدرجة .

ب- أن تتطابق جميع صفوفهما (أو أعمدتهما) ما عدا صف واحد (أو عمود واحد) علي الأكثر.

<u>مثال١٤</u>: بدون فك المحدد اثبت أن :-

$$\text{صفر} = \begin{vmatrix} ٦ & ١ & -٢ \\ -٤ & ٣ & -٧ \\ ٩ & ٠ & ٢ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -٣ & -١ & ٤ \\ ٥ & ٣ & -٧ \\ ٨ & ٠ & ٢ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٦ & -١ & ٤ \\ -٩ & ٣ & -٧ \\ ١ & ٠ & ٢ \end{vmatrix}$$

الحـــــــل

بجمع المحددين الأول والثاني فقط

$$\begin{vmatrix} ٩ & ٠ & ٢ \\ -٤ & ٣ & -٧ \\ ٩ & ٠ & ٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٦ & ١ & -٢ \\ -٤ & ٣ & -٧ \\ ٩ & ٠ & ٢ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٣ & -١ & ٤ \\ -٤ & ٣ & -٧ \\ ٩ & ٠ & ٢ \end{vmatrix}$$

= صفر   لأن ص$_1$ = ص$_3$

إنعدام المحـــدد

١) ينعدم المحدد إذا تساوي فيه صفان أو عمودان .

مثال١٥: بدون فك المحدد أثبت أن: $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{س} & \text{أ}^{٢} \\ \text{ب} & \text{ص} & \text{أب} \\ \text{جـ} & \text{ع} & \text{أجـ} \end{vmatrix}$ = صفر

الحـــــل

$\therefore$ أ $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{س} & \text{أ} \\ \text{ب} & \text{ص} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{ع} & \text{جـ} \end{vmatrix}$ ولأن $\text{ع}_{١} = \text{ع}_{٣}$

$\therefore$ المحدد = صفر

٢) ينعدم المحدد إذا كانت جميع عناصرأي صف أو عمود أصفار $\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٣ & ٢ & ١ \\ ٦ & ٥ & ٤ \end{vmatrix}$ = صفر

٣) ينعدم المحدد إذا وجد تناسب بين عناصر صفين أو عمودين .

$\begin{vmatrix} ٦ & ٧ & ٣ \\ ٤ & ٨ & ٢ \\ ١٠ & ١١ & ٥ \end{vmatrix} = ٠$ لوجود تناسب بين $\text{ع}_{١}$ ، $\text{ع}_{٣}$

$$\frac{١}{٢} = \frac{٥}{١٠} = \frac{٢}{٤} = \frac{٣}{٦}$$

٤) ينعدم المحدد إذا وجد به صف أو عمود عناصره تساوي المجموع الجبري للصفين أو العمودين الآخرين .

$\begin{vmatrix} ٥ & ٣ & ١ \\ ٦ & ٤ & ٢ \\ ١١ & ٧ & ٣ \end{vmatrix}$ = صفر

لأن $\text{ص}_{٣} = \text{ص}_{١} + \text{ص}_{٢}$

٥) ينعدم المحدد إذا كانت عناصره في توالي عددي بالنسبة للصفوف (الأعمدة) .

$$\begin{vmatrix} ١٥ & ١١ & ٥ \\ ١٦ & ١٢ & ٦ \\ ١٧ & ١٣ & ٧ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

<u>تعريف المحدد المتماثل:</u>

عناصره أعلي القطر الرئيسي = عناصره أسفل القطر الرئيسي
$$\begin{vmatrix} ص & س & أ \\ ع & ب & س \\ جـ & ع & ص \end{vmatrix}$$

٦) ينعدم المحدد إذا كان ملتو التماثل عناصر قطره الرئيسي أصفار وعناصره أعلي القطر الرئيسي = $\begin{vmatrix} ٥- & ١ & ٠ \\ ٣- & ٠ & ١- \\ ٠ & ٣ & ٥ \end{vmatrix}$ عناصره أسفل القطر الرئيسي ولكن بإشارة مختلفة والمحدد الملتوي التماثل فردي الدرجة .

مثال ١٦ : إذا كان $\begin{vmatrix} ١١ & ٤ & ١ \\ ١٢ & س & ٢ \\ ص & ٦ & ٣ \end{vmatrix} = ٠$ بأربع طرق مختلفة أقترح قيمة لكل من س ، ص

الحـــــل

١) س = ٥ ، ص = ١٣ عناصر المحدد في توالي عددي

٢) ص$_{١}$ + ص$_{٢}$ = ص$_{٣}$ ∴ س = ٢ ، ص = ٢٣

٣) تناسب بين ص$_{٢}$ ، ص$_{٣}$ ∴ $\frac{١١}{١٨} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$

∴ س = ٤ ، ص = ١٨

٤) تناسب بين ع$_{٢}$ ، ع$_{٣}$ ∴ $\frac{٦}{ص} = \frac{س}{١٢} = \frac{٤}{١١}$

∴ س = $\frac{٤٨}{١١}$ ، ص = $\frac{٦٦}{٤}$

كيف تفكر في حل مسائل المحددات ؟

إذا طلب منك إثبات قيمة المحدد بالخواص أو إيجاد قيمة المحدد بالخواص أو حل معادلة في صورة محدد بحيث يكون المجهول متواجد في عناصر القطر الرئيسي أو موزع علي عناصر المحدد أتبع ما يلي :-

[١] أخرج العامل المشترك أولاً إن وجد .

[٢] جمع صفين أو عمودين أو ثلاثة صفوف أو ثلاثة أعمدة بشرط ما ينتج من الجمع مقدار ثابت (مقادير متساوية) ثم تخرج هذا الثابت خارج المحدد .

[٣] إذا كانت عناصر أحد الصفوف = واحد تضرب $ع_١ \times -١$ ثم إضافته إلي $ع_٢$ ، $ع_٣$ ينتج صفرين ثم تفك المحدد بالمرافقات .

[٤] إذا كانت أحد الأعمدة = واحد تضرب $ص_١ \times -١$ ثم إضافته إلي $ص_٢$ ، $ص_٣$ ينتج صفرين ثم نفك المحدد بالمرافقات .

مثال ١٧ : باستخدام خواص المحددات بالمرافقات باستخدام خواص المحددات أثبت أن:

$$\begin{vmatrix} \text{س-ص-ع} & \text{٢ص} & \text{٢ع} \\ \text{٢س} & \text{ص-ع-س} & \text{٢ع} \\ \text{٢س} & \text{٢ص} & \text{ع-س-ص} \end{vmatrix} = (\text{س+ص+ع})^{٣}$$

الحـــــل

$ع_١ + ع_٢ + ع_٣$

$$\begin{vmatrix} \text{س+ص+ع} & \text{٢ص} & \text{٢ع} \\ \text{س+ص+ع} & \text{ص-ع-س} & \text{٢ع} \\ \text{س+ص+ع} & \text{٢ص} & \text{ع-س-ص} \end{vmatrix}$$

$$\therefore (\text{س+ص+ع}) \begin{vmatrix} ١ & \text{٢ص} & \text{٢ع} \\ ١ & \text{ص-ع-س} & \text{٢ع} \\ ١ & \text{٢ص} & \text{ع-س-ص} \end{vmatrix}$$

$ص_١ \times -١$ ثم إضافته إلي $ص_٢$ ، $ص_٣$

$$\therefore (\text{س+ص+ع}) \begin{vmatrix} ١ & \text{٢ص} & \text{٢ع} \\ & \text{ص-ع-س} & \text{٢ع} \\ & & \text{ع-س-ص} \end{vmatrix}$$

$= (\text{س+ص+ع})(\text{-س-ص-ع})(\text{-س-ص-ع})$

$= (\text{س+ص+ع}) \times -(\text{س+ص+ع}) \times -(\text{س+ص+ع}) = (\text{س+ص+ع})^{٣}$

مثال ١٨ : أثبت أن

$$\begin{vmatrix} \text{س} & \text{أ} & \text{ب} \\ \text{أ} & \text{س} & \text{ب} \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{س} \end{vmatrix} = (\text{س}-\text{أ})(\text{س}-\text{ب})(\text{س}+\text{أ}+\text{ب})$$

الحـــــل

$$\therefore\ \text{ع}_1+\text{ع}_2+\text{ع}_3 \begin{vmatrix} \text{س}+\text{أ}+\text{ب} & \text{أ} & \text{ب} \\ \text{أ}+\text{أ}+\text{ب} & \text{س} & \text{ب} \\ \text{أ}+\text{أ}+\text{ب} & \text{ب} & \text{س} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{س}+\text{أ}+\text{ب}) \begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{ب} \\ 1 & \text{س} & \text{ب} \\ 1 & \text{ب} & \text{س} \end{vmatrix}$$

بضرب $\text{ص}_1 \times -1$ وإضافته إلي ص_2 ، ص_3

$$\therefore\ (\text{س}+\text{أ}+\text{ب}) \begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{ب} \\ 0 & \text{س}-\text{أ} & 0 \\ 0 & \text{ب}-\text{أ} & \text{س}-\text{ب} \end{vmatrix}$$

بفك المحدد بمعلومية ع_1

$$\therefore\ \Delta = (\text{س}+\text{أ}+\text{ب})(\text{س}-\text{أ})(\text{س}-\text{ب})$$

مثال ١٩ : بدون فك المحدد أثبت أن

$$\begin{vmatrix} \text{س}+\text{ص} & \text{ص}+\text{ع} & \text{ع}+\text{س} \\ \text{ص}+\text{ع} & \text{ع}+\text{س} & \text{س}+\text{ص} \\ \text{ع}+\text{س} & \text{س}+\text{ص} & \text{ص}+\text{ع} \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ \text{ص} & \text{ع} & \text{س} \\ \text{ع} & \text{س} & \text{ص} \end{vmatrix}$$

الحـــــل

$$\text{ع}_1+\text{ع}_2+\text{ع}_3 \begin{vmatrix} 2(\text{س}+\text{ص}+\text{ع}) & \text{ص}+\text{ع} & \text{ع}+\text{س} \\ 2(\text{س}+\text{ص}+\text{ع}) & \text{ع}+\text{س} & \text{س}+\text{ص} \\ 2(\text{س}+\text{ص}+\text{ع}) & \text{س}+\text{ص} & \text{ص}+\text{ع} \end{vmatrix}$$

$$\therefore\ 2 \begin{vmatrix} \text{س}+\text{ص}+\text{ع} & \text{ص}+\text{ع} & \text{ع}+\text{س} \\ \text{س}+\text{ص}+\text{ع} & \text{ع}+\text{س} & \text{س}+\text{ص} \\ \text{س}+\text{ص}+\text{ع} & \text{س}+\text{ص} & \text{ص}+\text{ع} \end{vmatrix}$$

ع١ - ع٢

$$= ٢ \begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} + \text{ع} & \text{ع} + \text{س} \\ \text{ص} & \text{ع} + \text{س} & \text{س} + \text{ص} \\ \text{ع} & \text{س} + \text{ص} & \text{ص} + \text{ع} \end{vmatrix}$$

ع٢ - ع١

$$= ٢ \begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} + \text{ع} & \text{ع} \\ \text{ص} & \text{ع} + \text{س} & \text{س} \\ \text{ع} & \text{س} + \text{ص} & \text{ص} \end{vmatrix}$$

ع٢ - ع٣

$$= ٢ \begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ \text{ص} & \text{ع} & \text{س} \\ \text{ع} & \text{س} & \text{ص} \end{vmatrix} = \text{الأيسر}$$

مثال ٢٠: اثبت أن:

$$\begin{vmatrix} ١ & \text{جتا}^{٢}\text{أ} & \text{جتا٢أ} \\ ١ & \text{جتا}^{٢}\text{ب} & \text{جتا٢ب} \\ ١ & \text{جتا}^{٢}\text{جـ} & \text{جتا٢جـ} \end{vmatrix} = ٠$$

الحـــــل

∵ جتا٢ أ = ٢جتا^{٢} أ ـ ١

$$\therefore \begin{vmatrix} ١ & \text{جتا}^{٢}\text{أ} & ٢\text{جتا}^{٢}\text{أ} - ١ \\ ١ & \text{جتا}^{٢}\text{ب} & ٢\text{جتا}^{٢}\text{ب} - ١ \\ ١ & \text{جتا}^{٢}\text{جـ} & ٢\text{جتا}^{٢}\text{جـ} - ١ \end{vmatrix}$$

ع١ + ع٣

$$\therefore \begin{vmatrix} ١ & \text{جتا}^{٢}\text{أ} & ٢\text{جتا}^{٢}\text{أ} \\ ١ & \text{جتا}^{٢}\text{ب} & ٢\text{جتا}^{٢}\text{ب} \\ ١ & \text{جتا}^{٢}\text{جـ} & ٢\text{جتا}^{٢}\text{جـ} \end{vmatrix}$$

، ∵ يوجد تناسب بين ع٢ ، ع٣ = $\frac{١}{٢}$

∴ المحدد = صفر

مثال ٢١ : باستخدام خواص المحددات أوجد قيمة

$$\begin{vmatrix} \text{٢جتا}^{\text{٢}}\text{س} & \text{١} & \text{٢جا}^{\text{٢}}\text{س} \\ \text{-٢جتا}^{\text{٢}}\text{ص} & \text{-١} & \text{-٢جا}^{\text{٢}}\text{ص} \\ \text{٢جتا}^{\text{٢}}\text{ع} & \text{١} & \text{٢جا}^{\text{٢}}\text{ع} \end{vmatrix}$$

الحـــــــل

$\text{ع}_{\text{١}} + \text{ع}_{\text{٣}}$

$$\begin{vmatrix} \text{٢جتا}^{\text{٢}}\text{س} & \text{١} & \text{٢جا}^{\text{٢}}\text{س} + \text{٢جتا}^{\text{٢}}\text{س} \\ \text{-٢جتا}^{\text{٢}}\text{ص} & \text{-١} & \text{-٢جا}^{\text{٢}}\text{ص} - \text{٢جا}^{\text{٢}}\text{ص} \\ \text{٢جتا}^{\text{٢}}\text{ع} & \text{١} & \text{٢جا}^{\text{٢}}\text{ع} + \text{٢جتا}^{\text{٢}}\text{ع} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \text{٢جتا}^{\text{٢}}\text{س} & \text{١} & \text{٢(جا}^{\text{٢}}\text{س} + \text{جتا}^{\text{٢}}\text{س)} \\ \text{-٢جتا}^{\text{٢}}\text{ص} & \text{-١} & \text{-٢(جا}^{\text{٢}}\text{ص} - \text{جا}^{\text{٢}}\text{ص)} \\ \text{٢جتا}^{\text{٢}}\text{ع} & \text{١} & \text{٢(جا}^{\text{٢}}\text{ع} + \text{جتا}^{\text{٢}}\text{ع)} \end{vmatrix}$$

$$= \text{٢} \begin{vmatrix} \text{٢جتا}^{\text{٢}}\text{س} & \text{١} & \text{١} \\ \text{-٢جتا}^{\text{٢}}\text{ص} & \text{-١} & \text{١} \\ \text{٢جتا}^{\text{٢}}\text{ع} & \text{١} & \text{١} \end{vmatrix}$$

∴ المحدد = صفر لأن $\text{ع}_{\text{١}} = \text{ع}_{\text{٢}}$

ملاحظة:

إذا كان أحد عناصر الصفوف (الأعمدة) = واحد فإنه بالاستفادة بعملية الضرب الخارجي بجعل العناصر المناظرة له أصفار وذلك بضرب العناصر بإشارة مخالفة ثم إضافتها إلي الصفوف أو الأعمدة الأخرى.

مثال ٢٢ : باستخدام الخواص أثبت أن

$$\begin{vmatrix} \text{أ}^{\text{٢}} & \text{أ} & \text{١} \\ \text{أ} & \text{١} & \text{أ}^{\text{٢}} \\ \text{١} & \text{أ}^{\text{٢}} & \text{أ} \end{vmatrix} = \text{(١ - أ}^{\text{٣}}\text{)}^{\text{٢}}$$

الحـــــــل

$\text{ص}_{\text{١}} \times - \text{أ}^{\text{٢}} + \text{ص}_{\text{٢}}$

$\text{ص}_{\text{١}} \times - \text{أ} + \text{ص}_{\text{٣}}$

$$\therefore \text{المحدد} = \begin{vmatrix} \text{أ}^{\text{٢}} & \text{أ} & \text{١} \\ \text{(أ - أ}^{\text{٤}}\text{)} & \text{(١ - أ}^{\text{٣}}\text{)} & \\ \text{(١ - أ}^{\text{٣}}\text{)} & & \end{vmatrix} = \text{(١ - أ}^{\text{٣}}\text{)(١ - أ}^{\text{٣}}\text{)} = \text{(١ - أ}^{\text{٣}}\text{)}^{\text{٢}}$$

مثال ٢٣ : بدون فك المحدد أثبت أن: $\begin{vmatrix} \text{٦ب-٢جـ} & \text{٤أ} & \text{٢} \\ \text{-جـ+٢أ} & \text{٣ب} & \text{١} \\ \text{-٤أ-٦ب} & \text{٢جـ} & \text{-٢} \end{vmatrix} = \text{٠}$

الحـــــل

بأخذ ٢ ع.م من $ص_١$ ، -٢ ع.م من $ص_٣$

$$\therefore \text{٢} \times \text{-٢} \begin{vmatrix} \text{٣ب-جـ} & \text{٢أ} & \text{١} \\ \text{-جـ+٢أ} & \text{٣ب} & \text{١} \\ \text{-٢أ-٣ب} & \text{-جـ} & \text{١} \end{vmatrix}$$

$ع_٢ + ع_٣$

$$\therefore \text{المحدد} = \text{-٤} \begin{vmatrix} \text{٢أ+٣ب-جـ} & \text{٢أ} & \text{١} \\ \text{٢أ+٣ب-جـ} & \text{٣ب} & \text{١} \\ \text{٢أ+٣ب-جـ} & \text{-جـ} & \text{١} \end{vmatrix}$$

$$= \text{-٤(٢أ+٣ب-جـ)} \begin{vmatrix} \text{١} & \text{٢أ} & \text{١} \\ \text{١} & \text{٣ب} & \text{١} \\ \text{١} & \text{-جـ} & \text{١} \end{vmatrix}$$

∴ المحدد = صفر لأن $ع_١ = ع_٣$

مثال ٢٤ : بدون فك المحدد أثبت أن

$$\begin{vmatrix} \text{١} & \frac{\text{ب}}{\text{٢}} & \frac{\text{أ}}{\text{٢}} \\ \text{٢} & \text{ء} & \text{جـ} \\ \text{٤} & \text{٢ب-ء} & \text{٢أ-جـ} \end{vmatrix} = \text{٠}$$

الحـــــل

نأخذ $\frac{١}{٢}$ ع.م من $ص_١$

$$\therefore \frac{\text{١}}{\text{٢}} \begin{vmatrix} \text{٢} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{٢} & \text{ء} & \text{جـ} \\ \text{١} & \text{٢ب-ء} & \text{٢أ-جـ} \end{vmatrix}$$

$ص_٢ + ص_٣$

$\therefore \frac{\text{١}}{\text{٢}} \begin{vmatrix} \text{٢} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{٢} & \text{ء} & \text{جـ} \\ \text{٤} & \text{٢ب} & \text{٢أ} \end{vmatrix}$ ∴ المحدد = صفر لوجود تناسب بين $ص_١$ ، $ص_٣$

<u>مثال ٢٥</u> : أثبت أن

$$\begin{vmatrix} \text{١} & \text{ب جـ} & \text{ب}^{٢}\text{جـ} + \text{جـ}^{٢}\text{ب} \\ \text{١} & \text{جـ أ} & \text{جـ}^{٢}\text{أ} + \text{أ}^{٢}\text{جـ} \\ \text{١} & \text{أ ب} & \text{أ}^{٢}\text{ب} + \text{أ}^{٢}\text{ب} \end{vmatrix} = \text{٠}$$

الحـــــل

$$\therefore \begin{vmatrix} \text{١} & \text{ب جـ} & \text{ب جـ (ب + جـ)} \\ \text{١} & \text{جـ أ} & \text{جـ أ (جـ + أ)} \\ \text{١} & \text{أ ب} & \text{أ ب (أ + ب)} \end{vmatrix}$$

$\text{ص}_1 \times \text{أ} \text{ ، } \text{ص}_2 \times \text{ب} \text{ ، } \text{ص}_3 \times \text{جـ}$

$$\therefore \frac{\text{١}}{\text{أ ب جـ}} \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{أ ب جـ} & \text{أ ب جـ (ب + جـ)} \\ \text{ب} & \text{أ ب جـ} & \text{أ ب جـ (جـ + أ)} \\ \text{جـ} & \text{أ ب جـ} & \text{أ ب جـ (أ + ب)} \end{vmatrix}$$

$$\therefore \frac{\text{١}}{\text{أ ب جـ}} \times \text{أ ب جـ} \times \text{أ ب جـ} \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{١} & \text{ب + جـ} \\ \text{ب} & \text{١} & \text{جـ + أ} \\ \text{جـ} & \text{١} & \text{أ + ب} \end{vmatrix}$$

$\text{ع}_1 + \text{ع}_3$

$$\therefore \text{أ ب جـ} \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{١} & \text{أ + ب + جـ} \\ \text{ب} & \text{١} & \text{أ + ب + جـ} \\ \text{جـ} & \text{١} & \text{أ + ب + جـ} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{أ ب جـ})(\text{أ + ب + جـ}) \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{١} & \text{١} \\ \text{ب} & \text{١} & \text{١} \\ \text{جـ} & \text{١} & \text{١} \end{vmatrix} = \text{٠} \quad \text{لأن } \text{ع}_2 = \text{ع}_3$$

<u>ملاحظة هامة:</u>

$$\begin{vmatrix} \text{س+١} & \text{ل+١} & \text{هـ+١} \\ \text{ص+١} & \text{م+١} & \text{و+١} \\ \text{ع+١} & \text{ن+١} & \text{ع+١} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{س} & \text{ل} & \text{هـ} \\ \text{ص} & \text{م} & \text{و} \\ \text{ع} & \text{ن} & \text{ع} \end{vmatrix}$$

مثال٢٦: أثبت أن : $\begin{vmatrix} \text{س ع}+1 & \text{س ص}+1 & \text{س}^2+1 \\ \text{ص ع}+1 & \text{ص}^2+1 & \text{س ص}+1 \\ \text{ع}^2+1 & \text{ص ع}+1 & \text{س ع}+1 \end{vmatrix} = 0$

الحـــــل

$$= \begin{vmatrix} \text{س ع} & \text{س ص} & \text{س}^2 \\ \text{ص ع} & \text{ص}^2 & \text{س ص} \\ \text{ع}^2 & \text{ص ع} & \text{س ع} \end{vmatrix}$$

$$= \text{س ص ع} \begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ص} & \text{س} \\ \text{ع} & \text{ص} & \text{س} \\ \text{ع} & \text{ص} & \text{س} \end{vmatrix} = 0$$

مثال٢٧: بدون فك المحدد اثبت أن $\begin{vmatrix} \text{أ}^2-\text{ب جـ} & \text{أ} & 1 \\ \text{ب}^2-\text{جـ أ} & \text{ب} & 1 \\ \text{جـ}^2-\text{أ ب} & \text{جـ} & 1 \end{vmatrix} = 0$

الحـــــل

نجزئ المحدد

$$\therefore \begin{vmatrix} \text{ب جـ} & \text{أ} & 1 \\ \text{جـ أ} & \text{ب} & 1 \\ \text{أ ب} & \text{جـ} & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \text{أ}^2 & \text{أ} & 1 \\ \text{ب}^2 & \text{ب} & 1 \\ \text{جـ}^2 & \text{جـ} & 1 \end{vmatrix}$$

$\text{ص}_1 \times \text{أ}$ ، $\text{ص}_2 \times \text{ب}$ ، $\text{ص}_3 \times \text{جـ}$

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{أ}^2 & \text{أ} \\ 1 & \text{ب}^2 & \text{ب} \\ 1 & \text{جـ}^2 & \text{جـ} \end{vmatrix} \frac{\text{أ ب جـ}}{\text{أ ب جـ}} - \begin{vmatrix} \text{أ}^2 & \text{أ} & 1 \\ \text{ب}^2 & \text{ب} & 1 \\ \text{جـ}^2 & \text{جـ} & 1 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \begin{vmatrix} \text{أ}^2 & \text{أ} & 1 \\ \text{ب}^2 & \text{ب} & 1 \\ \text{جـ}^2 & \text{جـ} & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \text{أ}^2 & \text{أ} & 1 \\ \text{ب}^2 & \text{ب} & 1 \\ \text{جـ}^2 & \text{جـ} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

بدلنا ع_1 مع ع_3 ، ع_2 مع ع_3

مثال٢٨: أوجد مجموعة الحل أ، أثبت أن ك = ٢ تحقق هذه المعادلة

أ، أثبت أن ك = ٢ جذرا لهذه المعادلة

الحـــــل

$$\begin{vmatrix} \text{١٠-ك} & \text{-٦} & \text{٢} \\ \text{-٦} & \text{٩-ك} & \text{-٤} \\ \text{٢} & \text{-٤} & \text{٥-ك} \end{vmatrix} = \text{٠}$$

$\text{٢} (\text{ع}_{\text{٢}} + \text{ع}_{\text{٣}}) + \text{ع}_{\text{١}} = \acute{\text{ع}}_{\text{١}}$

$$\begin{vmatrix} \text{٢-ك} & \text{-٦} & \text{٢} \\ \text{٤-٢ك} & \text{٩-ك} & \text{-٤} \\ \text{٤-٢ك} & \text{-٤} & \text{٥-ك} \end{vmatrix} = \text{٠}$$

$$\begin{vmatrix} \text{(٢-ك)} & \text{-٦} & \text{٢} \\ \text{٢(٢-٢ك)} & \text{٩-ك} & \text{-٤} \\ \text{٢(٢-٢ك)} & \text{-٤} & \text{٥-ك} \end{vmatrix} = \text{٠}$$

$\text{٢} (\text{ع}_{\text{٢}} + \text{ع}_{\text{٣}})$

$$\text{(٢-ك)} \begin{vmatrix} \text{١} & \text{-٦} & \text{٢} \\ \text{٢} & \text{٩-ك} & \text{-٤} \\ \text{٢} & \text{-٤} & \text{٥-ك} \end{vmatrix} = \text{٠}$$

ص١ × -٢ ثم إضافته إلى ص٢ ، ص٣

$$\text{٢-ك} \begin{vmatrix} \text{١} & \text{-٦} & \text{٢} \\ \text{٠} & \text{٢١-ك} & \text{-٨} \\ \text{٠} & \text{٨} & \text{١-ك} \end{vmatrix} = \text{٠}$$

$$\text{(٢-ك)} \begin{vmatrix} \text{٢١-ك} & \text{-٨} \\ \text{٨} & \text{١-ك} \end{vmatrix} = \text{٠}$$

$\text{(٢-ك)} (\text{٢١-٢١ك} - \text{ك} + \text{ك}^{\text{٢}} + \text{٦٤}) = \text{٠}$

$\text{(٢-ك)} (\text{ك}^{\text{٢}} - \text{٢٢ك} + \text{٨٥}) = \text{٠}$

$\text{(٢-ك)} (\text{ك-١٧}) (\text{ك-٥}) = \text{٠}$

∴ ك = ٢ ، ك = ٥ ، ك = ١٧

∴ مجموعة الحل {٢ ، ٥ ، ١٧}

مثال٢٩ : باستخدام خواص المحددات أوجد مجموعة الحل للمعادلة

$$\begin{vmatrix} س-١ & -١ & ٢ \\ -١ & س+٢ & -١ \\ ٢ & -١ & س-١ \end{vmatrix} = ٠$$

الحـــــل

$ص_١ + ص_٢ + ص_٣ \rightarrow ص'_١$

$$\begin{vmatrix} س & س & س \\ -١ & س+٢ & -١ \\ ٢ & -١ & س-١ \end{vmatrix} = ٠$$

$$س \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ -١ & س+٢ & -١ \\ ٢ & -١ & س-١ \end{vmatrix} = ٠$$

$ع_١ \times -١$ ثم إضافته إلي كل من $ع_٢$ ، $ع_٣$

$$س \begin{vmatrix} ١ & & \\ -١ & س+٣ & \\ ٢ & -٣ & س-٣ \end{vmatrix} = ٠$$

س (س+٣) (س-٣) = ٠

س = ٠ ، س = -٣ ، س = ٣

∴ مجموعة الحل {٠ ، ± ٣}

مثال٣٠: أثبت بالخواص

$$\begin{vmatrix} س+ص+ع & -ع & -ص \\ -ع & س+ص+ع & -س \\ -ص & -ع & س+ص+ع \end{vmatrix} = ٢(س+ص) (ص+ع) (ع+س)$$

الحـــــل

∴ $ص_١ + ص_٢ \rightarrow ص'_٢$ ، $ص_١ + ص_٣ \rightarrow ص'_٣$

$$\therefore \text{المحدد} = \begin{vmatrix} -\text{ص} & -\text{ع} & \text{س}+\text{ص}+\text{ع} \\ -(\text{س}+\text{ص}) & \text{س}+\text{ص} & \text{س}+\text{ص} \\ \text{س}+\text{ع} & -(\text{س}+\text{ع}) & \text{س}+\text{ع} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{س}+\text{ص})(\text{س}+\text{ع}) \begin{vmatrix} -\text{ص} & -\text{ع} & \text{س}+\text{ص}+\text{ع} \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$\text{ص}_1 + \text{ص}_2 \leftarrow \text{صَ}_2$

$$(\text{س}+\text{ص})(\text{س}+\text{ع}) \begin{vmatrix} -\text{ص} & -\text{ع} & \text{س}+\text{ص}+\text{ع} \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\text{س}+\text{ص})(\text{س}+\text{ع}) \times -2 \begin{vmatrix} -\text{ص} & -\text{ع} \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (\text{س}+\text{ص})(\text{س}+\text{ع}) \times -2(-\text{ع} - \text{ص})$$

$$= 2(\text{س}+\text{ص})(\text{ص}+\text{ع})(\text{ع}-\text{س})$$

مثال ٣١: باستخدام المحددات اثبت أن:

$$\begin{vmatrix} \text{أجـ} & \text{أب} & \text{أ}^2+1 \\ \text{بجـ} & \text{ب}^2+1 & \text{أب} \\ \text{جـ}^2+1 & \text{بجـ} & \text{أجـ} \end{vmatrix} = \text{أ}^2 + \text{ب}^2 + \text{جـ}^2 + 1$$

الحـــــل

بالتجــــزئ

$$\text{المحدد} = \begin{vmatrix} \text{أجـ} & \text{أب} & \text{أ}^2 \\ \text{بجـ} & \text{ب}^2+1 & \text{أب} \\ \text{جـ}^2+1 & \text{بجـ} & \text{أجـ} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \text{بجـ} & \text{ب}^2+1 & \text{أب} \\ \text{جـ}^2+1 & \text{بجـ} & \text{أجـ} \end{vmatrix}$$

أ ع. م من ص_1 ، أ ع. م من ع_1

$$\therefore \text{أ} \times \text{أ} \begin{vmatrix} \text{جـ} & \text{ب} & 1 \\ \text{بجـ} & \text{ب}^2+1 & \text{ب} \\ \text{جـ}^2+1 & \text{بجـ} & \text{أجـ} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{بجـ} & \text{ب}^2+1 \\ \text{جـ}^2+1 & \text{بجـ} \end{vmatrix}$$

$\text{ص}_1 \times -\text{ب} + \text{ص}_2 \leftarrow \text{صَ}_2$

$\text{ص}_1 \times -\text{جـ} + \text{ص}_3 \leftarrow \text{صَ}_3$

$$\therefore أ^2 \begin{vmatrix} جـ & ب & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{vmatrix} + ب^2 جـ^2 + ب^2 + جـ^2 + ١ - ب^2 جـ^2$$

$$= أ^2 + ب^2 + جـ^2 + ١$$

ملاحظة هامة:

إذا كان المجهول س متواجد في عناصر صف أو عمود ساوي س (من الدرجة الأولى) بالقيم المناظرة لها .

مثال ٣٢: أوجد مجموعة الحل للمعادلة أو أوجد جذور المعادلة أو أوجد س التي تجعل

$$\begin{vmatrix} س^3 & س^2 & س & ١ \\ ١ & ١ & ١ & ١ \\ ١- & ١ & ١- & ١ \\ ٨ & ٤ & ٢ & ١ \end{vmatrix} = ٠$$

الحـــــل

س = ١ $\therefore$ ص١ = ص٢ ← $\Delta = ٠$

س = -١ ص١ = ص٣ ← $\Delta = ٠$

س = ٢ ص١ = ص٤ ← $\Delta = ٠$

$\therefore$ مجموعة الحل { ± ١ ، ٢ }

مثال ٣٣: إذا كان $\begin{vmatrix} ١ & س-٢ & ٠ \\ ٨ & س^2-١ & ٣ \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix} = ٠$ فإن س = ---- أو ----

الحـــــل

س - ٢ = ٠ س = ٢

$\therefore$ ع١ = ع٢ $\Delta = ٠$

، س - ٢ = ١ س = ٣

$\therefore$ ع٢ = ع٣ $\Delta = ٠$

تمارين (١٣)

(١) بدون فك المحدد وضح أن كلا من المحددات الآتية يساوي المحدد $\begin{vmatrix} -١ & ٢ \\ ٥ & -٦ \end{vmatrix}$ مع ذكر الخاصية التي استخدمت في كل حالة.

[أ] $\begin{vmatrix} -٦ & ٢ \\ ٥ & -١ \end{vmatrix}$ [ب] $\begin{vmatrix} -٥ & ٦ \\ -١ & ٢ \end{vmatrix}$ [ج] $\begin{vmatrix} ٤ & -٤ \\ ٥ & -٦ \end{vmatrix}$

[د] $\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ -١ & ٢ & ٣ \\ ٥ & -٦ & -٤ \end{vmatrix}$ [هـ] $\begin{vmatrix} -٣ & -١ & ١ \\ -١ & ٢ & ٠ \\ ٥ & -٦ & ٠ \end{vmatrix}$ [و] $\begin{vmatrix} ٠ & -١ & ١ \\ -١ & ٢ & -١ \\ ٥ & -٦ & ٥ \end{vmatrix}$

(٢) بدون فك المحدد وضح أن كلا من المحددات الآتية يساوي صفر مع ذكر الخاصية التي استخدمت في كل حالة .

[أ] $\begin{vmatrix} -٢ & ١ \\ -٢ & ١ \end{vmatrix}$ [ب] $\begin{vmatrix} ٥ & ١ \\ ٠ & ٠ \end{vmatrix}$ [ج] $\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix}$

[د] $\begin{vmatrix} -٥ & ١ & ٠ \\ -٣ & ٠ & -١ \\ ٠ & ٣ & ٥ \end{vmatrix}$ [هـ] $\begin{vmatrix} ٢ & -١ & ١ \\ -١ & ٢ & ٣ \\ ١ & ١ & ٤ \end{vmatrix}$ [و] $\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ -١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & -٤ & ٥ \end{vmatrix}$

(٣) باستخدام خصائص المحددات أوجد قيم المحددات الآتية:

[أ] $\begin{vmatrix} ١ & ١ & \text{س} \\ ١ & \text{س} & ١ \\ \text{س} & ١ & ١ \end{vmatrix}$ [ب] $\begin{vmatrix} ١ & ١ & \text{ص}+\text{ع} \\ ١ & \text{س}+\text{ع} & \text{ص} \\ \text{س}+\text{ص} & \text{ع} & \text{ع} \end{vmatrix}$

[ج] $\begin{vmatrix} ٦ & -٥ & ٠ \\ -٢ & ٠ & ٥ \\ ٠ & ٢ & ٦ \end{vmatrix}$

(٤) أثبت أن:

[أ] $\begin{vmatrix} ١ & أ & أ^{٣} \\ ١ & ب & ب^{٣} \\ ١ & جـ & جـ^{٣} \end{vmatrix}$ = (أ- ب) (ب – جـ) (جـ- أ) (أ+ ب+ جـ)

[ب] $\begin{vmatrix} س & أ & أ \\ أ & س & أ \\ أ & أ & س \end{vmatrix}$ = (س+ ٢أ) (س- أ)^{٢}

[ج] $\begin{vmatrix} ١+ س^{٢} & س & ٠ \\ س & ١+ س^{٢} & س \\ ٠ & س & ١+ س^{٢} \end{vmatrix}$ = ١+ س^{٢}+ س^{٤} + س^{٦}

(٥) أثبت أن :

$\begin{vmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{vmatrix} \begin{vmatrix} س & ص \\ ع & ك \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} أس + ب ع & أ ص + ب ك \\ جـ س+ د ع & جـ ص + دك \end{vmatrix}$

ثم عمم هذه القاعدة بالنسبة للمحددات من الدرجة ٣ .

حل المعادلات الخطية

شكل المعادلات الخطية :

هي معادلات من الدرجة الأولي تحتوي كل مجموعة منها علي نفس العدد من المجاهيل .

مثل:
٢س + ٥ص = ١٢
٣س+ ٤ص = ١١
} معادلات خطية ذات مجهولين

، س+ ٣ص + ٢ع =١٣
٢س- ٢ص + ٢ع= ٧
٤س + ٥ص + ٢ع = ٤
} معادلات خطية ذات ثلاث مجاهيل

حل المعادلات الخطية بطريقة المحددات (كرامر)

طريقة الحل:

١- نوجد محدد المعاملات .

٢- نستبدل $ع_١$ بعمود الثوابت ونوجد $\Delta_١$

٣- نستبدل $ع_٢$ بعمود الثوابت ونوجد $\Delta_٢$

$$\therefore س = \frac{\Delta_١}{\Delta} \quad ، \quad ص = \frac{\Delta_٢}{\Delta}$$

مثال: حل المعادلتين س+ ص = ٥ ، ٢س – ص = ١

الحـــــــل

$$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ١- \end{vmatrix} = -١ -٢ = -٣$$

$$\therefore \Delta_١ = \begin{vmatrix} ٥ & ١ \\ ١ & ١- \end{vmatrix} = -٥ -١ = -٦$$

$$\therefore \Delta_٢ = \begin{vmatrix} ١ & ٥ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} = ١- ١٠ = -٩$$

$$\therefore س = \frac{\Delta_١}{\Delta} = \frac{-٦}{-٣} = ٢ \quad ، \quad ص = \frac{\Delta_٢}{\Delta} = \frac{-٩}{-٣} = ٣$$

∴ مجموعة الحل هي { (٢،٣)}

مثال: أوجد مجموعة الحل للمعادلات الآتية :-

٢س+ ص- ٢ع = ١٠

٣س+ ٢ص+ ٢ع = ١

٥س+ ٤ص+ ٣ع = ٤

الحـــــــل

$$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & -٢ \\ ٣ & ٢ & ٢ \\ ٥ & ٤ & ٣ \end{vmatrix} = ٢\begin{vmatrix} ٢ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{vmatrix} -١\begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ٣ \end{vmatrix} -٢\begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ٤ \end{vmatrix}$$

$$= ٢(٦-٨) -١(٩-١٠) -٢(١٢-١٠)$$

$$\therefore \Delta = -٧$$

، $\because \Delta \neq$ صفر $\qquad \therefore$ مجموعة المعادلات لها حل وحيد

$$\therefore \Delta_١ = \begin{vmatrix} ١٠ & ١ & -٢ \\ ١ & ٢ & ٢ \\ ٤ & ٤ & ٣ \end{vmatrix} = ١٠(-٢) -١(-٥) = -٢ \times -٤ = -٧$$

$$\therefore \Delta_٢ = \begin{vmatrix} ٢ & ١٠ & -٢ \\ ٣ & ١ & ٢ \\ ٥ & ٤ & ٣ \end{vmatrix} = ٢(-٥) -١٠(-١) = -٢ \times ٧ = -١٤$$

$$\therefore \Delta_٣ = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ١٠ \\ ٣ & ١ & ١ \\ ٥ & ٤ & ٤ \end{vmatrix} = ٢ \times ٤ -١ \times ٧ + ١٠ \times ٢ = ٢١$$

$\therefore$ س $= \dfrac{\Delta_١}{\Delta} = \dfrac{-٧}{-٧} = ١$ ، ص $= \dfrac{\Delta_٢}{\Delta} = \dfrac{-١٤}{-٧} = ٢$

ع $= \dfrac{\Delta_٣}{\Delta} = \dfrac{-٢١}{-٧} = -٣$

$\therefore$ مجموعة الحل هي { (١، ٢ ، -٣)}

ملاحظة :

يمكن التأكد من صحة الحل بالتعويض بقيمة كل من س، ص ، ع في أحد المعادلات الثلاثة فيتساوى طرفاها.

تمارين (١٤)

(١) حل المعادلات الآتية بطريقة كرامر:-

(أ) ٢س+ ص= ٢ ، ٣س+ ٢ص =٥

(ب) - س + ص =٢ ، ٢س+ ٣ص = ١

(ج) س + ٥ ص =٥ ، ٢س+ ص = ٠

(د) ٢س – ٥ ص =١ ، - س+ ص =٢

(٢) حل المعادلات الآتية بطريقة كرامر:-

(أ) س + ٣ص+ ٢ع=١٣ ، ٢س- ص+ ع=٣ ، ٣س+ ص- ع= ٢

(ب) ٢س+ ص- ٢ع =١٠ ، ٣س+ ٢ص+ ٢ع=١ ، ٥س+ ٤ص+ ٣ع =٤

(ج) س+٢ص- ٢ع= ١٠ ، ٢س- ص- ٤ع = ٢ ، ٤س+ ٣ص- ٢ع = ١٤

(د) س+٢ ص- ٣ع= ٦ ، ٢س- ص+ ع = -٣ ، - س -٢ص + ٢ع = -١

(ه) ٢س+ ص +٣ع= -٢ ، ٣س- ٢ص- ٢ع =٧ ، س- ص+ ع= ١

(و) ٢ع = ٥ ، ٣ص = -١ ، ٥ س = ١

تمارين غير محلولة

١- أثبت أن :

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{س} & \text{س}^{2} \\ \text{أ} & 1 & \text{س} \\ \text{ب} & \text{جـ} & 1 \end{vmatrix} = (1 - \text{جـ س})(1 - \text{أ س})$$

٢- بدون فك المحدد أثبت أن :

$$\begin{vmatrix} \text{س}+\text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{أ} & \text{س}+\text{ب} & \text{جـ} \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{س}+\text{جـ} \end{vmatrix} = \text{س}^{3} + (\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ})\,\text{س}^{2}$$

٣- أثبت أن :

$$\begin{vmatrix} \text{س}^{2}+1 & \text{س ص} & \text{س ع} \\ \text{س ص} & \text{ص}^{2}+1 & \text{ص ع} \\ \text{س ع} & \text{ص ع} & \text{ع}^{2}+1 \end{vmatrix} = \text{س}^{2}+\text{ص}^{2}+\text{ع}^{2}+1$$

٤- أثبت أن :

$$\begin{vmatrix} \text{جا أ} & \text{جتا أ} & 1 \\ \text{جا ب} & \text{جتا ب} & 1 \\ \text{جا جـ} & \text{جتا جـ} & 1 \end{vmatrix} = \text{جا}(\text{أ}-\text{ب}) + \text{جا}(\text{ب}-\text{جـ}) + \text{جا}(\text{جـ}-\text{أ})$$

٥- أثبت أن لكل أ ، ب ، جـ $\in$ ح فإن جذور المعادلة

$$\begin{vmatrix} \text{أ}-\text{س} & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{جـ}-\text{س} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

(تكون أعداداً حقيقية)

٦- أثبت أن :

$$\begin{vmatrix} 2+3\text{ت} & 4+5\text{ت} \\ -4+5\text{ت} & 2-3\text{ت} \end{vmatrix} = 2^{2}+3^{2}+4^{2}+5^{2}$$

ومن ذلك ضع $1^{2}+3^{2}+5^{2}+7^{2}$ في صورة محدد

٧- أثبت أن :

$$\begin{vmatrix} 1+\text{أ} & 1 & 1 \\ 1 & 1+\text{ب} & 1 \\ 1 & 1 & 1+\text{جـ} \end{vmatrix} = \text{أ ب جـ}\left(\frac{1}{\text{أ}} + \frac{1}{\text{ب}} + \frac{1}{\text{جـ}} + 1\right)$$

٨- حل المعادلات الآتية باستخدام كرامر :

$$7\text{س} - 3\text{ص} - 3\text{ع} = 8$$
$$-\text{س} + \text{ص} = -1$$
$$-\text{س} + \text{ع} = -1$$

ثانياً: الهندسة الفراغية

الباب الأول

المستقيمات والمستويات

مفاهيم ومسلمات:-

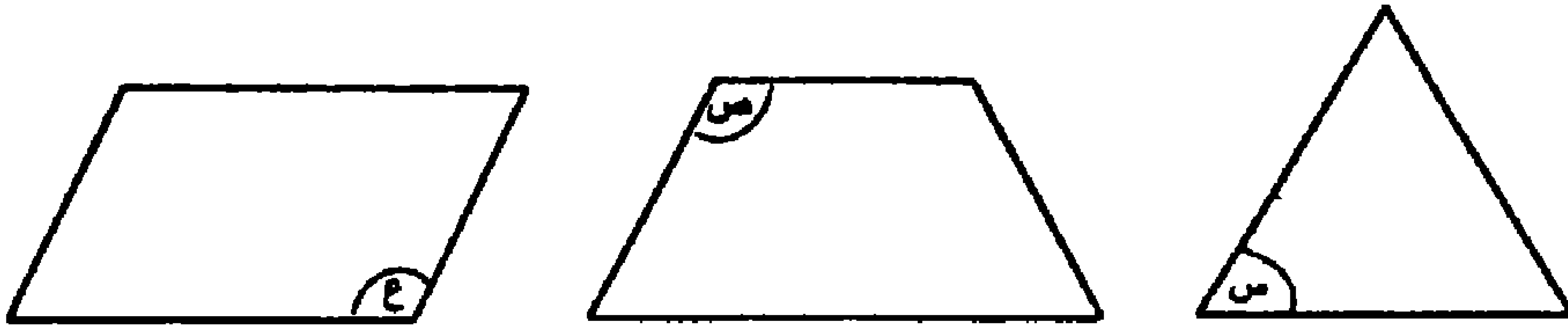
الهندسة الفراغية هي العلم الذي يدرس خواص المستقيمات والمستويات والمجسمات في الفراغ والعلاقة بينهما جميعاً.

المستقيم الهندسي :

عبارة عن مجموعة غير منتهية من النقط وأي نقطتين مختلفتين يمر بهما مستقيم واحد.

المستوي:

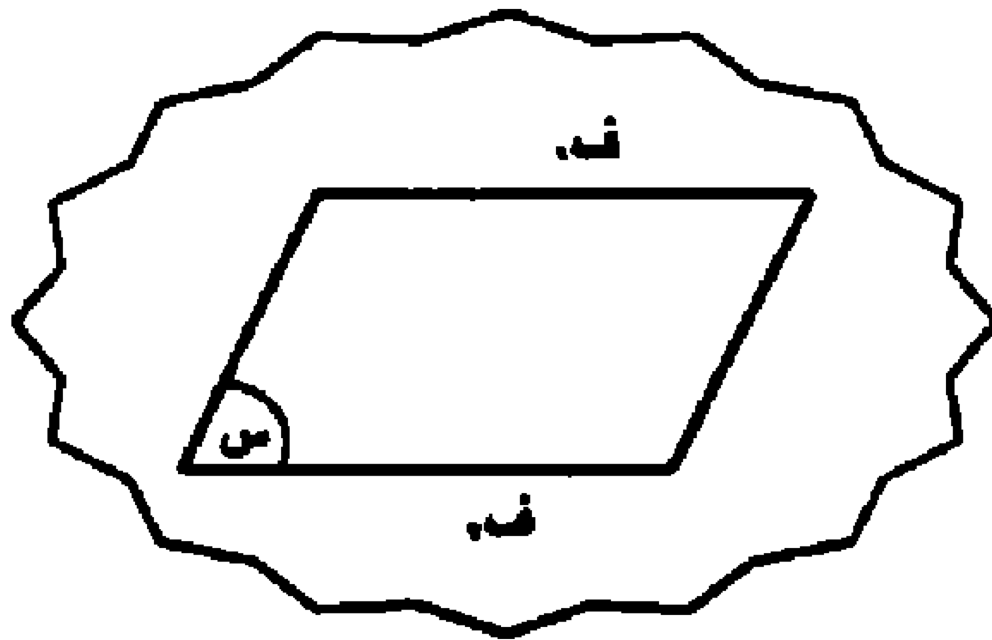
عبارة عن مجموعة غير منتهية من النقط ينطبق عليها مستقيم في جميع الاتجاهات [المستوي لا أول له ولا آخر من جميع جهاته] ويرمز للمستوي عادة بأحد الحروف الكبيرة مثل س ، ص ويمثل المستوي الممتد من جميع جهاته بجزء محدود منه علي شكل مثلث أو شكل رباعي .



الفراغ (أو الفضاء) (ف):

هو مجموعة غير منتهية من النقط يحتوي جميع الأجسام أو المستويات (كل ما تفكر فيه من الأشكال) وبذلك يكون الفراغ بمثابة المجموعة الشاملة .

تجزئة الفراغ بأي مستوي :-



المستوي س يجزء الفراغ ف إلي ثلاث مجموعات منفصلة من النقط هي المستوي س نفسه ونصفا الفراغ ف١ ، ف٢ ويسمي المستوي س حداً (وجها) لكل من نصفي الفراغ رغم عدم وقوعه في أي منهما .

ونجد أن: $ف_١ \cap ف_٢ = \phi$ ، $ف = ف_١ \cup س \cup ف_٢$

تعيين المستوي في الفراغ:-

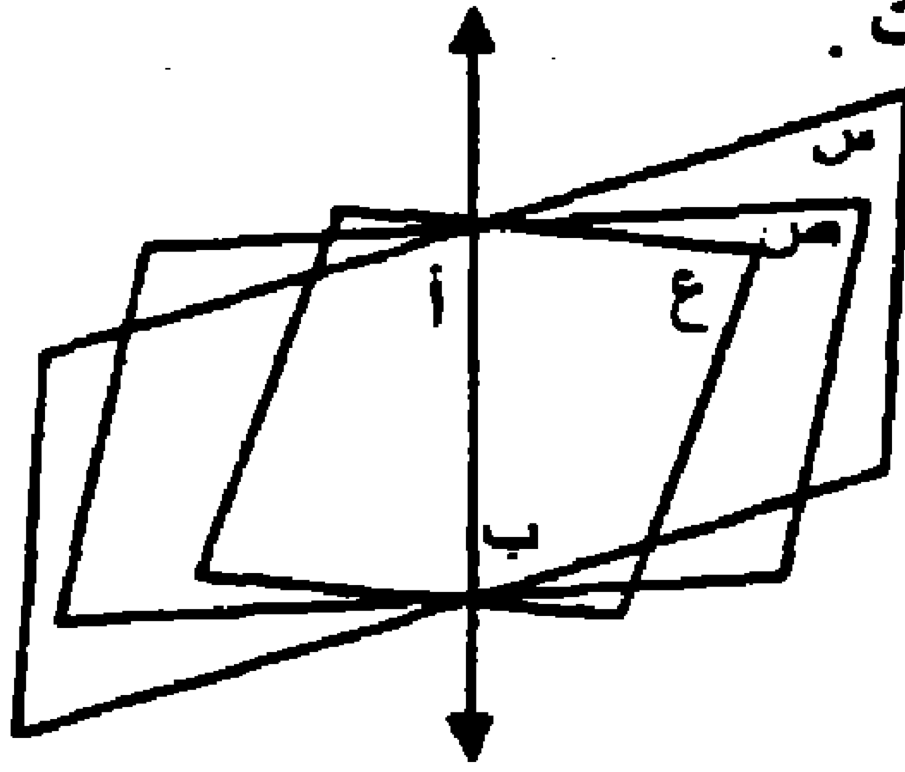
نعلم أن أي نقطة في المستوي يمر بها عدد لانهاني من المستقيمات .

في الفراغ:

١- أي نقطة في الفراغ يمر بها عدد لا نهاني من المستويات .

٢- أي مستقيم في الفراغ يمر بها عدد لا نهاني من المستويات .

كما بالرسم



- نقطة أ في الفراغ يمر بها عدد لا نهاني من المستويات .
- $\overleftrightarrow{أب}$ مستقيم في الفراغ يمر به عدد لا نهاني من المستويات.

حالات تعيين المستوي:

(١) ثلاث نقط ليست علي استقامة واحدة .

(٢) مستقيمان متقاطعان .

(٣) مستقيم ونقطة لا تنتمي إليه .

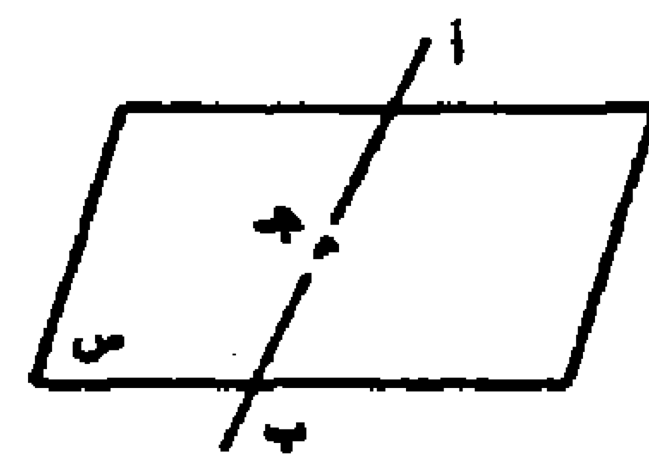
(٤) مستقيمان متوازيان .

نتيجة : إذا اشترك مستويات في ثلاث نقط ليست علي استقامة واحدة فانهما ينطبقان ويصبحان مستوياً واحداً .

الأوضاع النسبية لمستقيم ومستوي:-

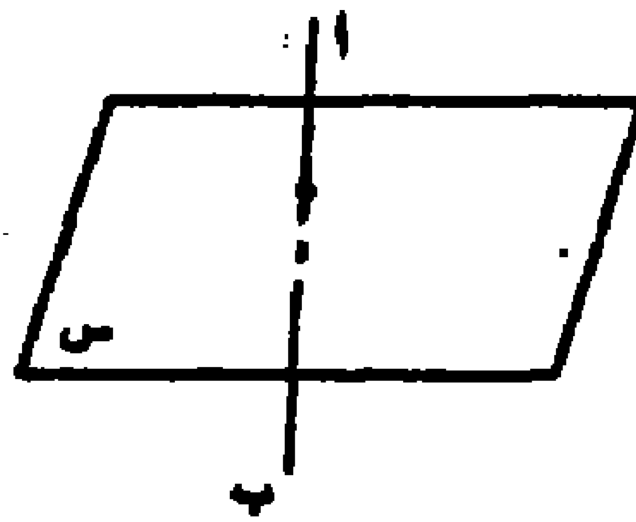
(١) المستقيم قاطع للمستوي س:

قد يلاقى المستوي في نقطة واحدة فيقال أن المستقيم قاطع للمستوى وقد يكون عمودياً علي المستوى أو مائلا عليه.



مستقيم قاطع للمستوي

(مائل)

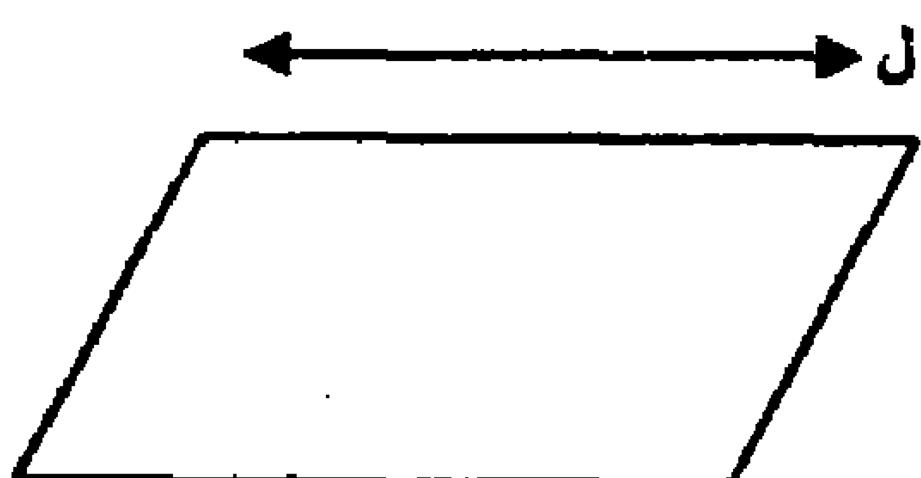


مستقيم قاطع للمستوى

(عمودى)

∴ المستقيم يقطع المستوى في جـ

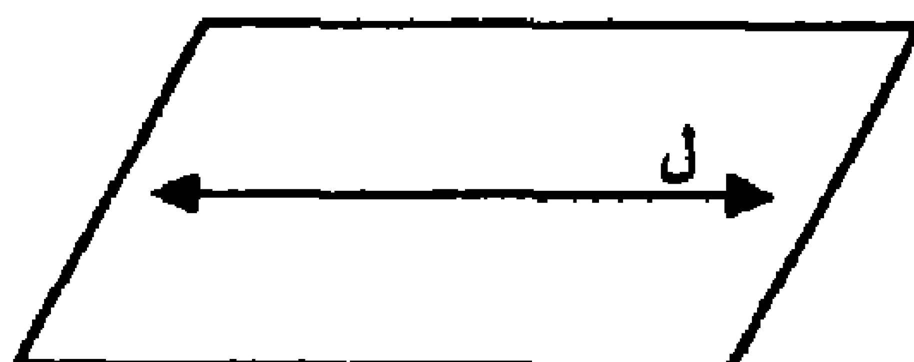
(٢) قد لا يقطع المستقيم في أي نقطة فيقال أن المستقيم يوازى المستوى .



مثلاً : المستقيم أ ب يوازي المستوي س لأنه لا يشترك معه في أي نقطة .

∴ ل ∩ س = ϕ

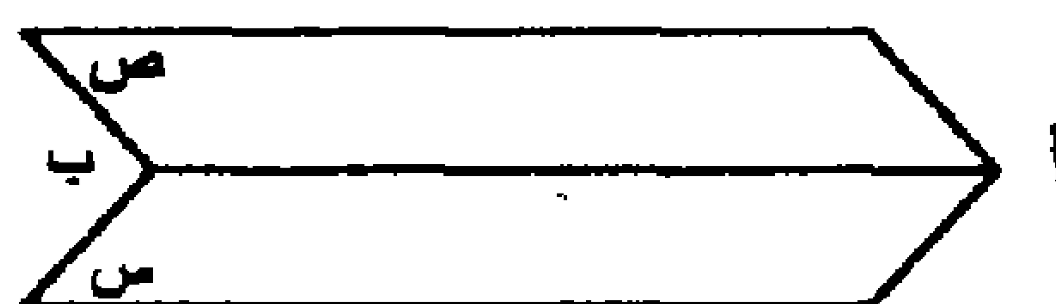
(٣) قد يشترك المستقيم مع المستوى في نقطتين فيقال إن المستقيم واقع فى المستوى مثل س فى الحالة التي تكون فيها جميع نقط المستقيم ل ممتداً إلى ما لانهاية واقعة فى المستوى س .



∴ ل ⊂ س ∴ ل ∩ س = ل

الأوضاع النسبية لمستويين:

(١) قد يكون المستويان متقاطعين . والمستويان يتقاطعان في خط مستقيم .

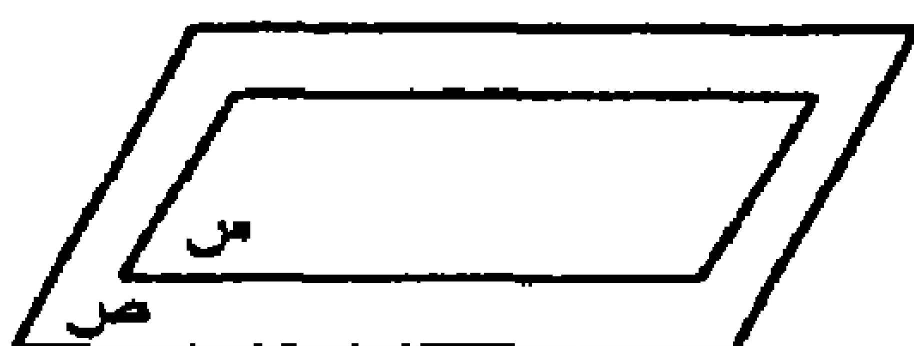


∴ س ∩ ص = $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

(٢) قد يشترك المستويان في جميع النقط فيقال إنهما متطابقان .

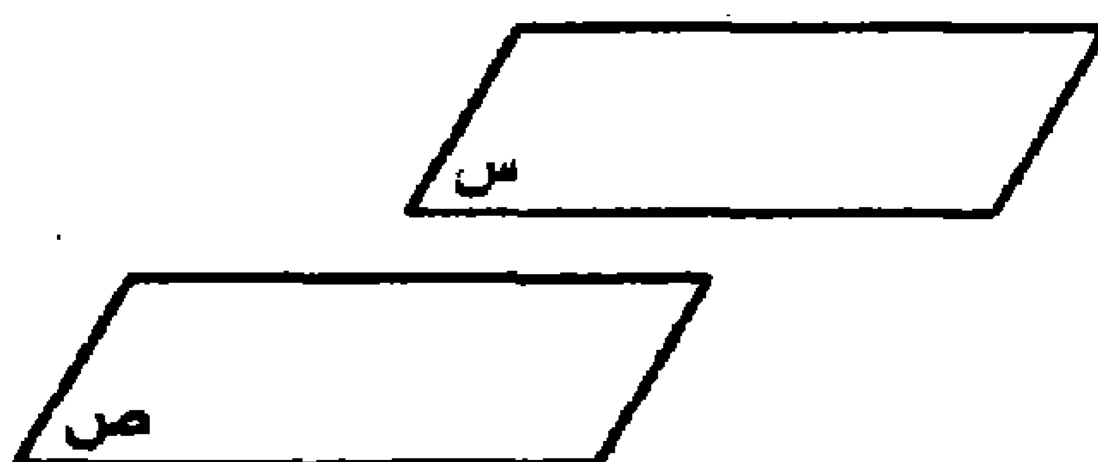
ويكون المستوى س هو نفسه المستوى ص

∴ س = ص



(٣) قد لا يشترك المستويان في أي نقطة مهما امتدا فيقال أنهما متوازيان

∴ س ∩ ص = ϕ



ملاحظة:

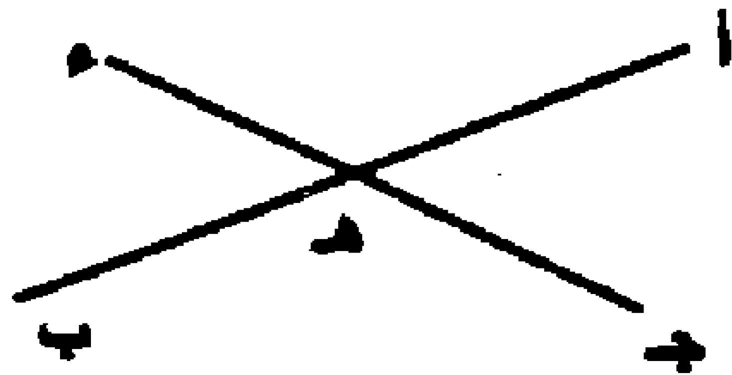
إذا اشترك مستويان مختلفان في نقطة فإنهما يشتركان في مستقيم يمر بهذه النقطة.

الأوضاع لنسبية لمستقيمين مختلفين في الفراغ :

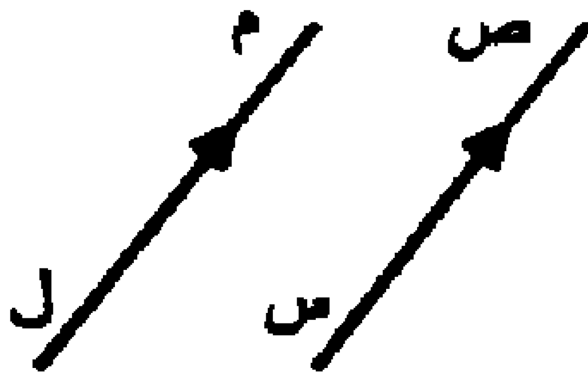
(١) قد يكون المستقيمان في الفراغ متقاطعين وهما في مستو واحد مثل المستقيمان أ ب ، جـ ء المتقاطعان في هـ .

∴ [١] أ ب ∩ جـ ء = {هـ}

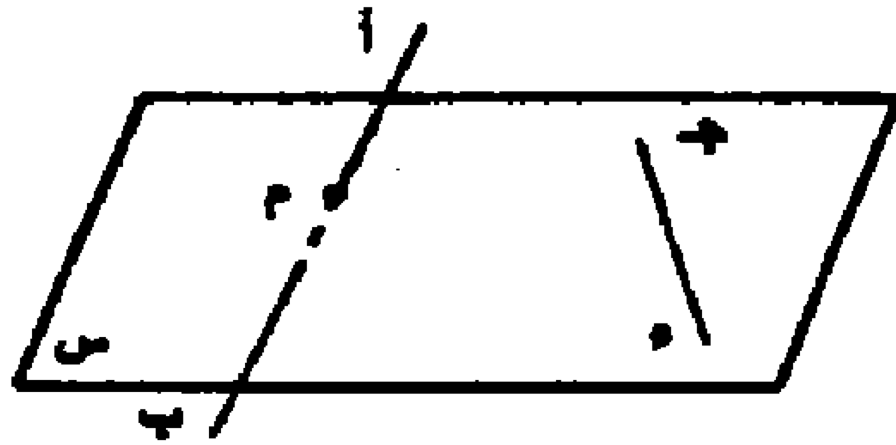
[٢] أ ب ، جـ ء يقعان في مستوي واحد .



(٢) قد يكون المستقيمان متوازيين مثل المستقيمين س ص ، ل م وهما أيضاً في مستو واحد ولا يتلاقيان مهما امتدا .

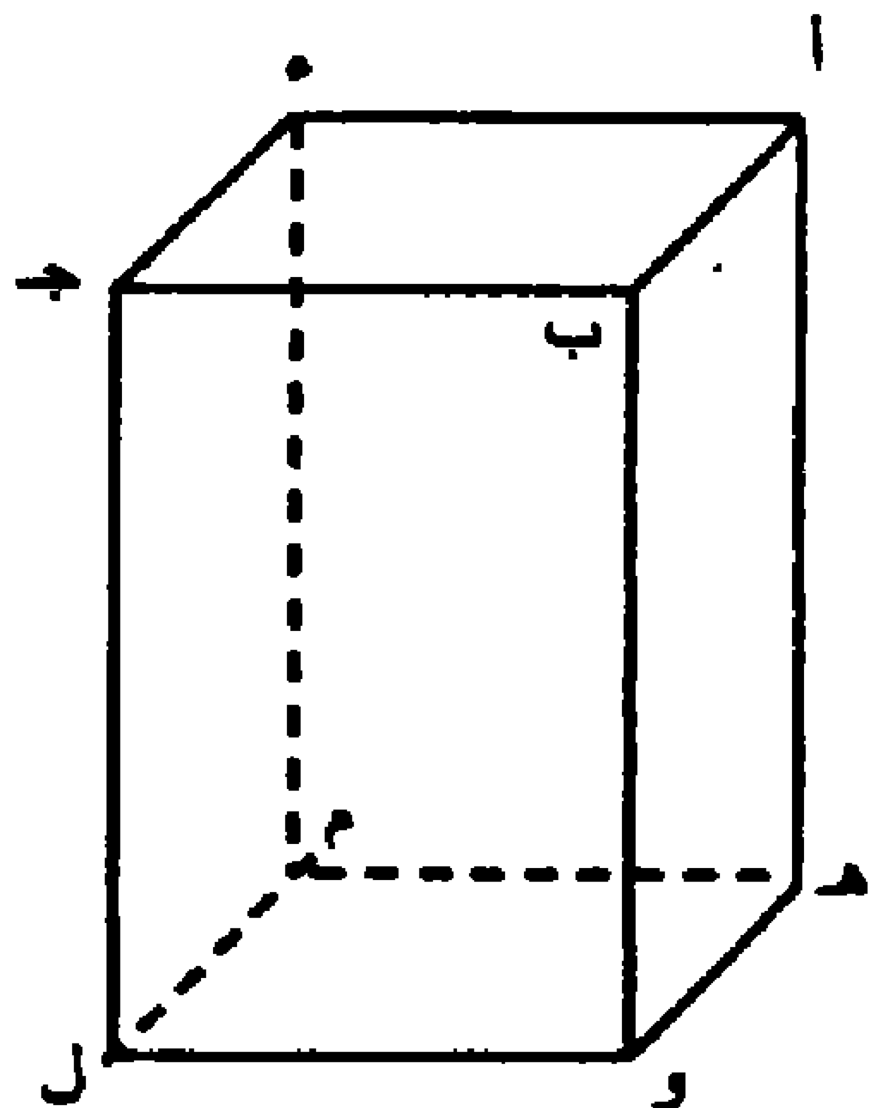


(٣) قد لا يكون المستقيمان في مستو واحد أي لا يمكن أن يوجد مستو واحد يجمعهما وفي هذه الحالة يقال إن المستقيمين غير مستويين معاً أو أنهما متخالفان.



فمثلاً: أ ب يقطع المستوى س في نقطة م والمستقيم جـ ء واقع في المستوى س ولا يمر بنقطة م فيقال أن أ ، ب ، جـ ء مستقيمان متخالفان.

∴ [١] أ ب ∩ جـ ء = ϕ [٢] أ ب ، جـ ء لا يقعان في مستوى واحد .



مثال: من الشكل الذي أمامك :

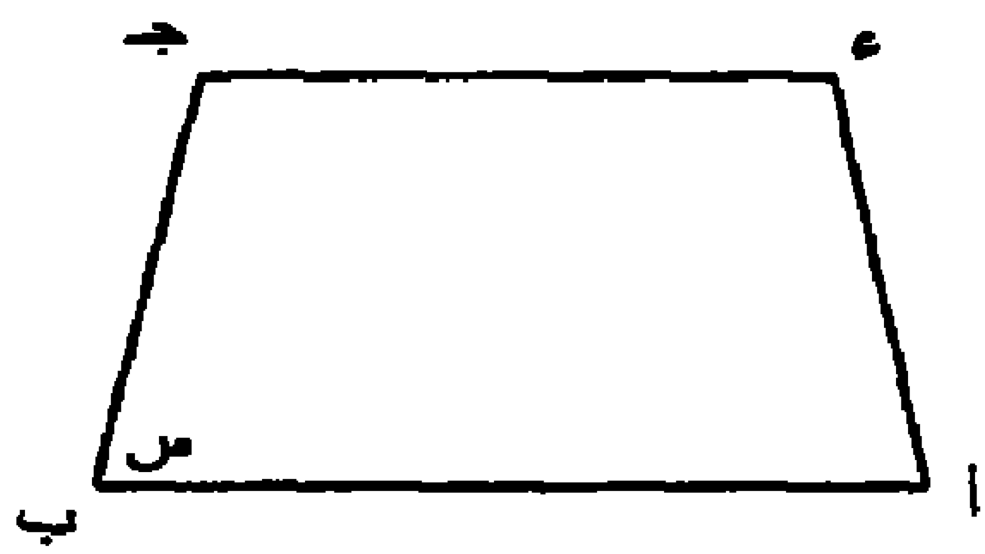
١- أذكر مستقيمين يوازيان ب و
٢- أذكر مستقيمين يوازيان ل و
٣- أذكر مستقيمين يوازيان المستوى ب و ل جـ
٤- أذكر مستقيمين يوازيان المستوى هـ و ل م
٥- أذكر مستقيمين يوازيان المستوى أ ب و هـ
٦- أذكر مستوياً يوازي المستوى أ هـ م ء
٧- أذكر مستقيمين متخالفين أحدهما ء جـ
٨- أذكر مستقيمين متخالفين أحدهما أ هـ

الحـــــــل

(١) ء م ، جـ ل (٢) هـ م ، ب جـ (٣) أ هـ ، ء م
(٤) أ ب ، ء جـ (٥) ء م ل جـ (٦) ب و ل جـ
(٧) و ل ، هـ م (٨) ء جـ ، م ل

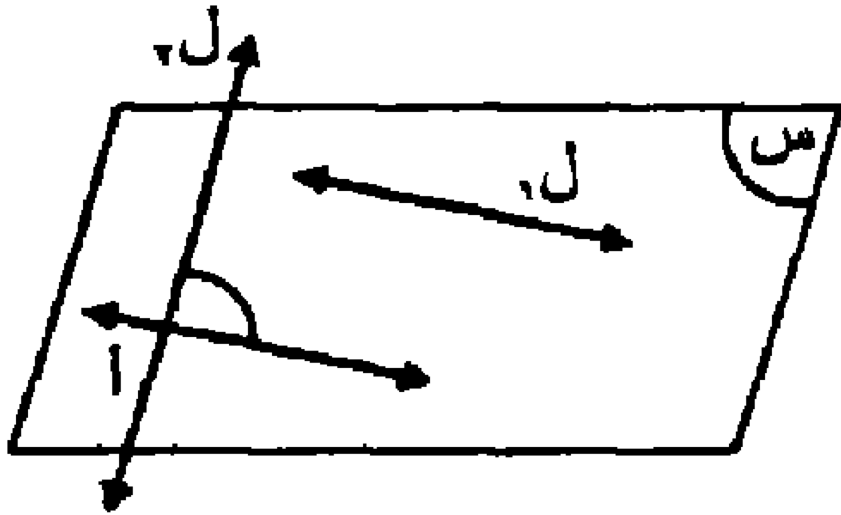
مثال: من الشكل المقابل أ ب جـ ء شبه منحرف أثبت أن أضلاعه تقع جميعاً في مستوى واحد .

الحـــــــل



أ ب ، ء جـ مستقيمان متوازيان يعينان مستوى وليكن س .
∴ النقاط الأربعة أ ، ب ، جـ ، ء تقع في هذا المستوى .
أي أن المستقيمين أ ء ، ب جـ يقعان في المستوى س .
∴ المستقيمات أ ب ، ء جـ ، أ ء ، ب جـ تقع في المستوى .

الزاوية بين مستقيمين متخالفين :-



الزاوية بيم مستقيمين متخالفين هي أحدى الزوايا التى يصنعها أحدهما مع أي مستقيم مرسوم من نقطة عليه موازيا الآخر بفرض أن ل١ ، ل٢ مستقيمان متخالفان ، ل١ يقع في المستوي س ، ل٢ ∩ س = { أ }
من نقطة أ في المستوي س نرسم $\overleftrightarrow{أهـ}$ // ل١
فتصبح الزاوية بين $\overleftrightarrow{أهـ}$ ، ل٢ هي الزاوية بين ل١، ل٢ .

ملاحظة :

إذا كان قياس الزاوية بين المستقيمين المتخالفين = ٩٠ ° فانه يقال إن المستقيمين المتخالفين متعامدان .

مثال:

أ ، ب نقطتان تقعان جهتين مختلفين من مستوى س فإذا كان $\overline{أب}$ ∩ س ={ء}، رسم الشعاع $\overleftarrow{أجـ}$ ليقطع المستوى س في جـ والشعاع $\overleftarrow{بهـ}$ ليقطع المستوى س في هـ بحيث كان $\overleftarrow{أجـ}$ // $\overleftarrow{بهـ}$ أثبت أن جـ ، ء ، هـ تقع علي استقامة واحدة .

الإثبـــات

∵ $\overline{أجـ}$ // $\overline{هـ ب}$ فهما يعنيان مستو وليكن ص

∴ جـ ، هـ ∈ س ، جـ ، هـ ∈ ص

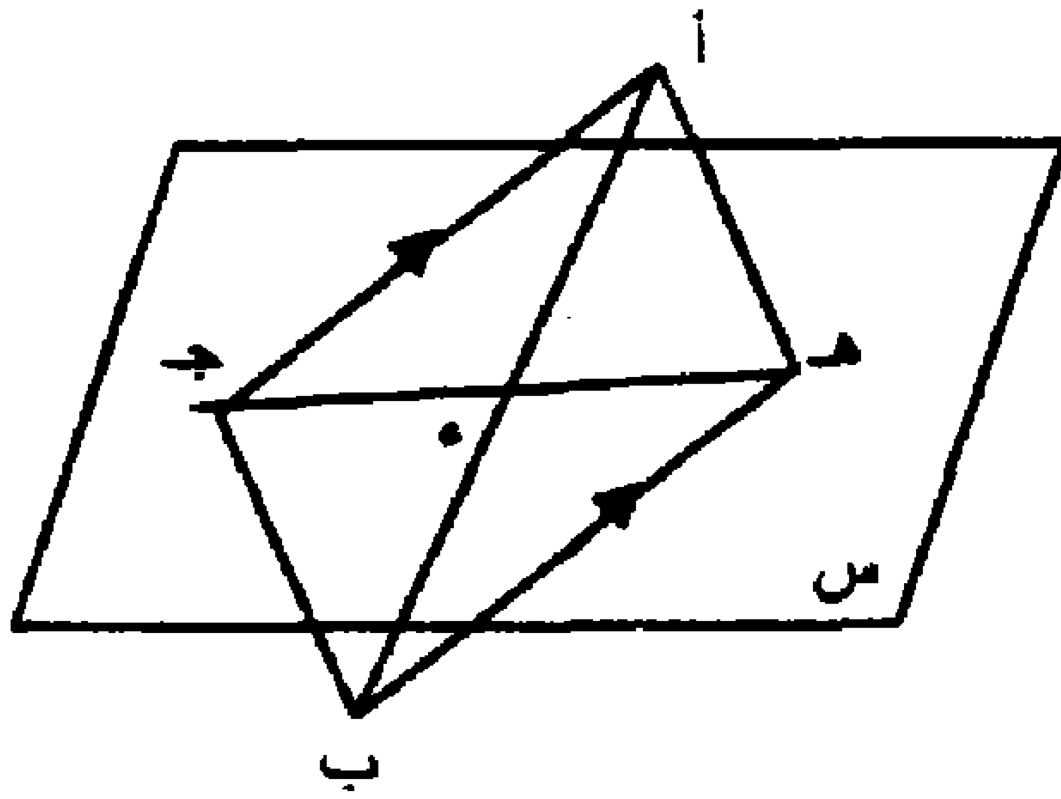
∵ ء ∈ $\overleftrightarrow{أب}$ ، ∵ $\overleftrightarrow{أب}$ ⊂ ص

∴ ء ∈ ص

∵ أب ∩ س = { ء } ∴ ء ∈ س

∴ ء ∈ س ∩ ص ∴ ء ∈ جـ هـ

∴ النقط جـ ، ء ، هـ تقع علي استقامة واحدة .



<u>مثال</u>: برهن أن :

إذا قطع مستقيم ثلاثة مستقيمات متوازية فإن المستقيمات الأربعة تقع في مستوى واحد .

البرهـــان

نفرض أن ل، م ، ن ثلاثة مستقيمات متوازية يقطعها المستقيم ك في ء ، هـ ، و علي الترتيب

∵ ل // م ∴ ل ، م يعينان مستوى واحد وليكن ص

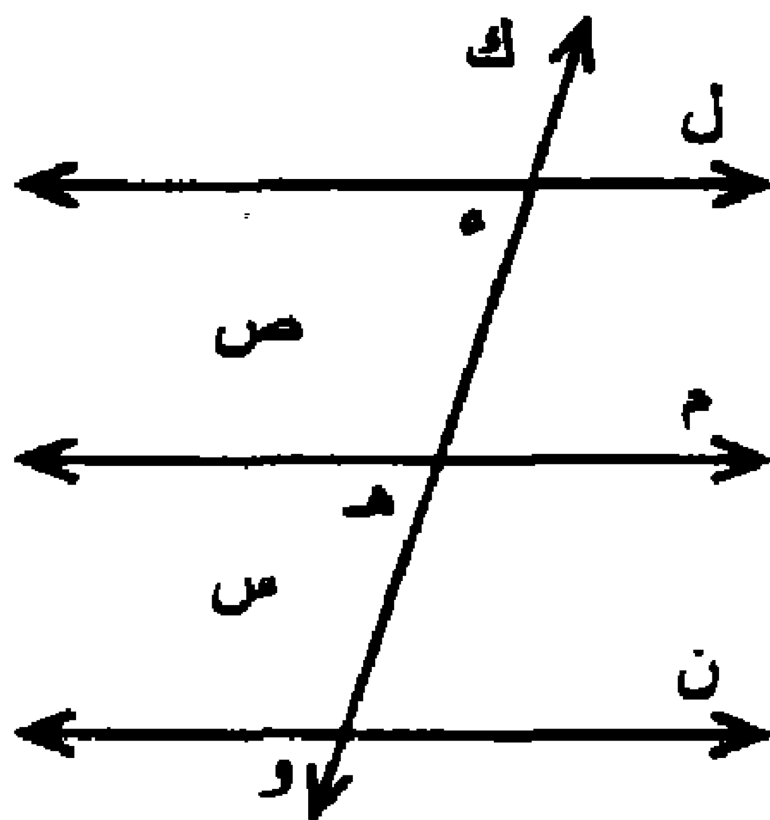
، ∵ $\overleftrightarrow{ءهـ}$ ⊂ ص ∴ و ∈ ص

، ∵ م // ن ∴ م ، ن يعينان مستوى واحد وليكن س

، و ∈ س ، س ∩ ص = م

، ∵ و ∈ س ∩ ص حيث و ∉ م ∴ س ، ص مستويان متطابقان

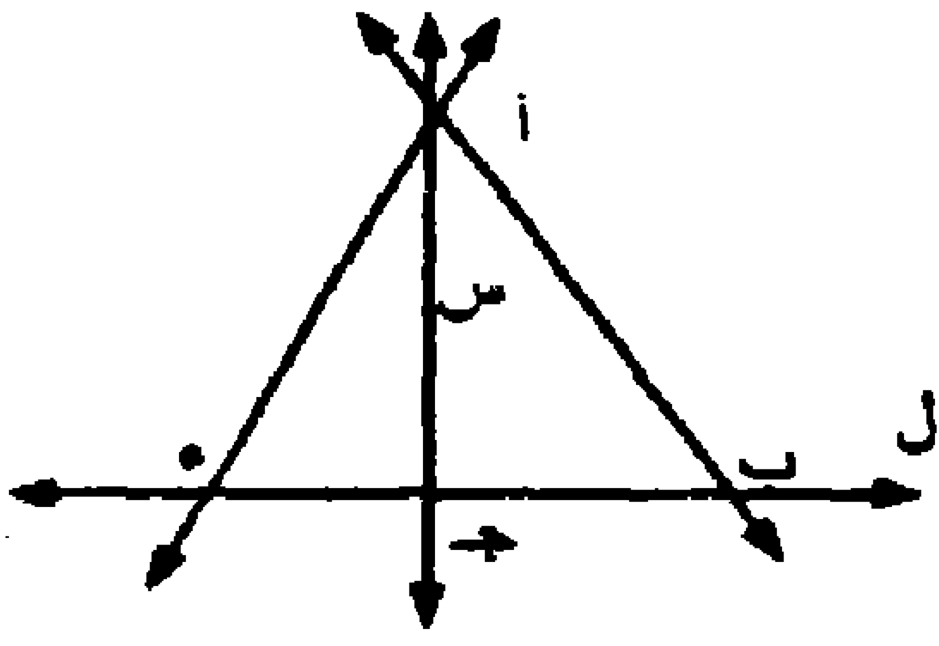
∴ ل، م ، ن ، ك يحويها مستوى واحد.



<u>مثال</u>: $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أجـ}$ ، $\overleftrightarrow{أء}$ ثلاثة مستقيمات في الفراغ متقاطعة في نقطة أ قطعها جميعاً المستقيم ل في ب ، جـ ، ء علي الترتيب برهن أن المستقيمات الأربعة في مستوي واحد .

الحـــــل

∵ المستقيمان $\overleftrightarrow{أب}$، $\overleftrightarrow{أجـ}$ متقاطعان



∴ يعينان مستوى وليكن س

∴ ب ، جـ ∈ س ∴ $\overleftrightarrow{بجـ}$ ⊂ س

، ∵ ء ∈ ل ∴ ء ∈ س ، ∵ أ ∈ س

∴ $\overleftrightarrow{أء}$ ⊂ س ∴ المستقيمات تقع في مستوي واحد

ملاحظات تفيد:

(١) إذا كان المستقيمان $ل_1$، $ل_2$ لا يتقاطعان ولا يتوازيان فأنهما :

أ- متخالفان. ب- أو غير مستويين معاً .

(٢) إذا كان $ل_1$ ، $ل_2$ مستقيمين في الفراغ وكان $ل_1 \cap ل_2 = \phi$ فإنه إما :

أ- أن يكون المستقيمان متوازيان. ب- أو متخالفان .

(٣) إذا تقاطع مستويان في خط مستقيم وكانت أ ∈ للمستويين فإن أ ∈ خط تقاطعهما .

(٤) المستويان يتقاطعان في خط مستقيم بينما الثلاثة مستويات يتقاطعون في خط مستقيم أو نقطة .

مثال: ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (×) أمام العبارة الخاطئة:-

١) بفرض أن ل مستقيم ، س مستوي ، أ نقطة

أ- إذا كان ل ∩ س = { أ } فإن ل ⊂ س ( )

ب- إذا كان ل ∩ س = ϕ فإن ل // س ( )

جـ- إذا كان ل ⊂ س فإن ل ∩ س = ϕ ( )

د- إذا كان ل يوازي س فإن ل ∩ س = { أ } ( )

الحـل : أ - × ب- × جـ- × د- ✓

٢) أ- أي نقطتين تعينان مستويا . ( )

ب- يتعين المستوي إذا علم ثلاث نقط تنتمي إليه . ( )

جـ- يتطابق المستويان إذا اشتركا في ثلاث نقط . ( )

د- أضلاع أي مستطيل تقع في مستوي واحد . ( )

هـ- في الشكل الرباعي أ ب جـ ء إذا كان $\overline{أجـ} \cap \overline{بء}$ = { م }
كانت أضلاع الشكل في مستوي واحد . ( )

و- أضلاع أي شكل رباعي تقع في مستو واحد . ( )

الحـل : أ - × ب- × جـ- ×

د- ✓ هـ - ✓ و- ×

تمرين (١)

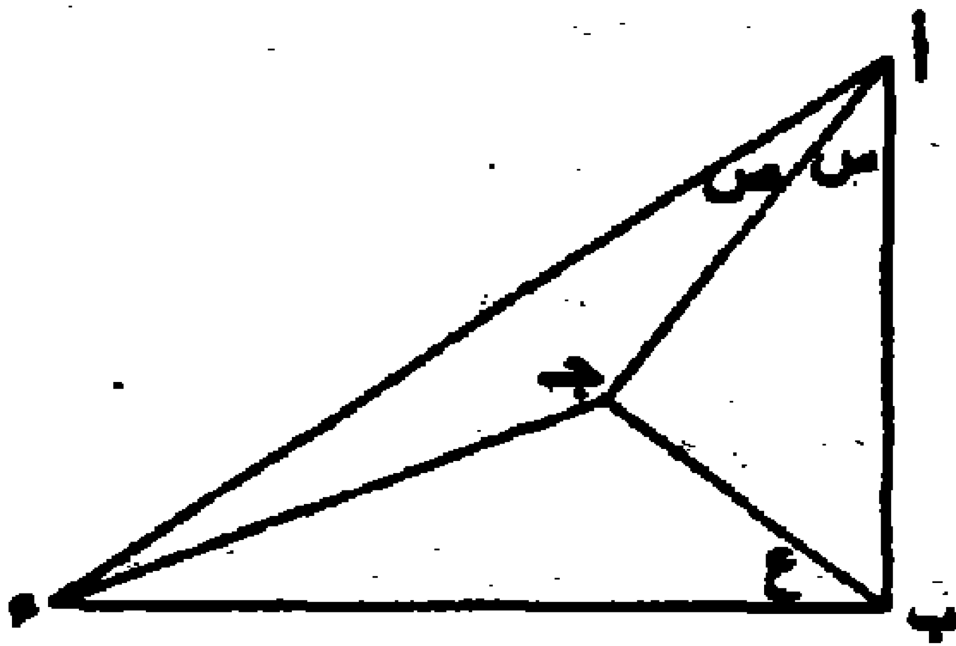
(١) أذكر العبارة الصحيحة والعبارة الخاطئة:-

١. المستقيمان المتخالفان لا يجمعهما مستوي واحد .
٢. يمكن أن يمر بالمستقيم عدد لا نهائي من المستويات .
٣. رؤوس المثلث تعين مستوياً .
٤. المستويان س ، ص متوازيان س∩ ص = ϕ
٥. إذا وازى مستقيم مستويا فإنه يوازى جميع المستقيمات الواقعة في هذا المستوى .
٦. المستقيمات التى توازى مستوى واحد تكون متوازية.
٧. المستقيمان المتخالفان يمكن أن يمر بهما مستويان متوازيان.
٨. المستوى يجزئ الفراغ إلي ثلاث مجموعات منفصلة من النقط .
٩. يمكن أن يمر بالمستقيم عدد لا نهائي من المستويات .
١٠. جميع المستويات الأفقية فى الفراغ متوازية.

(٢) س ، ص ، ع ، ل أربع نقط في الفراغ بحيث $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ع ل}}$
أثبت أن $\overline{\text{س ص}}$، $\overline{\text{ص ع}}$ ، $\overline{\text{ع ل}}$ ، $\overline{\text{ل س}}$ يحويها مستوي واحد .

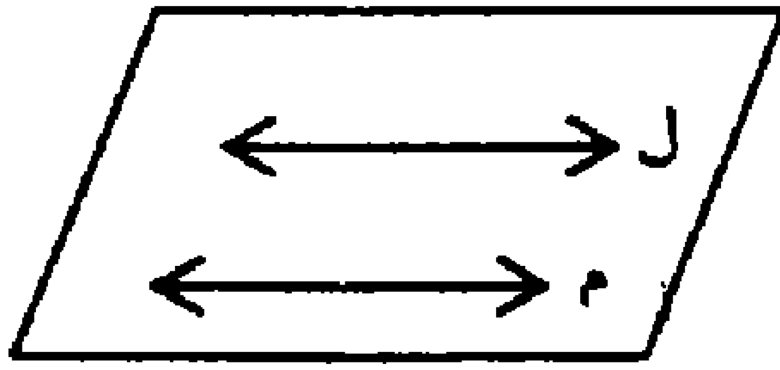
(٣) أثبت أن إذا تقاطعت ثلاثة مستويات مثنى مثنى في ثلاثة مستقيمات وتقاطع مستقيمان منهما في نقطة فإن نقطة تقاطع هذين المستقيمين تنتمي إلي المستقيم الثالث .

(٤) في الشكل المقابل أكمل :



١. س ∩ ص =
٢. س ∩ ع =
٣. ص ∩ ع =
٤. $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ∩ س =
٥. $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ...... س ، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ...... ع
٦. س ∩ ص ∩ ع = ...

توازي المستقيمان



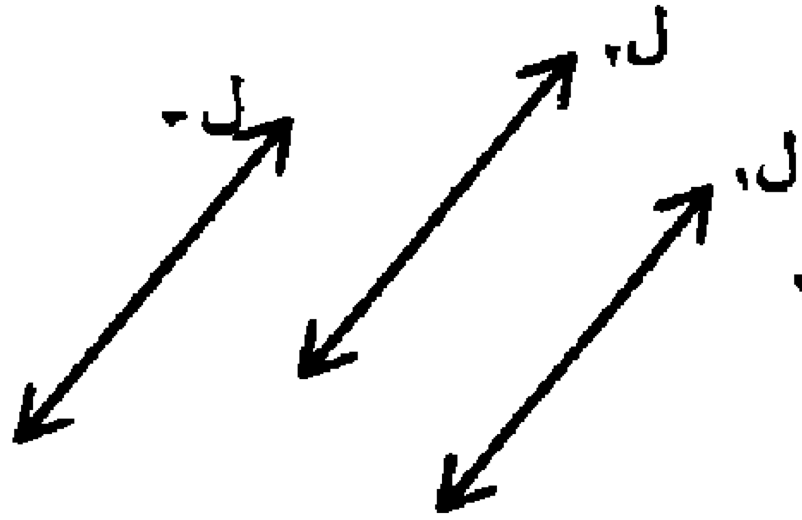
المستقيمان ل ، م يتوازيان وبذلك يكون

(أ) ل ، م في مستوى واحد.

(ب) ل ∩ م = ϕ

أي رغم وقوع ل ، م في مستوى واحد ومع ذلك لا يشتركان في أي نقطة

حقيقة :



المستقيمان الموازيان لثالث في الفراغ متوازيان .

المستقيم ل١ // المستقيم ل٣ ، المستقيم ل٢ // المستقيم ل٣

∴ المستقيم ل١ // المستقيم ل٢

بعض المجسمات الشهيرة

المجسم :

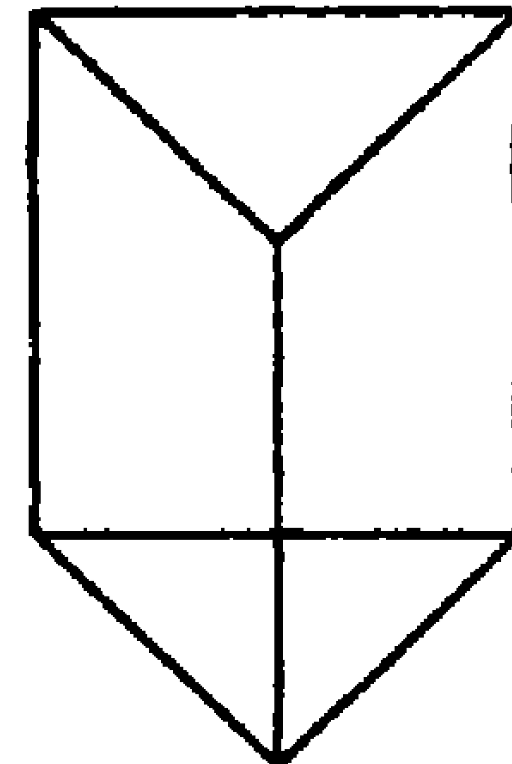
هو كل ما يشغل حيزا من الفراغ وتفصله عن الفراغ سطوح مستوية أو سطوح منحنية.

والمجسمات تنقسم إلي ثلاثة أنواع رئيسية هي:

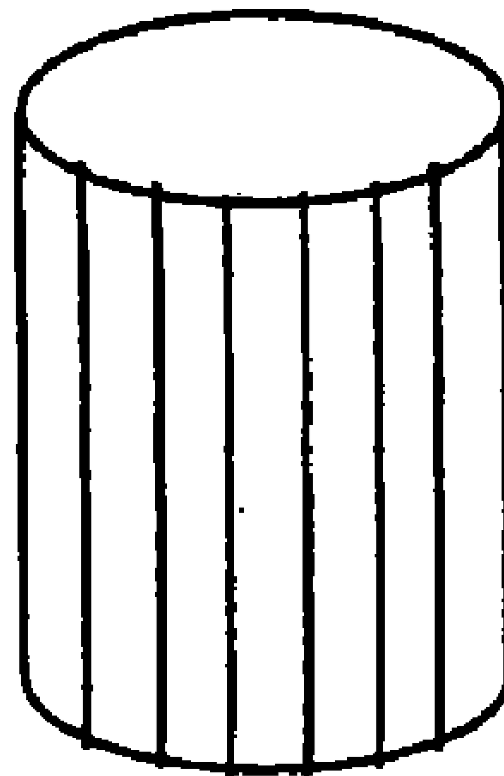
(١) مجسمات جميع أوجهها مستوية وغالباً ما يطلق عليها كثيرات السطوح . شكل(١)

(٢) مجسمات بعض أوجهها مستوية والأخرى سطوح منحنية . شكل(٢)

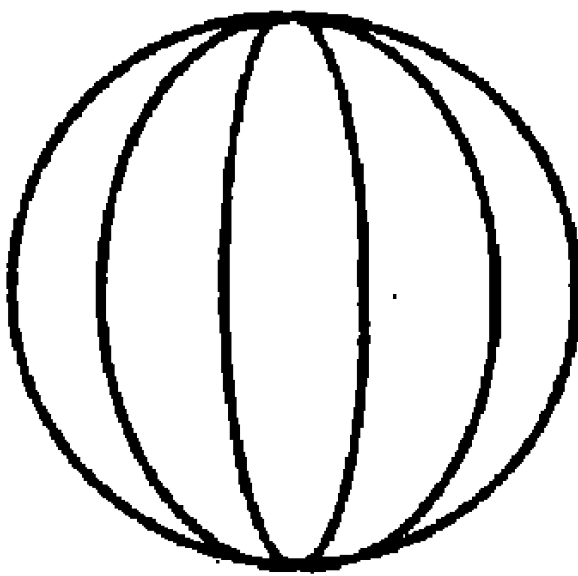
(٣) مجسمات جميع أوجهها سطوح منحنية. شكل (٣)



شكل(١)



شكل (٢)

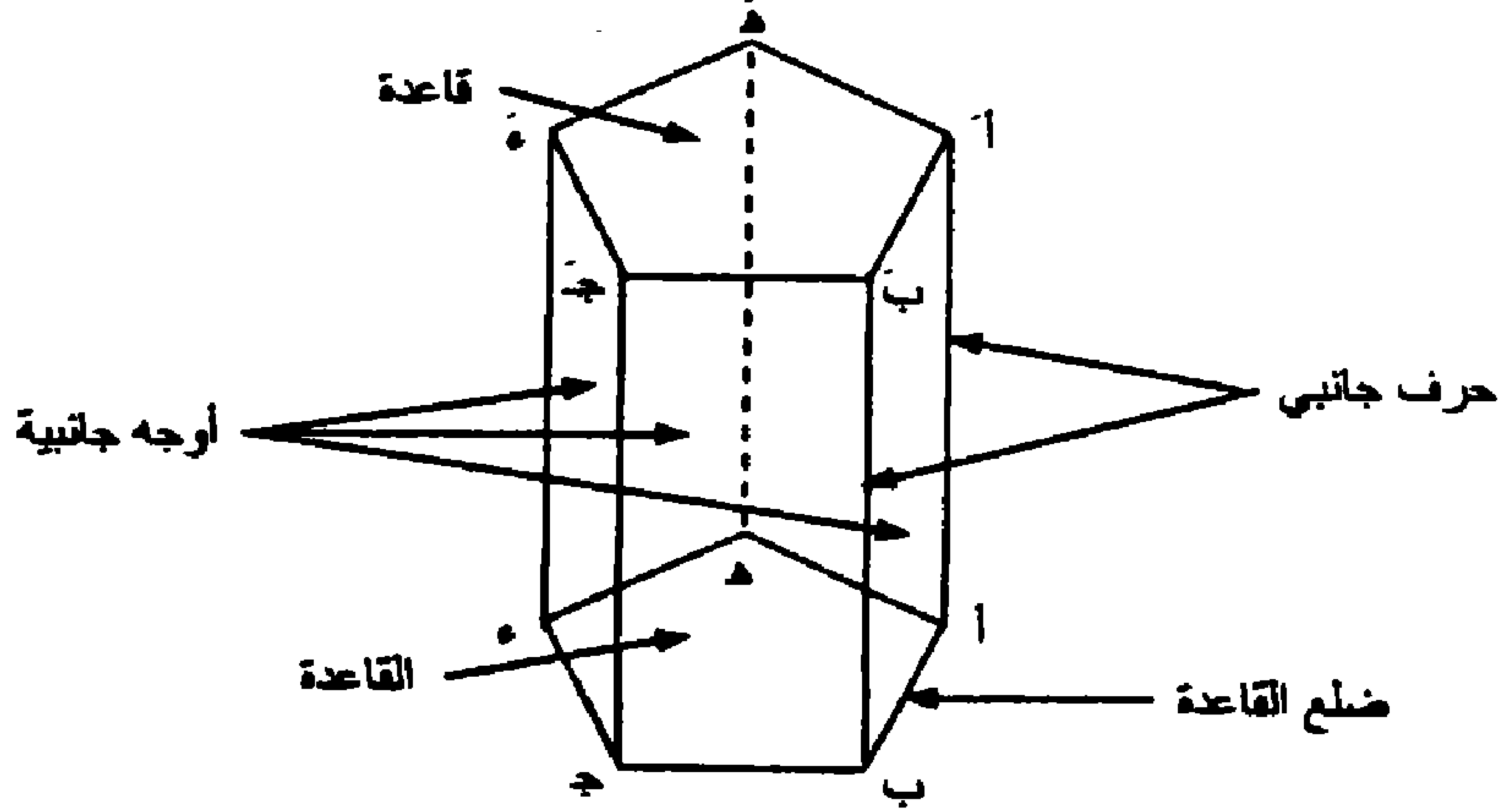


شكل (٣)

أولاً : المنشور

تعريف :

المنشور هو الجسم المتولد من انتقال سطح مضلع موازياً لنفسه في اتجاه ثابت ويسمي سطح المضلع في كل من وضعه الأول والأخير قاعدة المنشور.

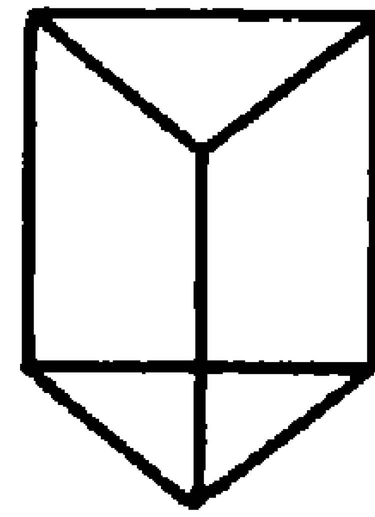


- المنشور له قاعدتان متوازيان ومتطابقان – أوجهه الجانبية علي شكل متوازى أضلاع – أحرفه الجانبية متساوية ومتوازية.
- يقال أن المنشور ثلاثى إذا كانت كل من قاعدتيه سطح مثلث .

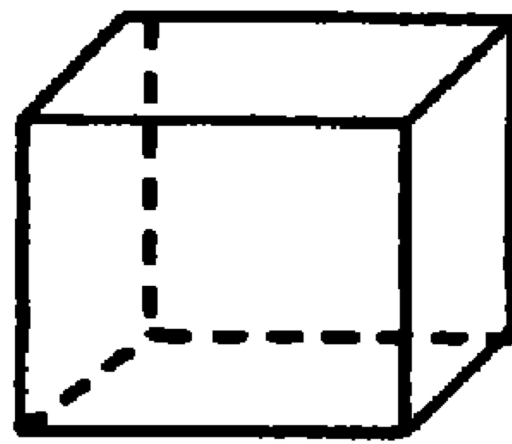
  ويقال أن المنشور رباعى إذا كانت كل من قاعدتيه سطح شكل رباعى .

  ويقال أن المنشور خماسى إذا كانت كل من قاعدتيه سطح خماسى ، ------ .

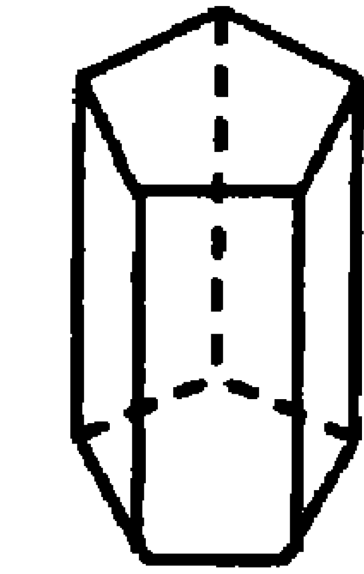
المنشور القائم:



منشور ثلاثى قائم



منشور رباعى قائم



منشور خماسى قائم

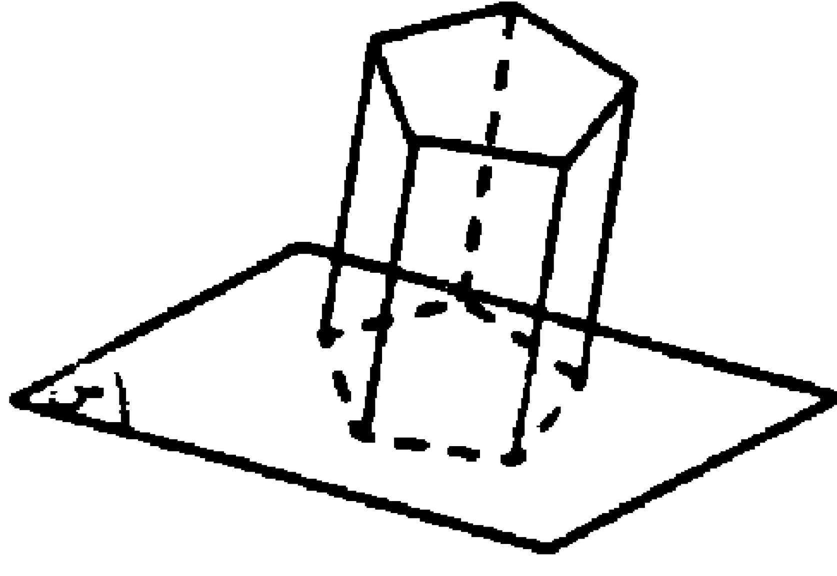
ويسمى المنشور قائماً إذا كانت:-

(أ) أوجهه الجانبية عمودية على مستوى القاعدة.

(ب) أحرفه الجانبية عمودية على مستوى القاعدة .

(ج) أجهة الجانبية مستطيلات.

المنشور المائل :

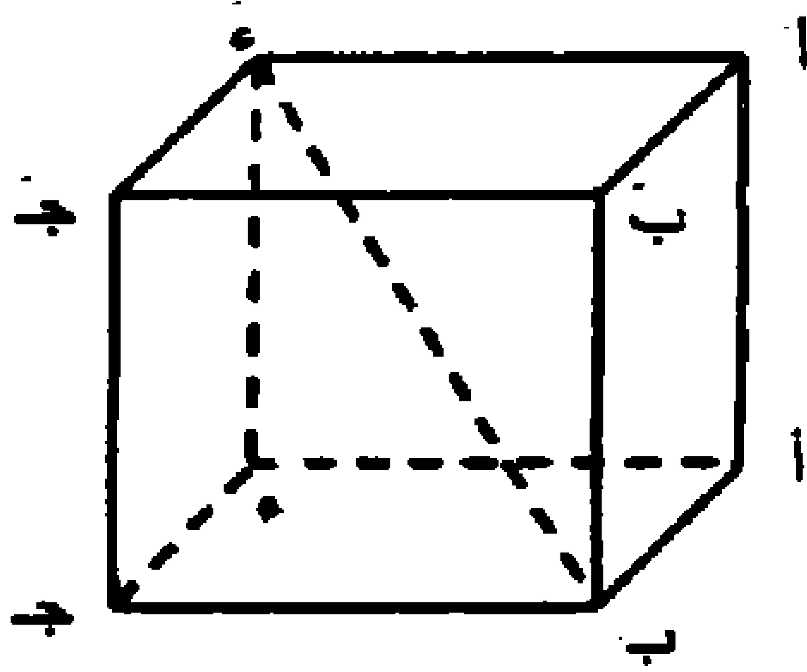


يسمي المنشور مائلاً:

إذا كانت أوجهه الجانبية مائلة علي مستوي القاعدة .

حالات خاصة للمنشور

١- متوازي السطوح :-



منشور كل من قاعدتيه سطح متوازي أضلاع وبذلك تحده ستة أوجهه كل منها سطح متوازي أضلاع حيث كل وجهين متقابلين متوازيين ومتطابقين وله ١٢ حرف كل أربعة متوازية ومتساوية وله ثمانية رؤوس .

أقطار متوازي السطوح:

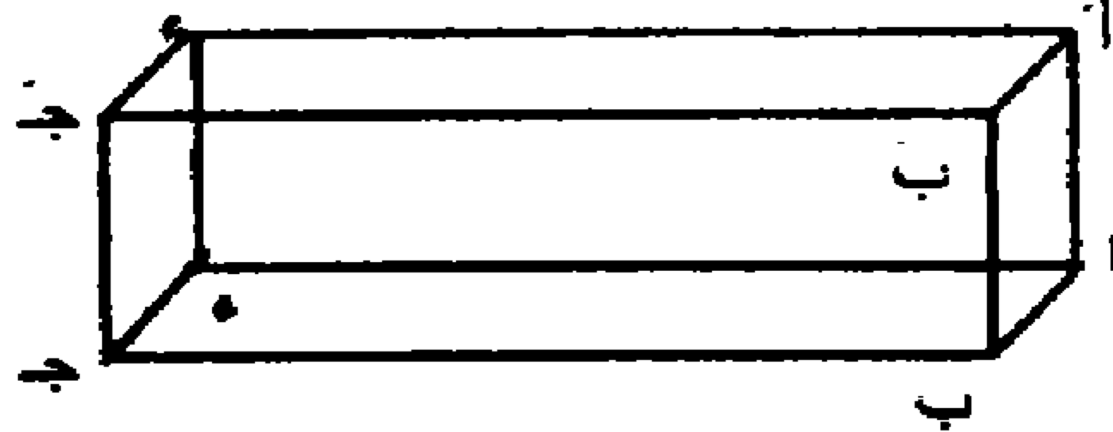
هي القطع المستقيمة التي تصل بين رأسين ليسا فى وجه واحد عددها أربعة وهي كما بالشكل:

أ جـَ ، أَ جـ ، ب ءَ ، بَ ء

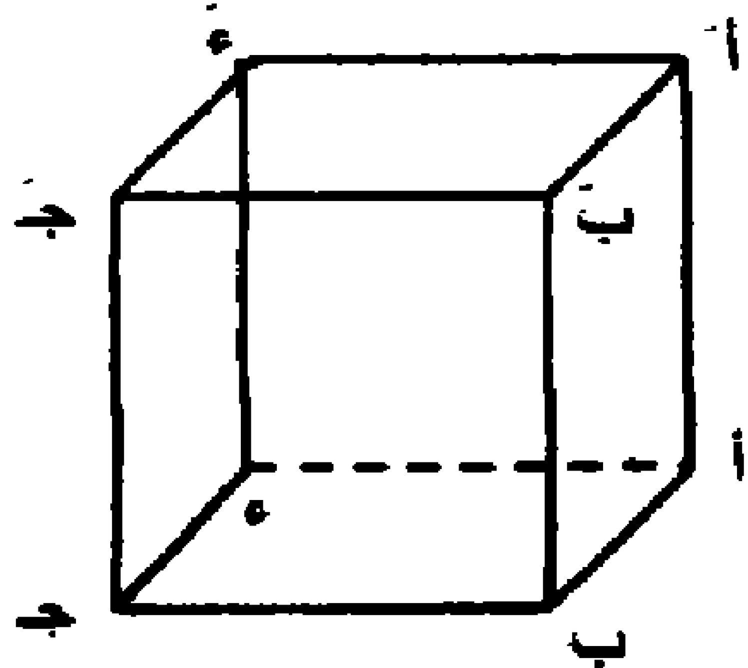
وأقطار متوازى السطوح تتقاطع جميعاً في نقطة واحدة هي منتصف كل منها.

٢- متوازي المستطيلات:-

هو منشور رباعي قائم قاعدته سطح مستطيل. له ستة أوجه جميعها مستطيلات. أقطاره متساوية في الطول وتتقاطع في نقطة هي منتصف كل منها. متوازي المستطيلات هو متوازي سطوح قائم قاعدتيه مستطيل .



٣- المكعب :-

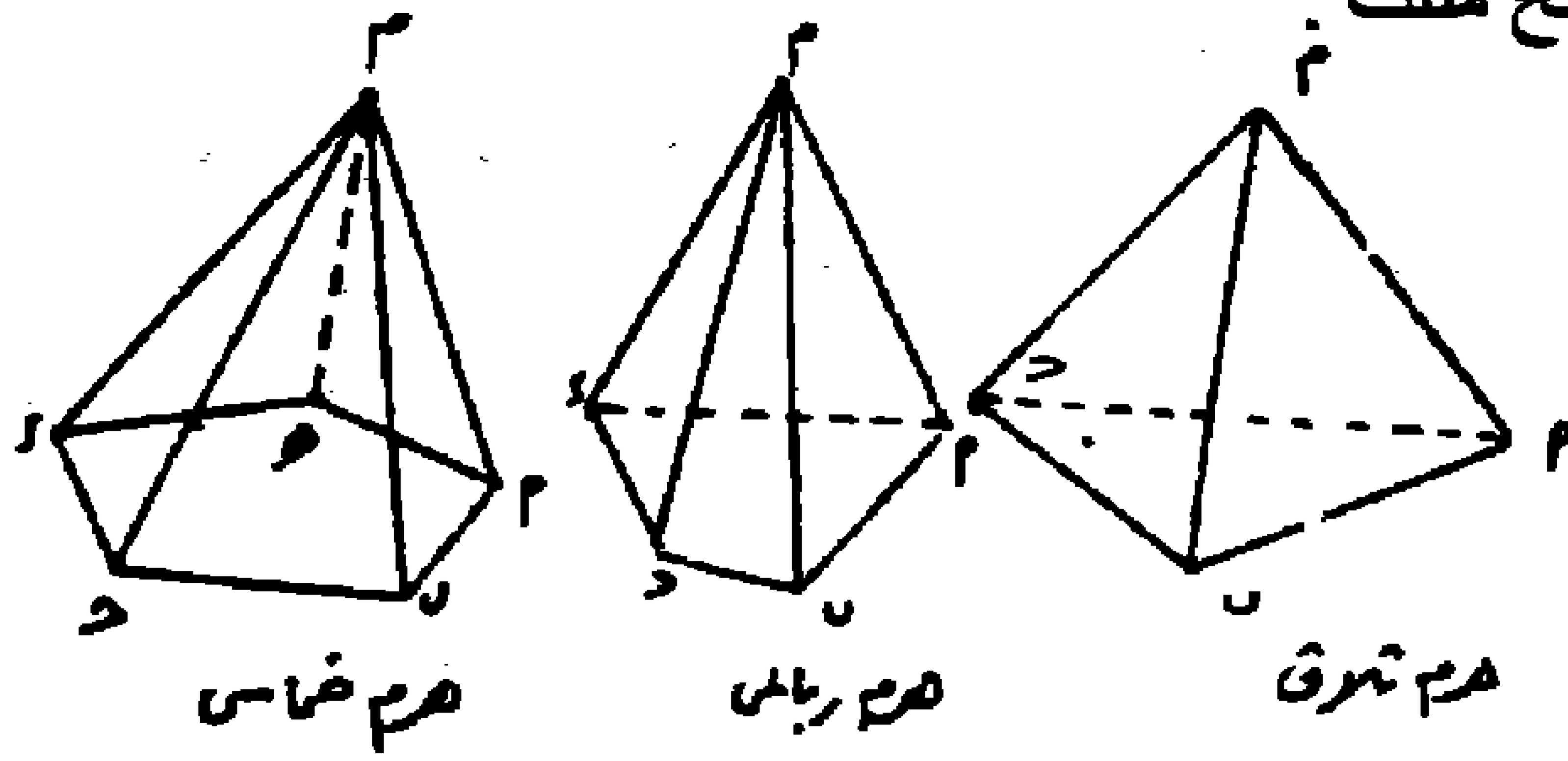


- هو متوازي مستطيلات تساوت أبعاده الثلاثة .
- له (٦) أوجه عبارة عن سطوح مربعات متقاطعة .
- له(١٢) حرف متساوية في الطول.
- له ثمانية رؤوس.
- له(٤) أقطار متساوية وتتقاطع جميعاً في نقطة واحدة هي منتصف كل منها.

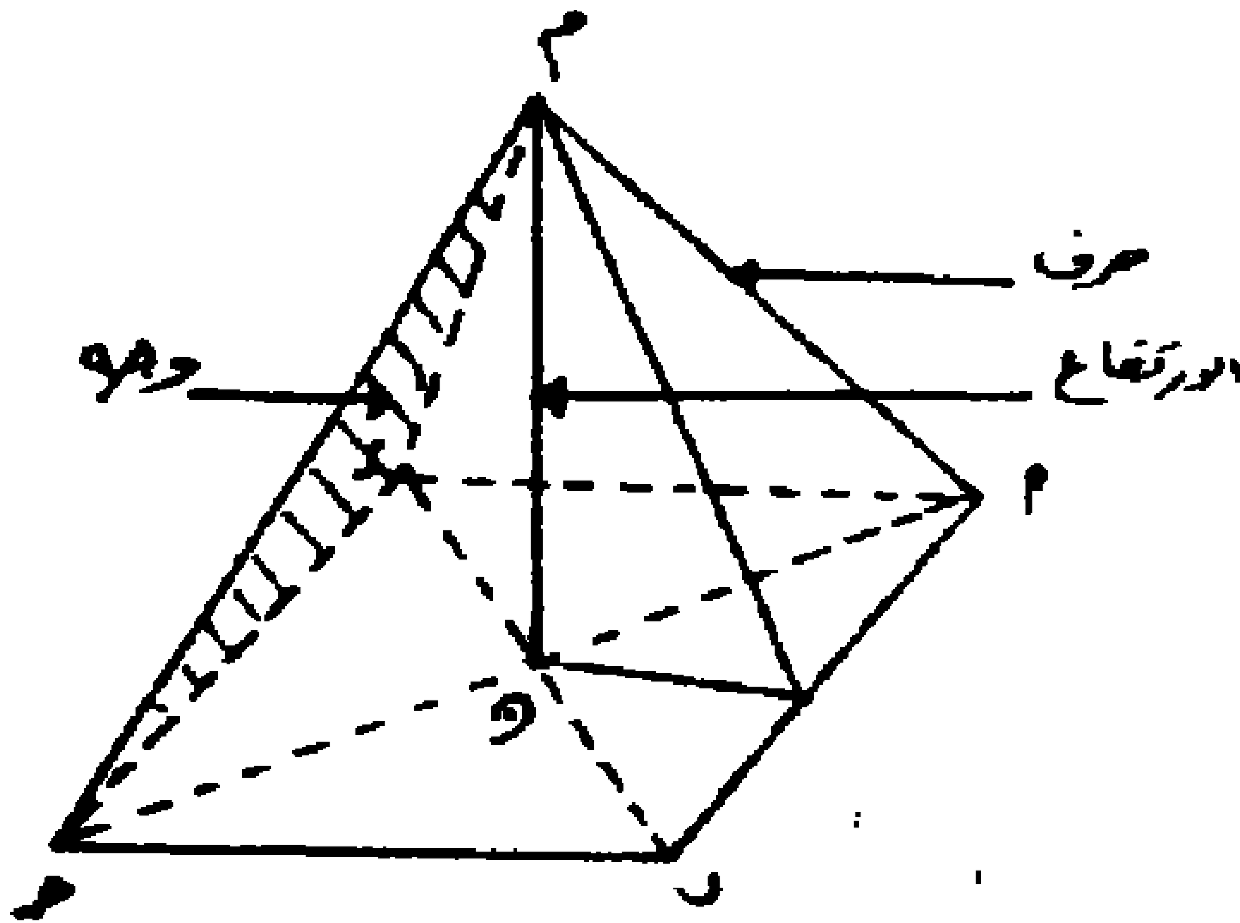
<u>ثانياً: الهرم</u>

<u>تعريف</u> :

إذا كانت م نقطة لا تنتمي إلي سطح المضلع س فإن اتجاه القطع المستقيمة المرسومة من النقطة م إلي جميع نقط سطح المضلع س يسمي هرماً . وتسمي م رأس الهرم ويسمي سطح المضلع بقاعدة الهرم .



- يقال أن الهرم ثلاثي إذا كانت قاعدته سطح مثلث
- ويقال أن الهرم رباعي إذا كانت قاعدته سطح رباعي.
- ويقال أن الهرم خماسي إذا كانت قاعدته سطح خماسي أي يسمي الهرم تبعاً لعدد أضلاعه .



- الأحرف الجانبية هي القطع المستقيمة $\overline{م أ}$ ، $\overline{م ب}$ ، $\overline{م جـ}$ ، $\overline{م ء}$ المرسومة من رأس الهرم إلي رؤوس القاعدة .
- ارتفاع الهرم هو طول القطعة المستقيمة م ن المرسومة من م عمودية علي مستوي القاعدة .

<u>الهرم الثلاثي المنتظم:</u>

هو هرم أوجهه الأربعة مثلثات متساوية الأضلاع وأحرفه الستة متساوية في الطول .

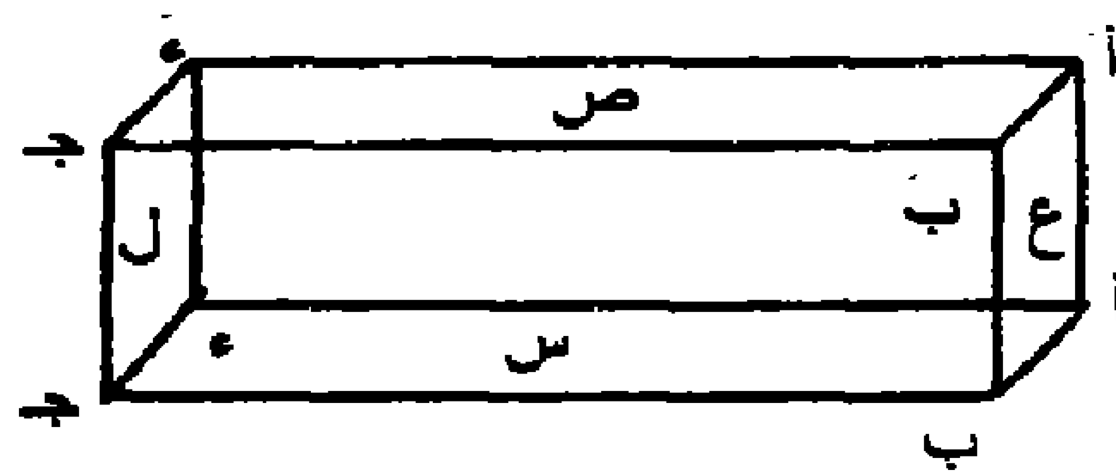
مثال: أ ب ج ء أَ بَ جَ ءَ متوازي مستطيلات ـ ما العلاقة بين كل زوج من المستويات الآتية مع تعيين خط التقاطع في حالة تقاطع المستويين

(١) س ، ص

(٢) س ، ع

(٣) ص، ل

(٤) ع ، ل



الحـــــل

(١) س // ص

(٢) س ∩ ع = $\overleftrightarrow{أب}$

(٣) ص ∩ ل = ءَ جَ

(٤) ع // ل

مثال: من الشكل السابق أكمل :

(١) $\overleftrightarrow{أب}$ ⊂ المستوي ــــ ، $\overleftrightarrow{أب}$ ⊂ المستوي ــــ

(٢) $\overleftrightarrow{ءجَ}$ // كل من المستويين ــــ ، ــــ ويقطع المستوي ــــ في جـ

(٣) المستوي ص ∩ المستوي ــــ = $\overleftrightarrow{أَ ءَ}$ والمستوي ع ∩ المستوي ل = ــــ

(٤) $\overleftrightarrow{أ ء}$ ــــ المستوي س ويقطع المستوي ع في النقطة ــــ

الحـــــل

(١) س ، ع

(٢) ع ، ص ، بَ ب ج جَ

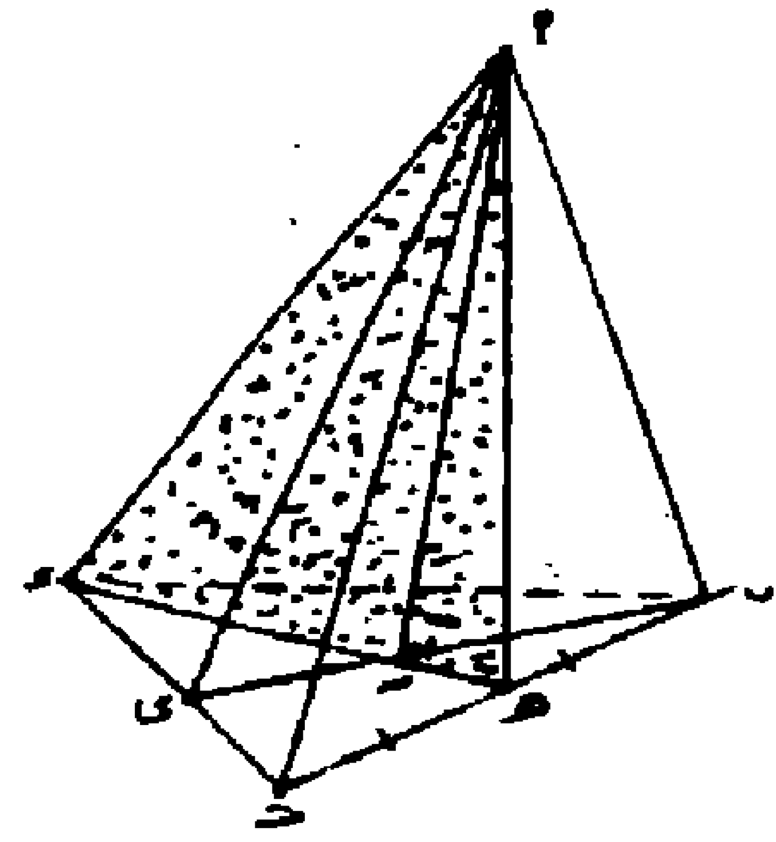
(٣) أَ أ ء ءَ ، ϕ

(٤) ⊂ ، {أ}

مثال: أ ب ج ء هرم ثلاثي ، هـ ، ى ، ك منتصفات ب ج ، ج ء ، ب أ على الترتيب عين بالرسم المستقيم الذي يتقاطع فيه كل من :- أ) المستويين أ ب ى ، أ ء هـ

ب) المستويين أ ب ى ، ج ء ك

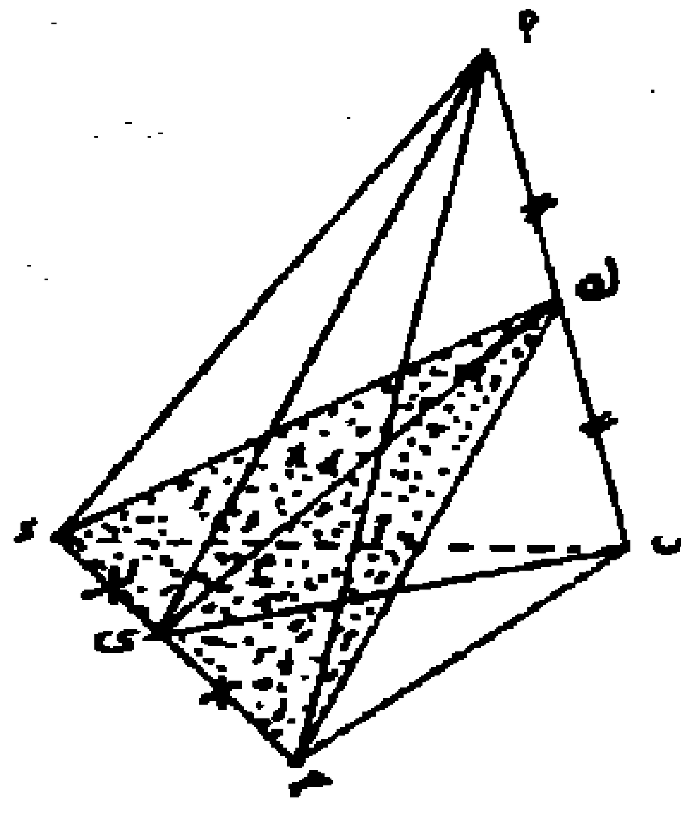
الحـــــل



∵ ن نقطة تلاقي المتوسطات

في Δ ب ج ن

أ) خط التقاطع هو $\overleftrightarrow{أن}$



ب) خط تقاطع المستويين

$\overleftrightarrow{أ ب ى}$ ، ج ء ك هو ك ى

مثال: أ ب ج أَ بَ جَ يسمي هرم ثلاثي ناقص متوازي القاعدتين وقاعدتاه : أ ب ج ، أَ بَ جَ موازيتان - س ترمز للوجه الجانبي أَ بَ ب أ، ص ترمز للوجه بَ جَ ج ب، ع رمز للوجه أَ أ ج جَ

أكمل :

(أ) س ∩ ع = ...

(ب) س ∩ ص = ...

(ج) ص ∩ ع = ...

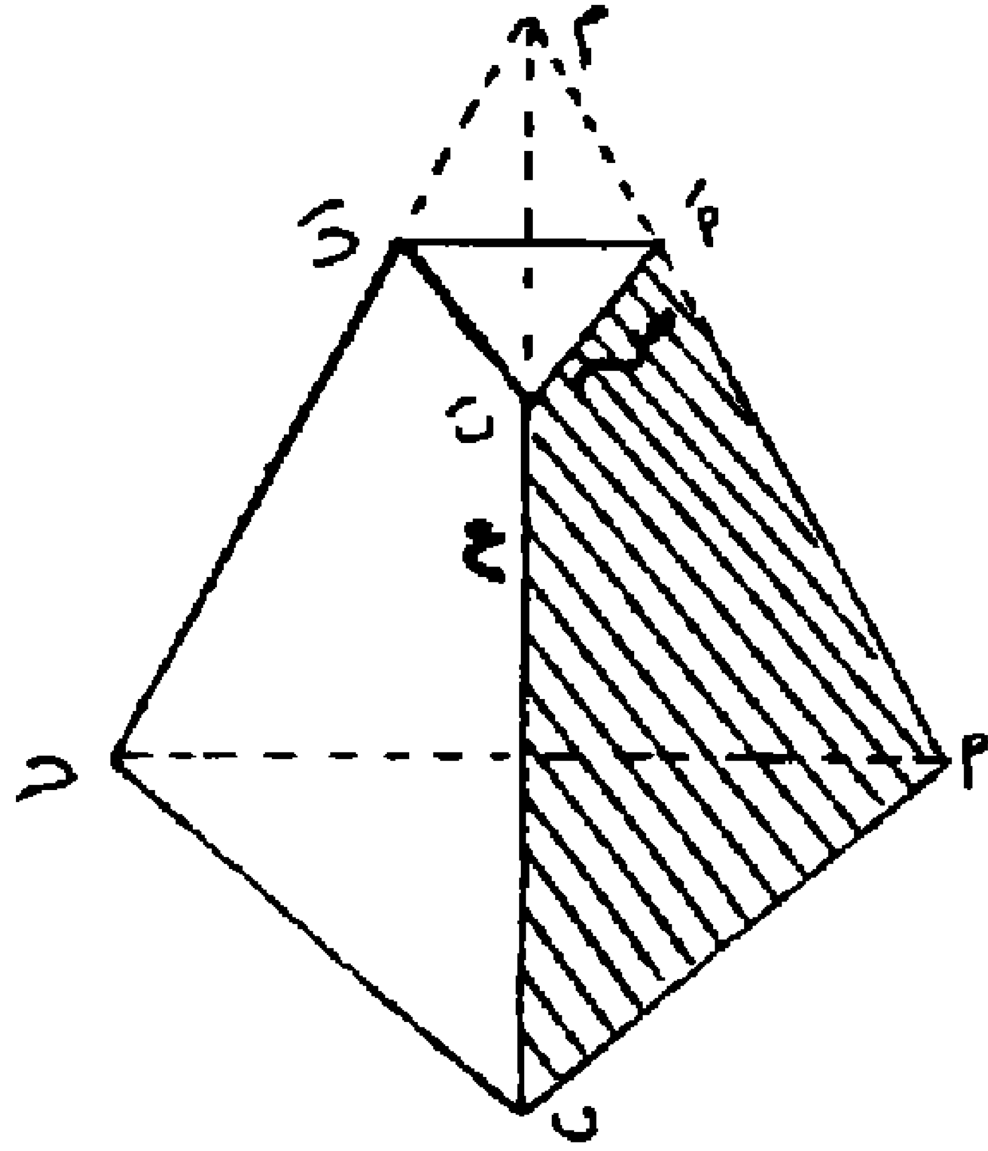
(د) س ∩ ص ∩ ع = ...

(ه) س ∩ المستوي أ ب جـ = ...

(و) $\overleftrightarrow{أَ بَ}$ ∩ $\overleftrightarrow{ب جـ}$ = ...

(ز) ص ∩ المستوى أَ بَ جَ = ...

(ح) أَ بَ جَ المستوى أ ب جـ = ...



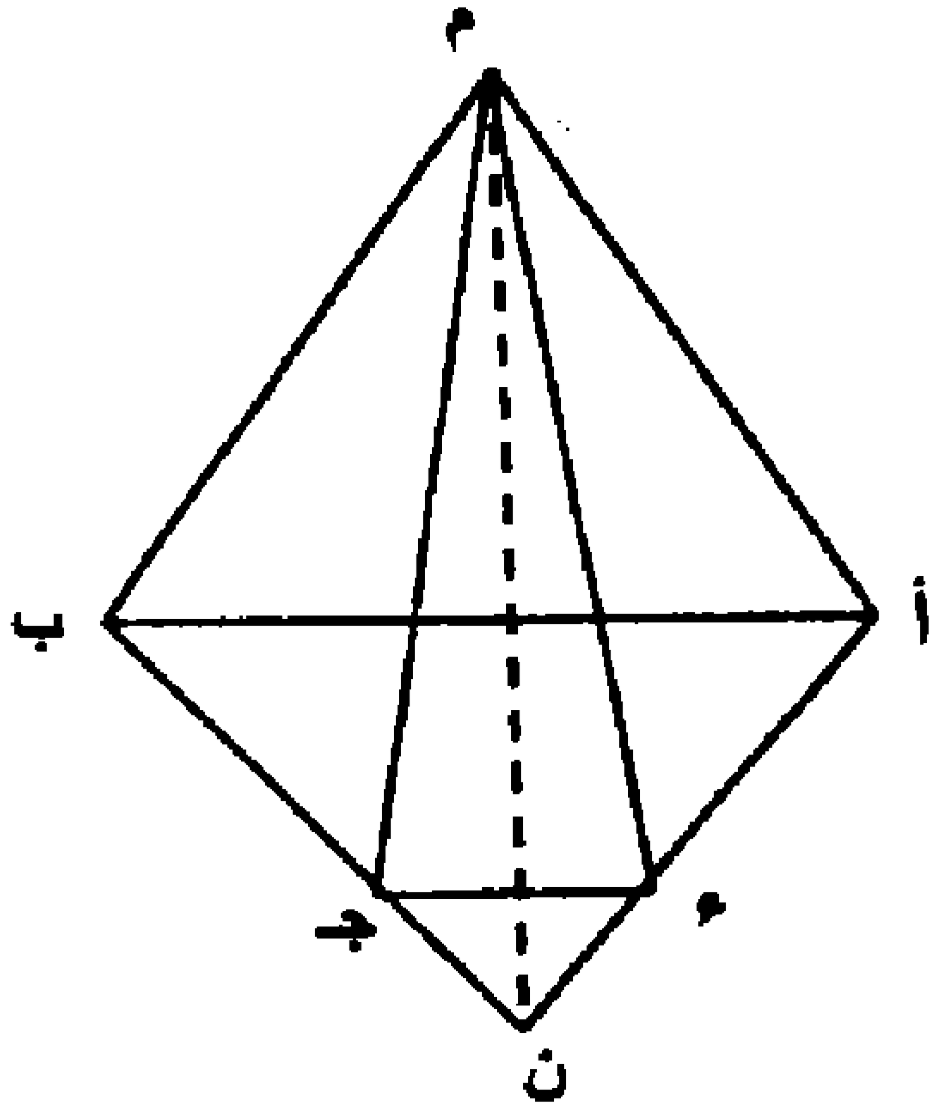
الحـــــل

أ) $\overleftrightarrow{أ أَ}$ ب) $\overleftrightarrow{ب بَ}$ ج) $\overleftrightarrow{جـ جَ}$ د) { م }

هـ) $\overleftrightarrow{أ ب}$ و) ϕ ز) $\overleftrightarrow{بَ جَ}$ ح) ϕ

مثال : م أ ب جـ ء هرم رباعي قاعدته أ ب جـ ء شبه منحرف فيه $\overline{أب}$ // $\overline{ءجـ}$. أوجد خط تقاطع المستويين م أ ء ، م ب جـ .

الحـــــل



∵ م ∈ لكل من المستويين م أ ء ، م ب جـ

، ∵ ن ∈ $\overleftrightarrow{أء}$

$\overleftrightarrow{أء}$ ⊂ المستوي أ م ء

∴ ن ∈ للمستوي أ م ء

بالمثل ن ∈ المستوي م أ ء ، م ب جـ

∴ م ، ن ∈ م أ ء ∩ م ب جـ

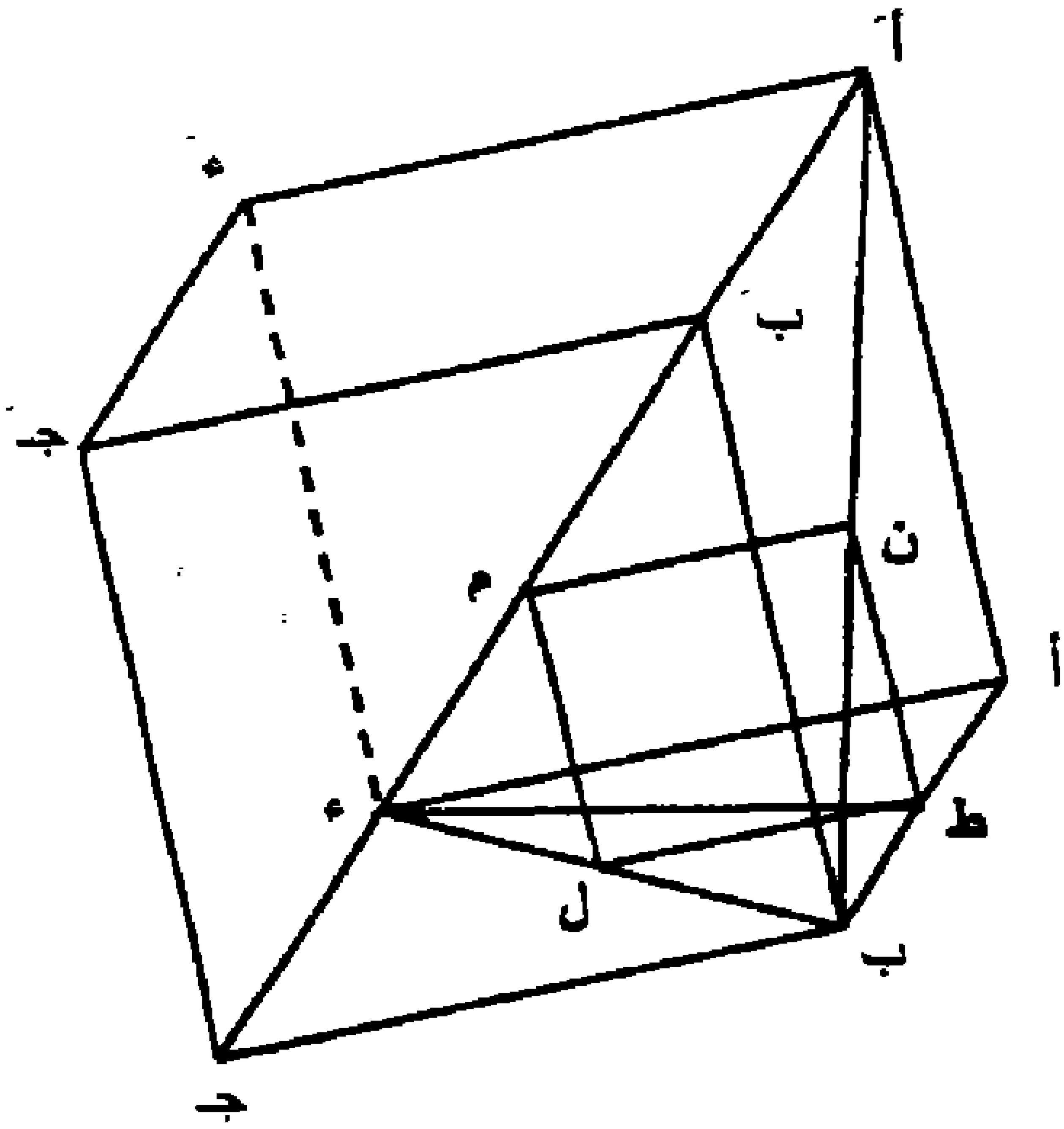
∴ $\overleftrightarrow{من}$ هو خط تقاطع المستويين .

مثال: أ ب جـ ء أَ بَ جـَ ءَ متوازي سطوح م نقطة تقاطع أقطاره ، ط ، ل ، ن منتصفات $\overline{أب}$ ، $\overline{بء}$ ، $\overline{أَب}$ علي الترتيب أثبت أن الشكل ن م ل ط متوازي أضلاع .

الحـــــل

∵ أقطار متوازي السطوح تتقاطع جميعاً في نقطة واحدة هي منتصف كل منها

∴ م منتصف بَ ء



في Δ أ أَ ب

ن ط واصلة بين منتصفى ضلعين

∴ ن ط // أ أَ ، ن ط = $\frac{1}{2}$ أ أَ ---- (١)

بالمثل في Δ ب بَ جـ

∵ م ل // بَ ب ، م ل = $\frac{1}{2}$ بَ ب ---- (٢)

∴ أ أَ // ب بَ ويساويه ---- (٣)

من خواص متوازي السطوح

من (١) ، (٢) ، (٣) ∴ ن ط // م ب ويساويه

∴ الشكل ن ط ل م متوازي أضلاع

مثال: ضع علامة ( ) أمام العبارات الصحيحة ، علامة (×) أمام العبارات الخاطئة:-

١. قاعدة الهرم الرباعي القائم يمكن أن تكون سطح مستطيل. ( )
٢. الهرم المنتظم هو هرم ثلاثي قاعدته سطح Δ متساوي الأضلاع . ( )
٣. يتقاطع المستويان في قطع مستقيمة. ( )
٤. كل مستقيمين متخالفين في الفراغ يمكن أن يمر بهما مستويان متوازيان . ( )
٥. المستويان الموازيان لمستقيم معلوم متوازيان . ( )
٦. المستقيمات التي توازي مستوي واحد تكون متوازية. ( )
٧. إذا وازي مستقيم مستوي فإنه يوازي كل مستقيم محتوي في نفس المستوي. ( )
٨. إذا توازي مستويان فأي مستقيم في أحدهما يوازي المستوي الآخر. ( )

الحــــــل

١. ×	٢. ×	٣. ×	٤. ✓
٥. ×	٦. ×	٧. ×	٨. ✓

مثال: برهن أن مقطع متوازي السطوح بمستو يقطع أربعة أحرف متوازية فيه هو سطح متوازي أضلاع .

البرهــــــان

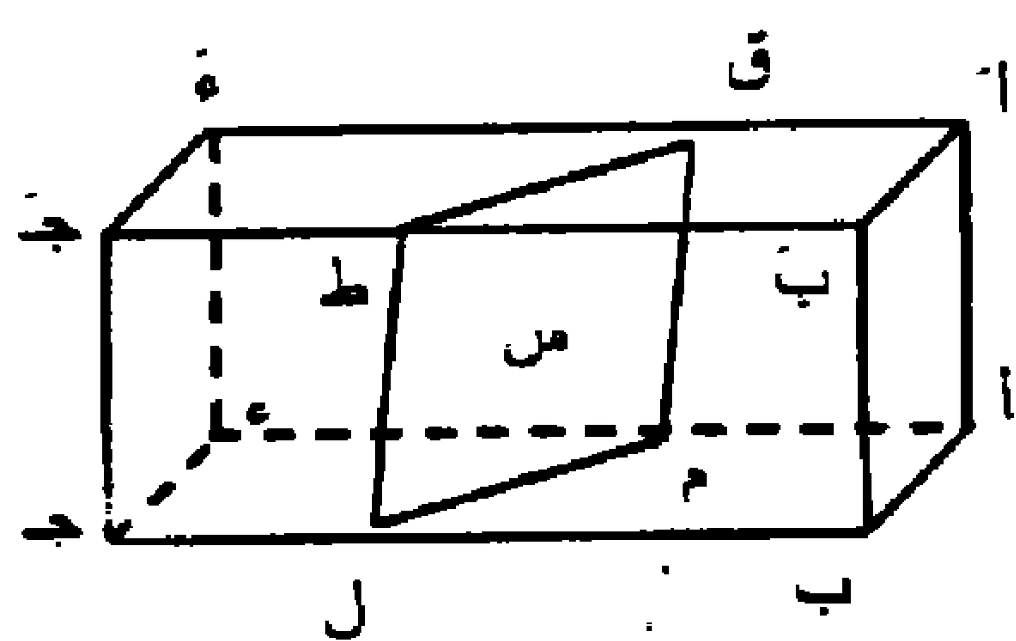
الوجهين أَ أ ء ءَ ، بَ ب جـ جـَ في متوازي السطوح متوازيان .

قطعهما المستوي س في $\overline{ق م}$ ، $\overline{ط ل}$

∴ $\overline{ق م}$ // $\overline{ط ل}$

وبالمثل $\overline{ق ط}$ // $\overline{م ل}$

∴ الشكل ق ط ل م متوازي أضلاع .



تمرين (٢)

(١) ضع علامة ( ) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (×) أمام العبارة الخطأ :-

أ- إذا كان أ ب جـ ء هرم ثلاثي فإن جـ أ ب ء هرم ثلاثي . ( )

ب- إذا كان م أ ب جـ ء هرم رباعي فإن جـ م أ ب ء هرم رباعي. ( )

ج- قاعدة المنشور يجب أن تكون سطح مضلع منتظم . ( )

د- المكعب له ثمانية أوجه وستة رؤوس واثنا عشر حرف . ( )

هـ- أقطار متوازي السطوح متساوية في الطول . ( )

و- أقطار متوازي المستطيلات متساوية في الطول . ( )

ز- لا يمكن رسم أربع مستويات كل ثلاثة منها متقاطعة في واحدة . ( )

(٢) س ص ع ل شكل رباعي أضلاعه ليست في مستوي واحد (هرم ثلاثي) رسم المستوي σ يوازي $\overline{\text{س ع}}$ ويوازي $\overline{\text{ص ل}}$ فقطع $\overline{\text{س ص}}$ ، $\overline{\text{ص ع}}$ ، $\overline{\text{ع ل}}$ ، $\overline{\text{ل س}}$ في هـ ، و ، ن ، م على الترتيب . أثبت أن $\frac{\text{هـ و}}{\text{س ع}} + \frac{\text{هـ م}}{\text{ص ل}} = ١$

(٣) م س ص ع هرم ثلاثي رسم مستوي يوازي كل من م س، صع مارا بنقطة ل منتصف $\overline{\text{س ص}}$ قاطعاً $\overline{\text{م ص}}$ ، $\overline{\text{م ع}}$ ، $\overline{\text{س ع}}$ في ن ، ط ، هـ على الترتيب – **أثبت أن :**

١- ل ن ط هـ متوازي أضلاعه محيطه م س+ ص ع

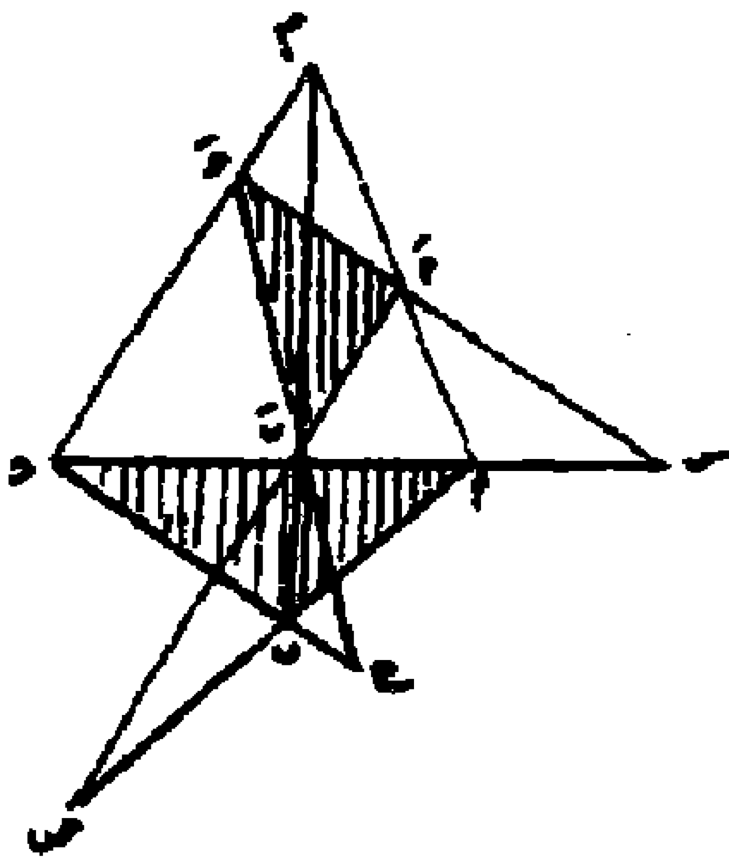
٢- إذا كان $\overline{\text{م س}} = \overline{\text{ص ع}}$ أثبت الشكل ل ن ط هـ معين .

(٤) أثبت أن المربع المنشأ علي أحد أقطار متوازي المستطيلات يكافئ مجموع المربعات المنشأة علي ثلاثة أحرف متلاقية في نقطة .

(٥) م أ ب ج هرم ثلاثي ، المستوي أَ بَ جَ يقطع أحرفه $\overline{\text{م أ}}$ ، $\overline{\text{م ب}}$ ، $\overline{\text{م جـ}}$ في النقطة أَ ، بَ ، جَ فإذا كان $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}} \cap \overleftrightarrow{\text{أَ جَ}} = \{\text{س}\}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \cap \overleftrightarrow{\text{أَ بَ}} = \{\text{ص}\}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ ب}} \cap \overleftrightarrow{\text{جـ بَ}} = \{\text{ع}\}$

أثبت أن : ١- س ، ص ، ع تنتمي لمستقيم واحد هو خط تقاطع المستويين أ ب جـ ، أَ بَ جَ .

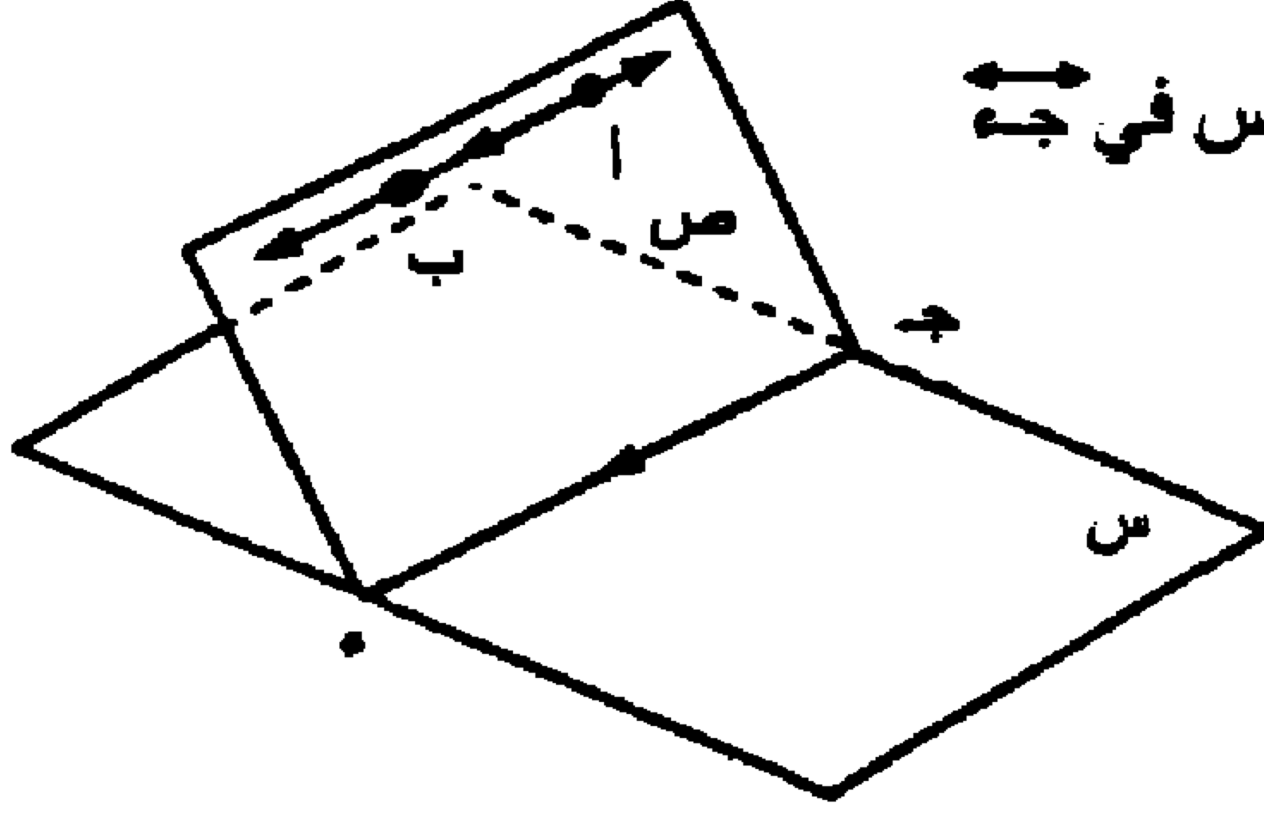
٢- س ص هو خط تقاطع المستويين أ ب جـ ، أَ بَ جَ .



توازي مستقيم ومستو

نظرية (١) :-

إذا وازي مستقيم مستوياً فإنه يوازي جميع المستقيمات التي تنشأ عن تقاطع هذا المستوي مع المستويات التي تحتوي ذلك المستقيم .



المعطيات : $\overleftrightarrow{أب}$ // المستوي س

ص أي مستوي يحتوي أ ب ويقطع المستوي س في $\overleftrightarrow{جـء}$

المطلوب : $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{جـء}$

البرهان : $\overleftrightarrow{أب}$ // المستوي س

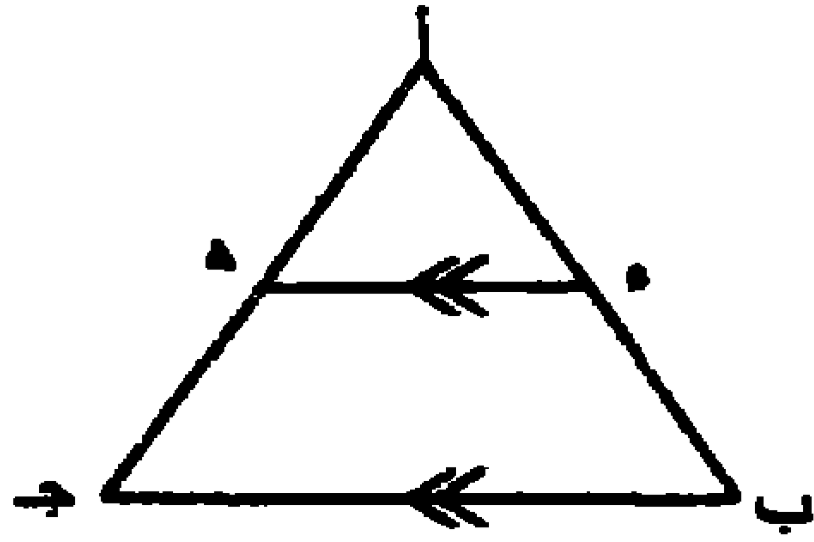
∴ $\overleftrightarrow{أب} \cap$ س = ϕ ، ∵ $\overleftrightarrow{جـء} \subset$ س

∵ $\overleftrightarrow{أب} \cap \overleftrightarrow{جـء} = \phi$

∵ $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{جـء}$ يقعان في مستوي واحد وهو ص

∴ $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{جـء}$

مفاهيم تفيد في حل التمارين :-



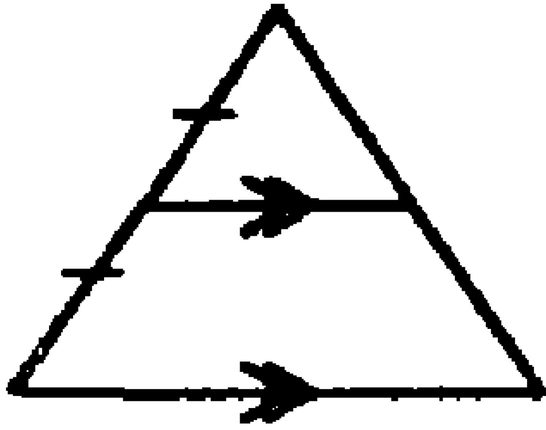
١- في Δ أ ب جـ إذا كان ء هـ // ب جـ

∴ Δ أ ء هـ ، أ ب جـ متشابهان

∴ (أ) $\frac{أء}{أب} = \frac{أهـ}{أجـ} = \frac{ءهـ}{ب جـ}$

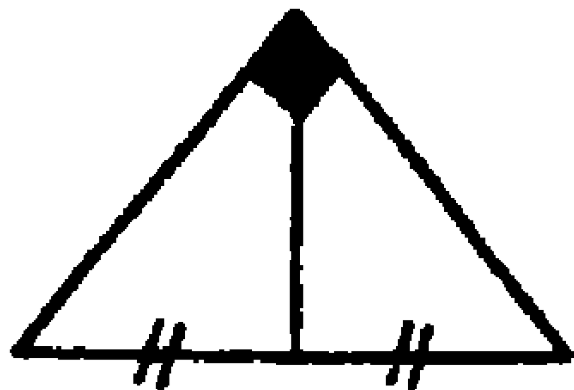
(ب) $\frac{\text{مساحة } \Delta \text{ أ ب جـ}}{\text{مساحة } \Delta \text{ أ ء هـ}} = \left(\frac{أب}{أء}\right)^2 = \left(\frac{ب جـ}{ءهـ}\right)^2 = \left(\frac{أجـ}{أهـ}\right)^2$

(ج) $\frac{\text{محيط } \Delta \text{ أ ب جـ}}{\text{محيط } \Delta \text{ أ ء هـ}} = \frac{أب}{أء} = \frac{ب جـ}{ءهـ} = \frac{أجـ}{أهـ}$



٢- القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في Δ توازي الضلع الثالث وتساوي نصفه .

٣- المستقيم المرسوم من منتصف ضلع في المثلث موازياً أحد الضلعين الآخرين ينصف الضلع الثالث .



٤- المتوسط الخارج من رأس القائمة إلي منتصف الوتر ينصف الوتر.

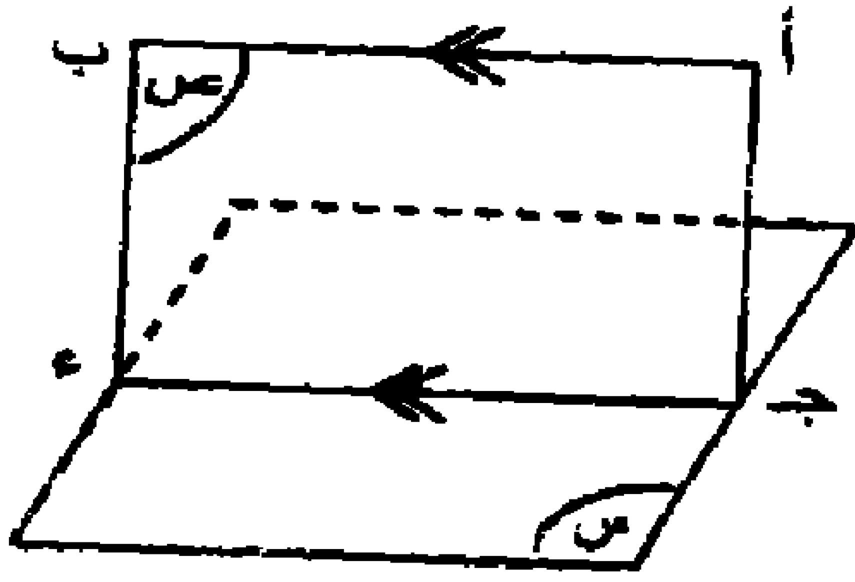
من النظرية السابقة لإثبات توازي مستقيمين في الفراغ يجب توافر الشرطين الآتيين معاً :

١) المستقيمان لا يتقاطعان .　　　　٢) المستقيمان يقعان في مستوي واحد .

حقيقة:-

إذا وازي مستقيم خارج مستوي مستقيماً في المستوي فإنه يوازي ذلك المستوي .

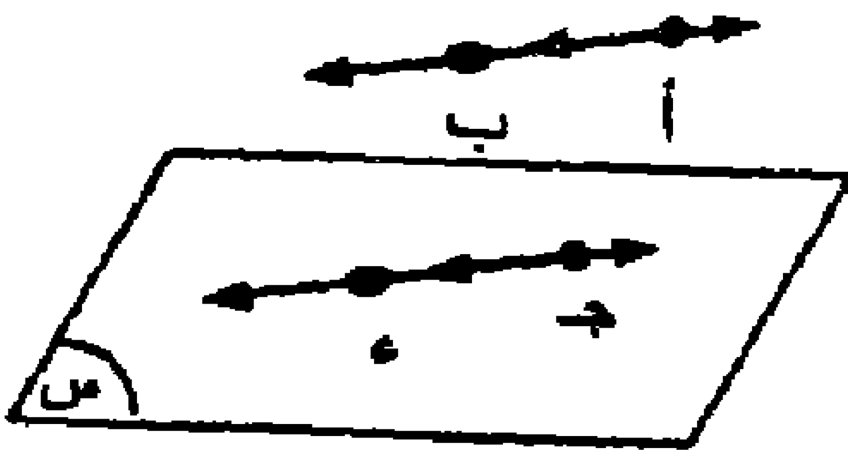
حيث أ ب خارج المستوي س ويوازي جـ ء الواقع في المستوي س وعلي ذلك فإن:



أ ب ، جـ ء يحددان مستوي وليكن ص فإذا كان المستقيم أ ب لا يوازي المستقيم س معني ذلك أنه لا يلاقيه في نقطة تقاطع علي خط تقاطع المستويين س ، ص أي علي المستقيم جـ ء وهذا مستحيل لأن: أ ب // جـ ء .

نتـــائـــج

(١) إذا وازي مستقيم مستوياً فالمستقيم الذي يمر بأي نقطة من نقط المستوي موازياً للمستقيم المعلوم يقع في المستوي .

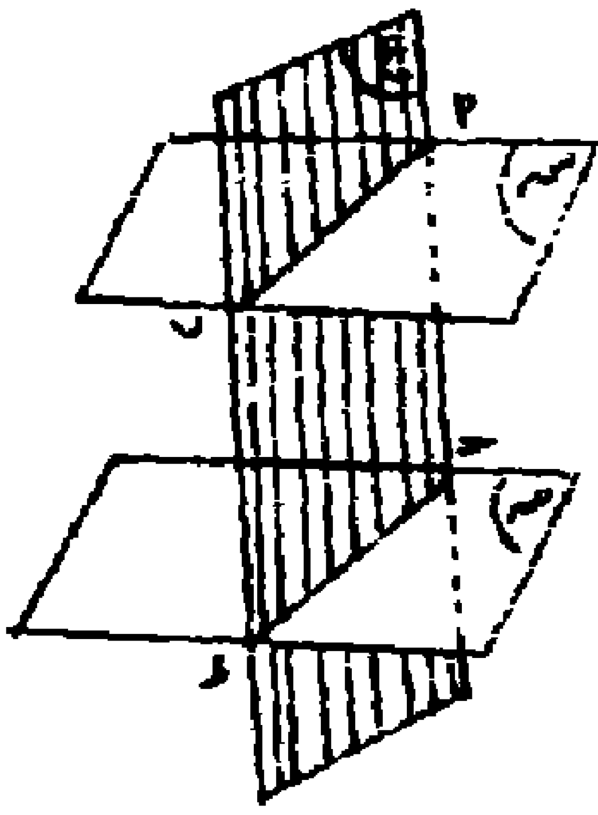


$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // المستوي س

، جـ ∈ س ورسمنا $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ // $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

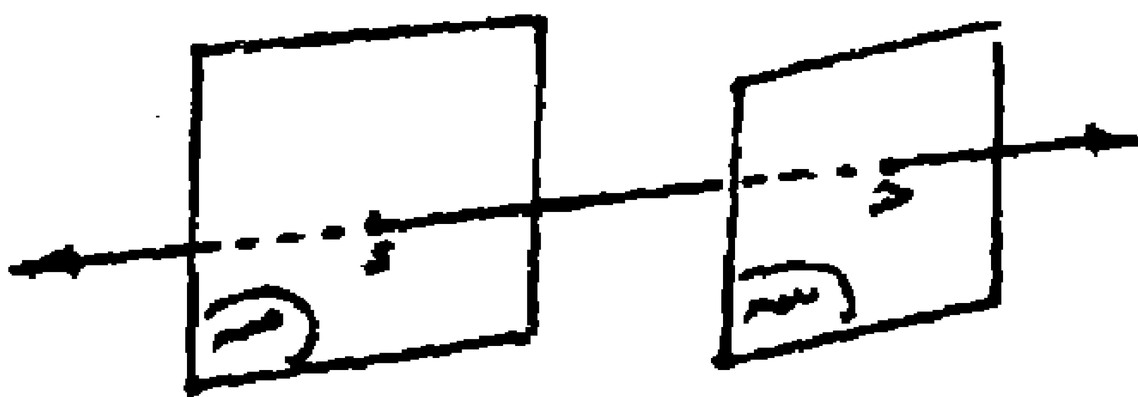
∴ جـ ء يقع في المستوي س

(٢) إذا قطع مستو مستويين متوازيين فخطا تقاطعه معهما يكونان متوازيين س ، ص مستويان متوازيان قطعهما المستوي ع في أ ب ، جـ ء .



∴ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$

(٣) إذا قطع مستقيم أحد مستويين متوازيين فإنه يقطع الآخر .



∵ س // ص

أ ب ∩ س = { جـ }

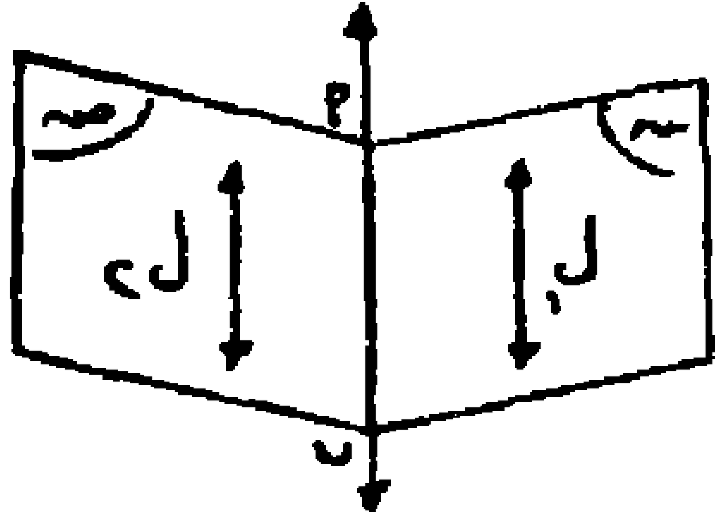
∴ أ ب ∩ ص = {ء}

(٤) إذا توازي مستقيمين ومر بكل منهما مستوي وتقاطع المستويان كان خط تقاطعهما موازيا لهذين المستقيمين : إذا كان ل$_{١}$ // ل$_{٢}$ ، ل$_{١}$ ⊂ س

، ل$_{٢}$ ⊂ ص وكان المستويان س ، ص

متقاطعان في $\overleftrightarrow{أ ب}$ فإن :

$\overleftrightarrow{أ ب}$ // كلا من ل$_{١}$ ، ل$_{٢}$

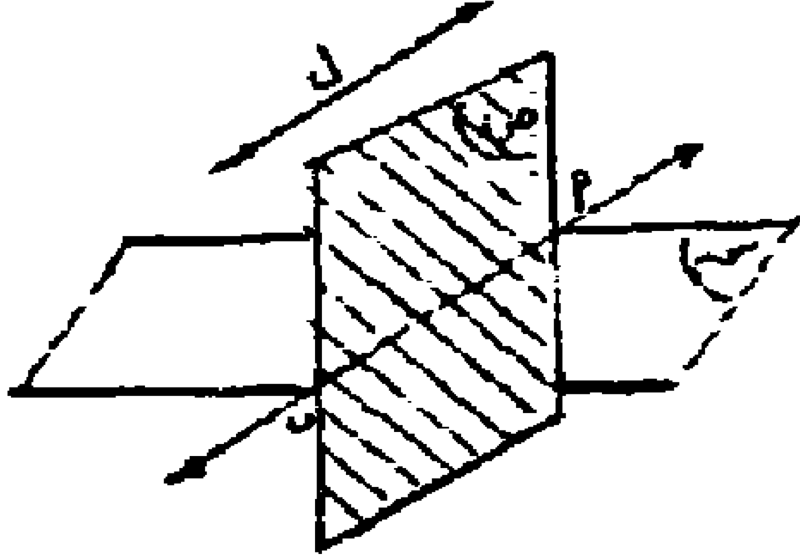


(٥) إذا وازي مستقيم كلا من مستويين

متقاطعين فإنه يوازي خط تقاطعهما

إذا كان المستقيم ل يوازي كلا من المستويين

س ، ص المتقاطعين في $\overleftrightarrow{أ ب}$ فإن ل // $\overleftrightarrow{أ ب}$



مثال: جـ أ ب ، ء أ ب مثلثان في مستويين مختلفين فإذا كانت س ، ص ، م ، ن منتصفات جـ أ ، جـ ب ، ء أ ، ء ب علي الترتيب فأثبت أن :

١) س ص // المستوي ء أ ب ٢) الشكل س ص ن م متوازي أضلاع.

الحــــــــل

في Δ أ ب جـ

∵ س منتصف جـ أ ، ص منتصف جـ ب

∴ س ص = $\frac{١}{٢}$ أ ب ، س ص // أ ب ---- (١)

، ∵ أ ب ⊂ المستوي ء أ ب

∴ س ص // المستوي ء أ ب **أولا**

في Δ ء أ ب

∵ م منتصف ء أ ، ن منتصف ء ب

∴ م ن = $\frac{١}{٢}$ أ ب ، م ن // أ ب ----- (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن س ص // م ن ، س ص = م ن = $\frac{١}{٢}$ أ ب

في الشكل س ص ن م

∵ س ص = م ن ، س ص // م ن

∴ الشكل س ص ن م متوازي أضلاع **ثانيا**

مثال: س ، ص مستويان متوازيان ، أ ء يقطع المستويين في ب ، جـ علي الترتيب بحيث أ ب : ب جـ : جـ ء = ٣ : ٢ : ١ ، أ و يقطع المستويين س ، ص في النقطتين هـ ، و ، ء ن يقطعهم في م ، ن أثبت أن: $\frac{\text{م جـ}}{\text{ن ب}} \times \frac{\text{ب هـ}}{\text{جـ ء}} = \frac{١}{٥}$

البرهـــــان

∵ المستوي ء ب ن يقطع المستويين المتوازيين س ، ص

في $\overline{\text{م جـ}}$ ، $\overline{\text{ن ب}}$ ∴ $\overline{\text{م جـ}} // \overline{\text{ن ب}}$

∴ $\frac{\text{م جـ}}{\text{ن ب}} = \frac{\text{ء جـ}}{\text{ء ب}} = \frac{١}{٣}$ ---- (١)

وبالمثل المستوي أ جـ و يقطع المستويين المتوازيين س ، ص

في $\overline{\text{ب هـ}}$ ، $\overline{\text{جـ و}}$ ∴ $\overline{\text{ب هـ}} // \overline{\text{جـ و}}$

∴ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{جـ و}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}} = \frac{٣}{٥}$ ----- (٢)

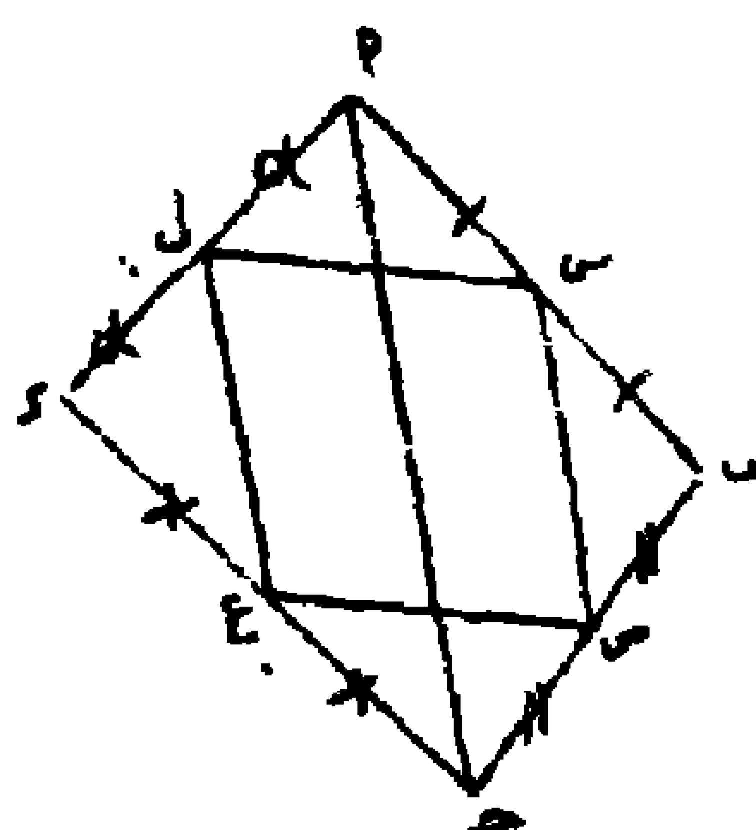
من (١) ، (٢)

∴ $\frac{\text{م جـ}}{\text{ن ب}} \times \frac{\text{ب هـ}}{\text{جـ و}} = \frac{١}{٣} \times \frac{٣}{٥} = \frac{١}{٥}$

مثال: أ ، ب ، جـ ، ء أربع نقط ليست في مستو واحد (هرم ثلاثي) نصفت $\overline{\text{أ ب}}$ في س ، $\overline{\text{ب جـ}}$ في ص ، $\overline{\text{جـ ء}}$ في ع ، $\overline{\text{ء أ}}$ في ل برهن أن :-

١) س ص // المستوي أ ء جـ ٢) النقط س ، ص ، ع ، ل في مستو واحد .

الحـــــل



Δ أ ب جـ ∵ $\overline{\text{س ص}}$ واصل بين منتصفي ضلعين

∴ $\overline{\text{س ص}} // \overline{\text{أ جـ}}$ ويساوي نصفه ---- (١)

∵ $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}} \subset$ المستوي أ ء جـ

∴ $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ // المستوي أ ء جـ

Δ أ ء جـ ∵ $\overline{\text{ل ع}}$ واصل بين منتصفي ضلعين

∴ $\overline{\text{ل ع}} // \overline{\text{أ جـ}}$ ويساوي نصفه ---- (٢)

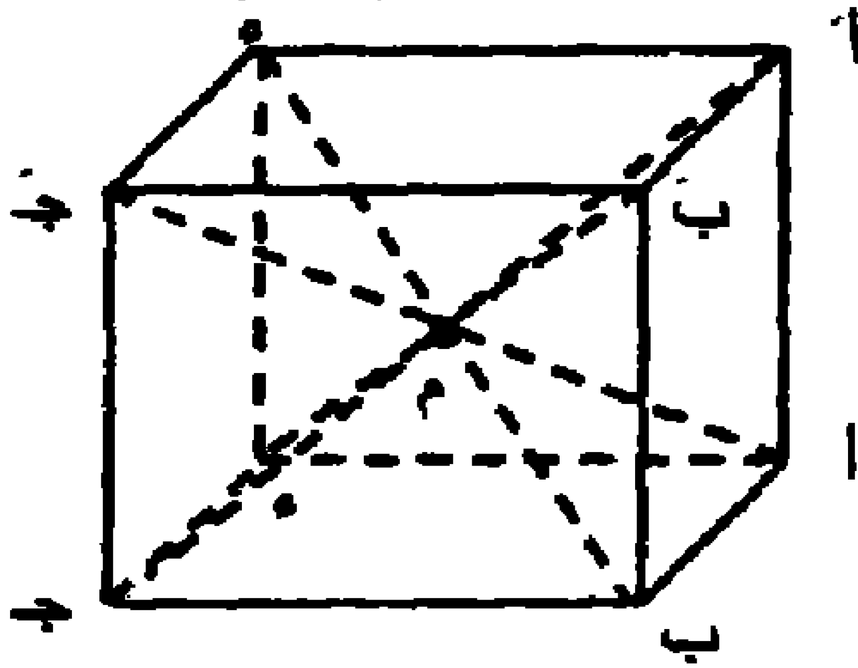
من (١) ، (٢) ∴ الشكل س ص ع ل ▱

∴ النقط س ، ص ،ع ، ل تقع في مستو واحد وهو متوازي الأضلاع .

مثال: أثبت أن:

أقطار متوازي السطوح تتقاطع في نقطة واحدة هي منتصف كل منها.

- البرهان -



∵ $\overline{ءَ ء} // \overline{ب بَ}$ ، ءَ ء = بَ ب

∴ الشكل ءَ بَ ب ء متوازي أضلاع

∴ قطرا $\overline{ءَ ب}$ ، $\overline{ء جَ}$ يتقاطعان في نقطة م

منتصف كلاً منهما وكذلك $\overline{أ ب} // \overline{ءَ جَ}$ ، أ ب = ءَ جَ

∴ الشكل ءَ أ جَ متوازي أضلاع

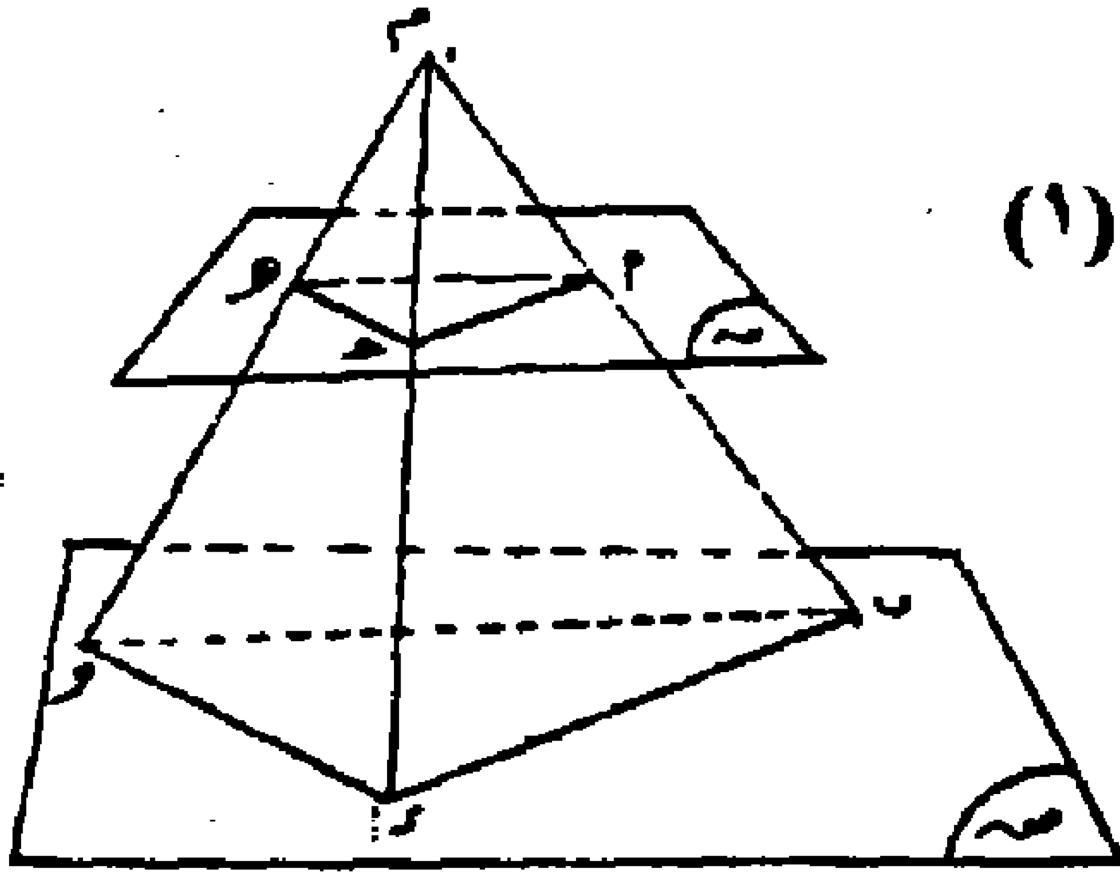
∴ قطراه $\overline{ءَ ب}$ ، $\overline{جَ أ}$ ينصف كل منهما الآخر

∴ م منتصف $\overline{جَ أ}$ وبالمثل يمكن إثبات أن م منتصف القطر $\overline{جـ أَ}$

∴ الأقطار الأربعة تتقاطع في نقطة واحدة هي منتصف كل منها.

مثال: س ، ص مستويان متوازيان ، م نقطة لا تنتمي لأي منهما رسمت المستقيمات $\overleftrightarrow{م أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{م جـ ء}$ ، $\overleftrightarrow{م هـ و}$ الغير مستوية معاً لتقطع المستوي س في النقط أ ، جـ ، هـ وتقطع المستوي ص في النقط ب ، ء ، و أثبت أن Δ أ جـ هـ يشابه Δ ب ء جـ.

- البرهان -



المستوي م ب و يقطع المستويين المتوازيين س، ص

في أ هـ ، ب و ∴ أ هـ // ب و

في Δ م ب و يكون $\frac{م أ}{م ب} = \frac{أ هـ}{ب و} = \frac{م هـ}{م و}$ ---- (١)

كذلك المستوي م ب ء يقطع المستويين المتوازيين

س ، ص في أ جـ ، ب ء

∴ أ جـ // ب ء

في Δ م ب ء

يكون $\frac{م أ}{م ب} = \frac{أ جـ}{ب ء} = \frac{م جـ}{م ء}$ ---- (٢)

بالمثل جـ هـ // ء و

∴ في Δ م ء و

يكون $\frac{م هـ}{ب جـ} = \frac{هـ جـ}{و ء} = \frac{م جـ}{م ء}$ ---- (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج أن

$\frac{أ هـ}{ب جـ} = \frac{هـ جـ}{ب ء} = \frac{هـ جـ}{و ء}$

أي أن الأضلاع المتناظرة في Δ Δ أ جـ هـ ، ب ء و ومتناسبه

∴ Δ أ جـ هـ يشابه Δ ب ء و

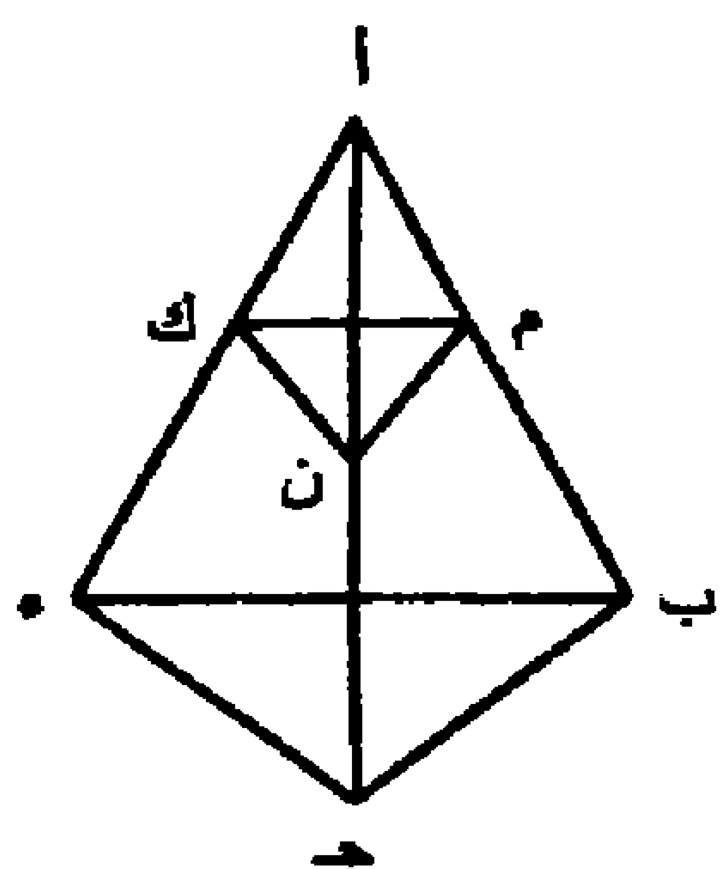
مثال: في الشكل المقابل - المستوي م ن ك // المستوي ب جـ ء برهن أن :

١) Δ م ن ك يشابه Δ ب جـ ء

٢) وإذا كانت أ م : م ب = ١ : ٢ وكانت

مساحة Δ ب جـ ء = ٢٧٠ سم٢

أوجد مساحة Δ م ن ك



الحـــــل

∵ المستو م ن ك // المستو ب جـ ء والمستو أ ب جـ قاطع لهما

∴ م ن // ب جـ

∴ في Δ أ ب جـ : $\frac{أ م}{أ ب} = \frac{م ن}{ب جـ} = \frac{أ ن}{أ جـ}$ وبالمثل يمكن اثبات أن :

في Δ أ جـ ء : $\frac{أ ن}{أ جـ} = \frac{ن ك}{جـ ء} = \frac{أ ك}{أ ء}$

، في Δ أ ب ء : $\frac{أ ك}{أ ء} = \frac{م ك}{ب ء} = \frac{أ م}{أ ب}$ ومن التناسبات الثلاثة نستنتج أن:

$\frac{م ن}{ب جـ} = \frac{ن ك}{جـ ء} = \frac{م ك}{ب ء}$ ∴ Δ Δ متشابهين

، ∵ Δ Δ متشابهين

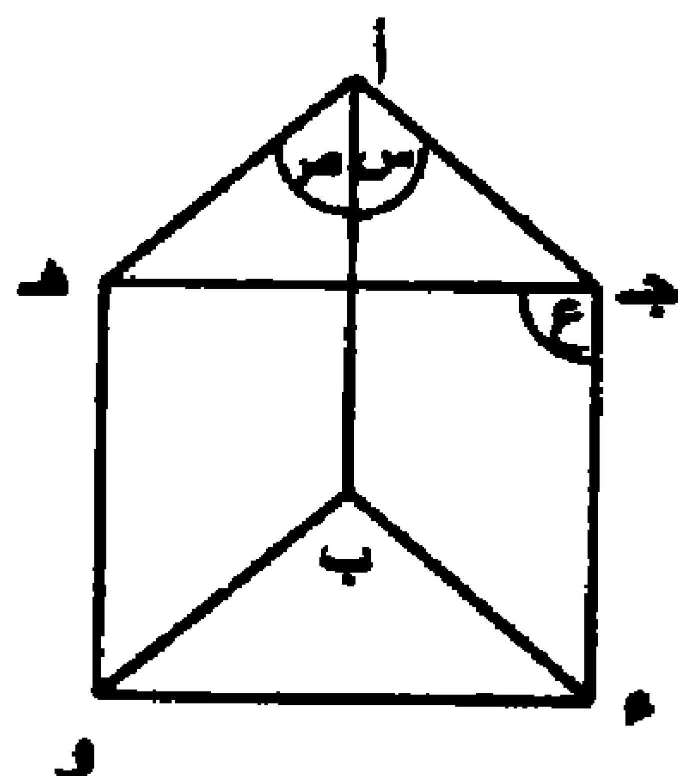
∴ النسبة بين مساحتيهما = مربع النسبة بين أي ضلعين متناظرين فيها.

∴ $\frac{مساحة \ Δ \ م ن ك}{مساحة \ Δ \ ب جـ ء} = \left(\frac{١}{٣}\right)^٢$ ∴ $\frac{مساحة \ Δ \ م ن ك}{٢٧٠} = \frac{١}{٩}$

∴ مساحة Δ م ن ك $= \frac{٢٧٠ \times ١}{٩} = ٣٠$ سم٢

مثال: مستويان س ، ص متقاطعان في $\overleftrightarrow{أب}$ ، المستوي ع يقطعهما في المستقيمين $\overleftrightarrow{جـ ء}$ ، $\overleftrightarrow{هـ و}$ علي الترتيب ، فإذا كان $\overleftrightarrow{جـ ء}$ // $\overleftrightarrow{هـ و}$ فاثبت أن : $\overleftrightarrow{أب}$ // كلا من $\overleftrightarrow{جـ ء}$ ، $\overleftrightarrow{هـ و}$

الحـــــل



∵ $\overleftrightarrow{جـ ء}$ // $\overleftrightarrow{هـ و}$ ، ∵ $\overleftrightarrow{هـ و}$ ⊂ ص

∴ $\overleftrightarrow{جـ ء}$ // المستوي ص

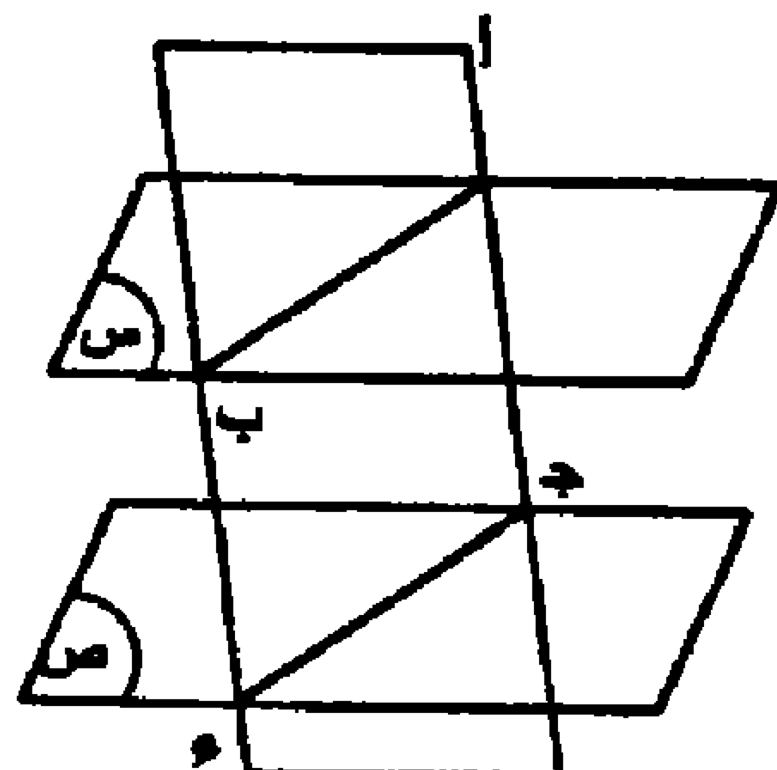
، ∵ المستوي س يمر بالمستقيم $\overleftrightarrow{جـ ء}$ ويقطع المستوي ص في $\overleftrightarrow{أب}$

∴ $\overleftrightarrow{جـ ء}$ // $\overleftrightarrow{أب}$ ولكن $\overleftrightarrow{جـ ء}$ // $\overleftrightarrow{هـ و}$

∴ $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{جـ ء}$ // $\overleftrightarrow{هـ و}$

تمرين (٣)

١- في الشكل إذا كان س ، ص مستويان قطعهما المستوي ع في أ ب ، جـ ء فأكمل الفراغات التالية بما يناسبها:

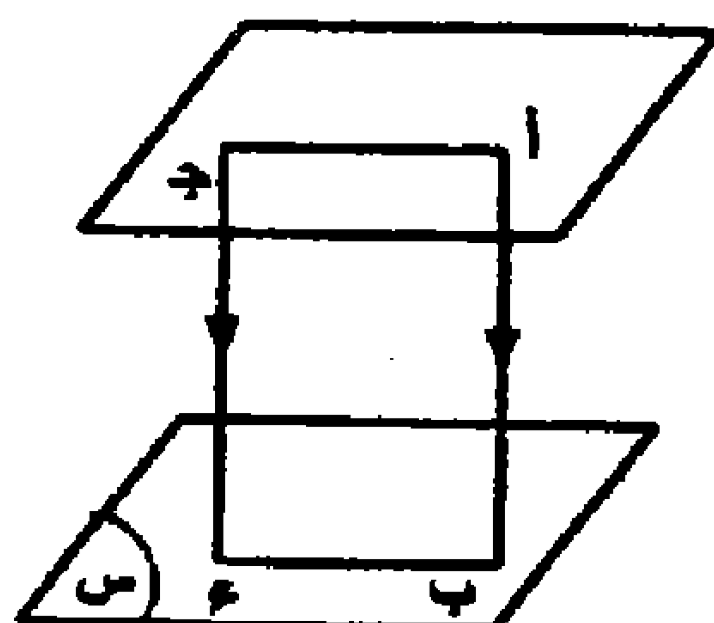


أ) أ ب ــــ جـ ء

ب) إذا كان أ ب = جـ ء كان الشكل أ ب ء جـ ــــ

ج) إذا كان أ ب ≠ جـ ء فإن الشكل أ ب ء جـ ــــ

٢- في الشكل المقابل :

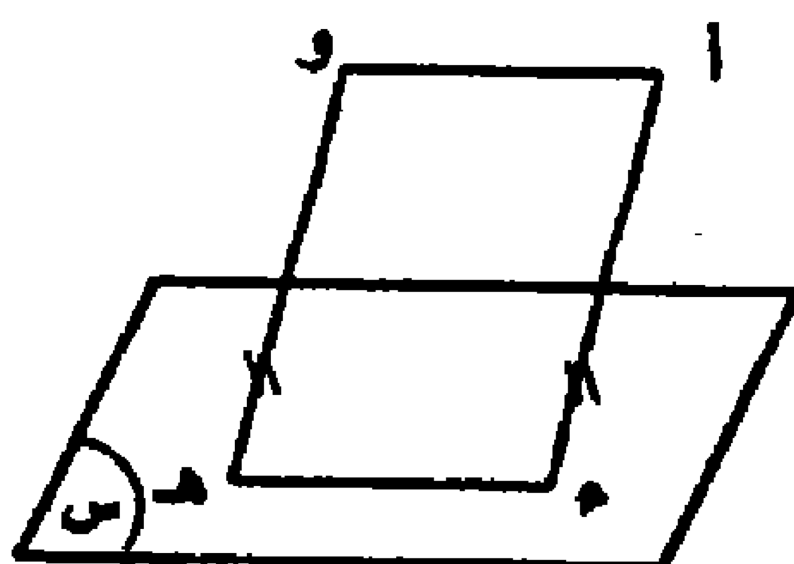


إذا كان أ ب // جـ ء وكان المستويان س ، ص يقطعان المستقيمين أ ب ، جـ ء في النقط أ ، جـ ، ب ، ء علي الترتيب .

- فاثبت أن : أ ب = جـ ء

٣- ء ، هـ نقطتين في مستوي رسم من النقطتين ء ، هـ المستقيمين المتوازيين ء م ، هـ و بحيث كان ء م = هـ و

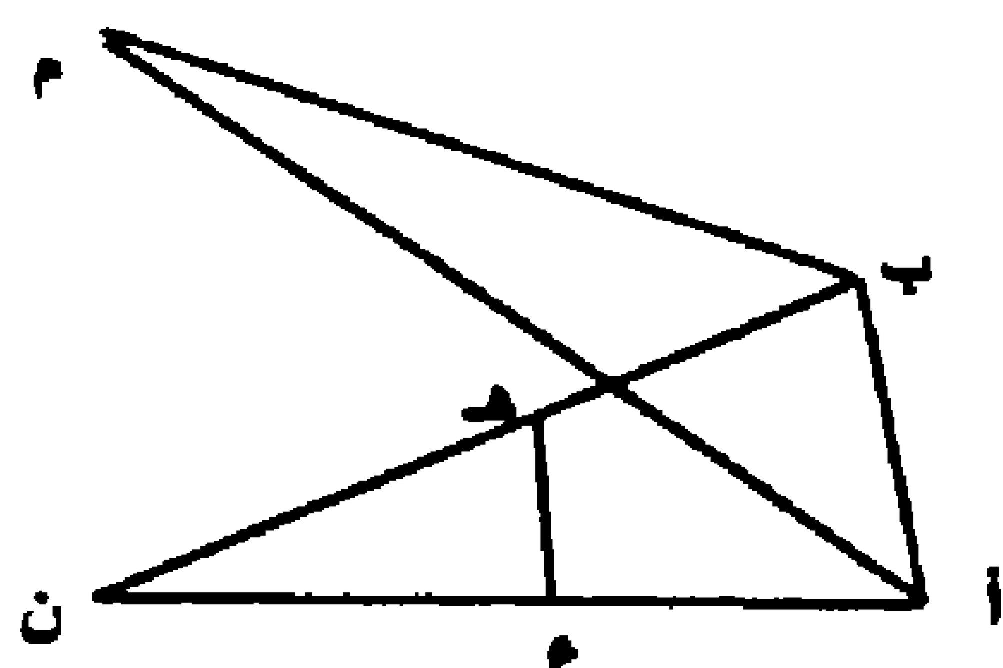
- أثبت أن م و // المستوي س .



٤- ن أ ب ، م أ ب مثلثان في مستويين مختلفين

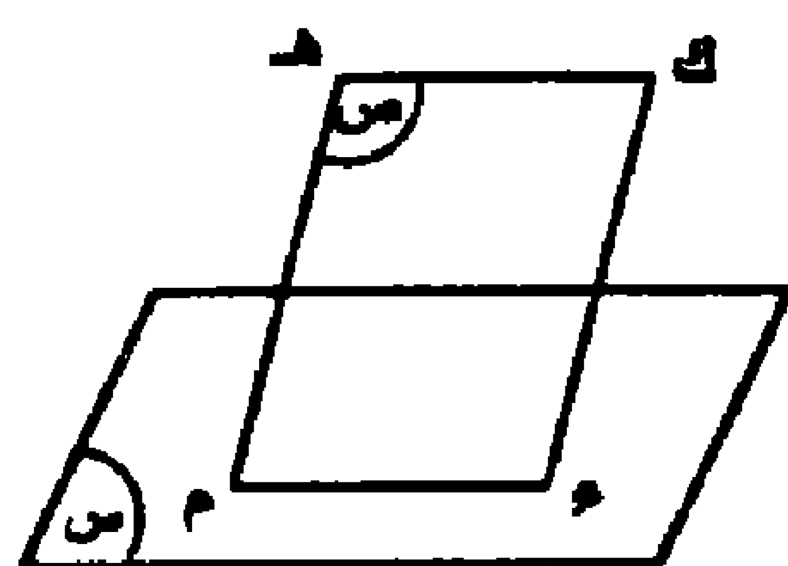
نصف المستقيمان ن أ ، ن ب في ء، هـ

- أثبت أن ء هـ يوازي المستوي م أ ب



٥- س مستوي معلوم ، ك هـ مستقيم معلوم خارج المستوي س بحيث كان ك هـ يوازي المستوي س ، رسم المستقيمان المتوازيان ك ء ، هـ م فقطعا المستوي س في ء ، م

- أثبت أن الشكل ك ء م هـ متوازي أضلاع .



٦- م أ ب جـ هرم ثلاثي أخذت النقط ء، هـ ، و علي الأحرف م أ ، م ب ، م جـ علي الترتيب بحيث كان $\frac{\text{م ء}}{\text{ء أ}} = \frac{\text{م هـ}}{\text{هـ ب}} = \frac{\text{م و}}{\text{و جـ}}$ - أثبت أن : المستوي ء هـ و // المستوي أ ب جـ .

٧- المستقيم أ ب // المستوي س رسم الشعاعان هـ أ ، هـ ب فقطعا المستوي س في جـ ، ء علي الترتيب فإذا كان أ ب = $\frac{2}{3}$ جـ ء ومساحة سطح المثلث هـ جـ ء = ٣٦ سم^2 – أذكر اسم الشكل أ جـ ء ب وأوجد مساحة سطحه.

٨- أ ب ، جـ ء مستقيمان متخالفان ، م منتصف ب ء – رسم المستوي ل م ن موازياً لكل من أ ب ، جـ ء وقاطعاً ب جـ في ل ، أ ء في ن – أثبت أن :

١) م ن // أ ب ٢) ل م // جـ ء ٣) ل ن < $\frac{1}{2}$ (أ ب + جـ ء)

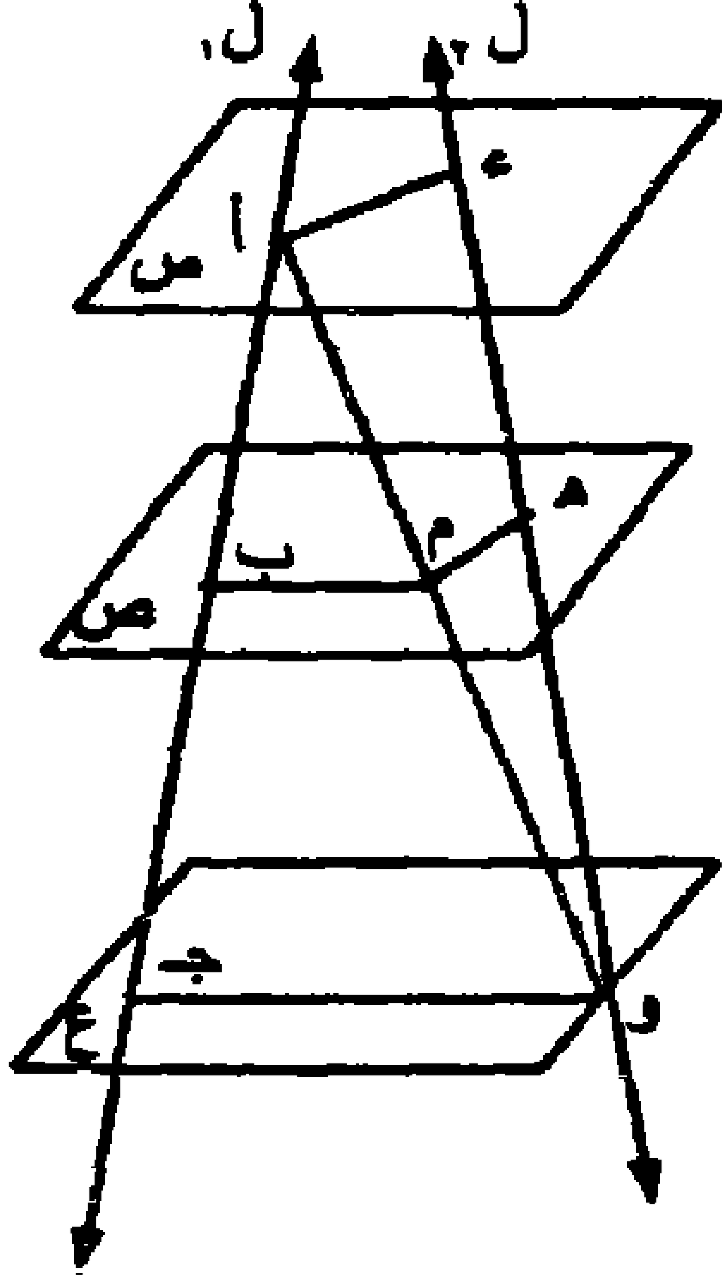
٩- أ ، ب ، جـ ثلاث نقط تنتمي إلي مستقيم واحد – ل يوازي مستوي مثل س ، م ∉ ل ، م ∉ س ، المستقيمات م أ ، م ب ، م جـ تقطع المستوي س في النقط ء ، هـ ، و علي الترتيب .

أثبت أن $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{هـ و}}$

١٠- أ ب جـ ء هرم ثلاثي ، س ∈ أ ب ، ص ∈ أ جـ ، ع ∈ أ ء فإذا كان س ص // ب جـ وكان س ع يقطع ب ء في هـ ، ص ع يقطع جـ ء في جـ - أثبت أن هـ و // س ص

تمرين مشهور

إذا قطعت عدة مستويات متوازية بمستقيمين فإن أطوال القطع المستقيمة المحصورة بينهما تكون متناسبة .



البرهان

نرسم $\overline{\text{أ ء}}$ فتقطع المستوي ص في م ونرسم $\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overline{\text{م ب}}$ ، $\overline{\text{م هـ}}$ ، $\overline{\text{جـ و}}$

∵ المستوي أ جـ و قطع المستويين المتوازيين ص ، ع في

$\overleftrightarrow{\text{ب م}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ و}}$ ∴ $\overleftrightarrow{\text{ب م}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ و}}$

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{أ م}}{\text{م و}}$ ----- (١)

وبالمثل المستوي ء و أ قطع المستويين المتوازيين

س ، ص أ ء ، هـ م ∴ أ ء // هـ م

∴ $\frac{\text{أ م}}{\text{م و}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{هـ و}}$ ---- (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{هـ و}}$ وهو المطلوب

ملاحظات :

١- إذا كان أ ب = ب جـ فإن ءهـ = هـ و

٢- يعرف هذا التمرين باسم نظرية لما ليس في الفراغ .

نظرية :

إذا تقاطع مستقيمان في مستوي وكانا متوازيين لمستقيمين متقاطعين في مستوي آخر كان مستوي المستقيمين الأولين موازيا لمستوي المستقيمين الآخرين .

تستخدم هذه النظرية في إثبات توازي مستويين حيث :



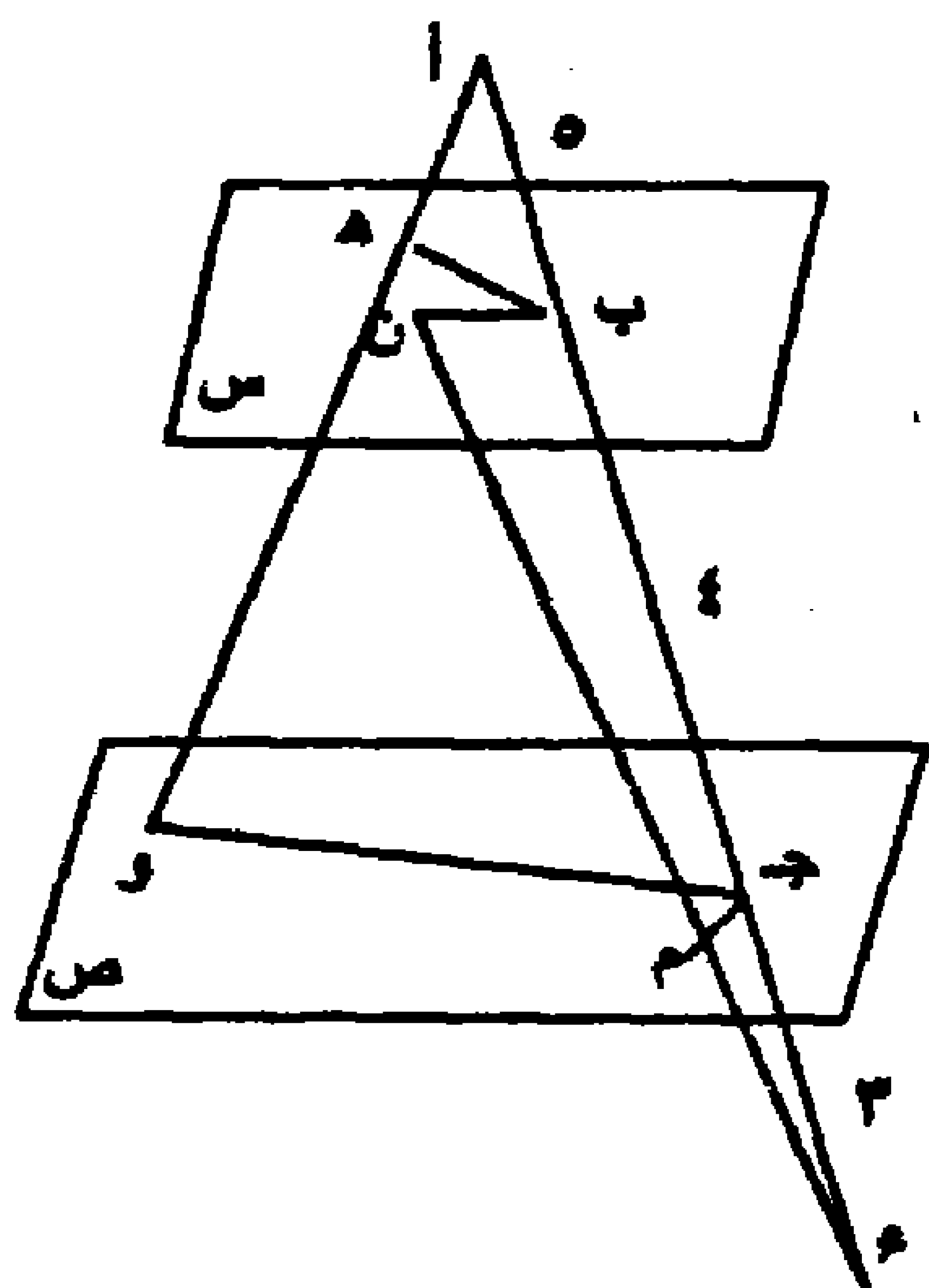
$ل_1$ ، $ل_2 \subset$ س

$ل_1 \cap ل_2 = \{م\}$

، $ل_3$ ، $ل_4 \subset$ ص ، $ل_3 \cap ل_4 = \{ن\}$

∴ المستوي س// المستوي ص

مثال : في الشكل س ، ص مستويان متوازيان ، أ ء قاطع لهما بحيث أ ب : ب جـ : جـ ء = ٥ : ٤ : ٣ فإذا كان ء ن قاطع لهما



- برهن أن : $\frac{م جـ}{ن ب} \times \frac{ب هـ}{جـ و} = \frac{٥}{٢١}$

الحـــــل

∵ المستوي س // المستوي ص ، $\overleftrightarrow{أ جـ}$ ، $\overleftrightarrow{أ و}$ قاطع لهما

∴ $\frac{أ ب}{أ جـ} = \frac{ب هـ}{جـ و} = \frac{٥}{٩}$ ----- (١)

∵ المستوى ص // المستوى س ، $\overleftrightarrow{ء أ}$ ، $\overleftrightarrow{ء ن}$ قاطع لهما

∴ $\frac{ء جـ}{ء ب} = \frac{جـ م}{ب ن} = \frac{٣}{٧}$ ----- (٢)

من (١) ، (٢)

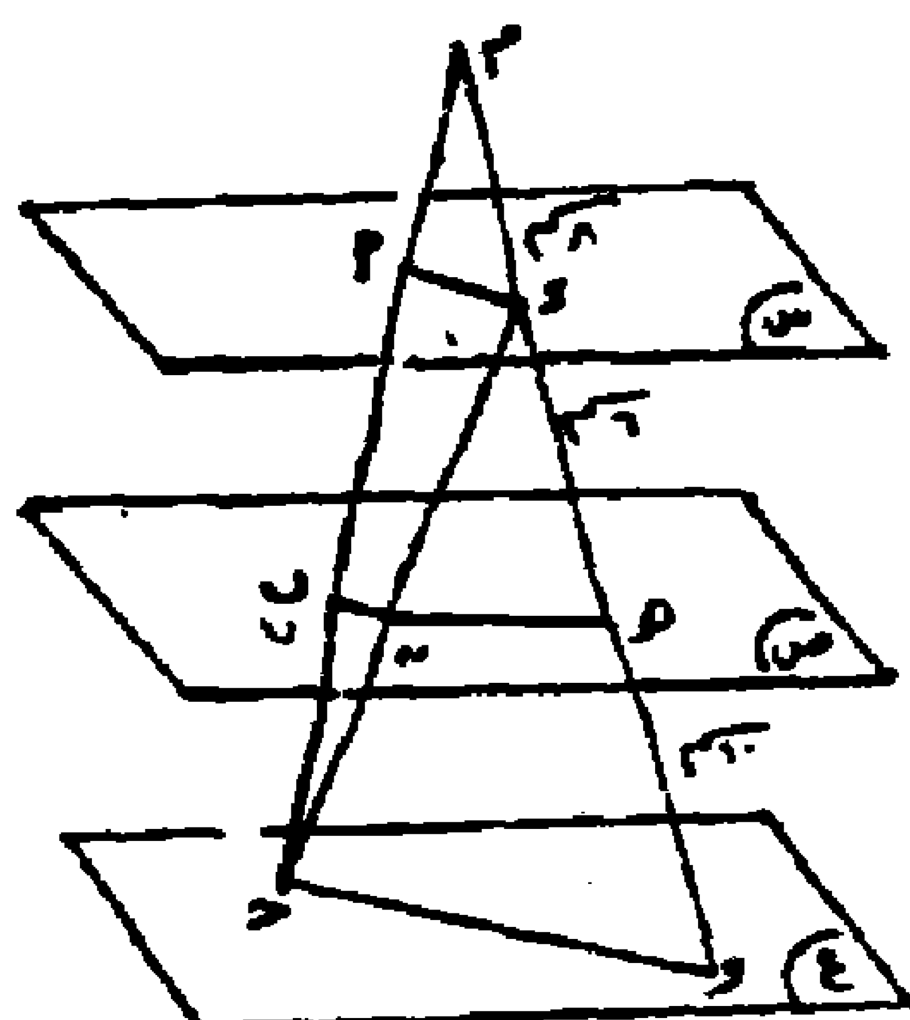
∴ $\frac{ب هـ}{جـ و} \times \frac{جـ م}{ب ن} = \frac{٥}{٩} \times \frac{٣}{٧} = \frac{٥}{٢١}$

مثال : في الشكل المقابل

س // ص // ع ، ء هـ = ٦ سم ، هـ و = ١٠ سم ، جـ و = ٢٤ سم ، م ء = ٨ سم. برهن أن :

١) ب ، ن ، هـ على استقامة واحدة . ٢) قيمة $\frac{ء ن}{ء جـ}$ ٣) أحسب طول ب هـ

الحـــــل



∵ س // ص ، المستوي م هـ ب قاطع ∴ $\overline{ن ب}$ // $\overline{ء أ}$

، ∵ ص // ع والمستوي ء و جـ قاطع ∴ $\overline{هـ ن}$ // $\overline{و جـ}$

، ∵ ع // س والمستوي م و جـ قاطع ∴ $\overline{ء أ}$ // $\overline{و جـ}$

∴ هـ ن ، $\overline{ن ب}$ // $\overline{و جـ}$ وهما مشتركان في نقطة واحدة

∴ النقط هـ ، ن ، ب على استقامة واحدة

Δ ء و جـ : $\overline{هـ ن}$ // $\overline{و جـ}$ ∴ $\frac{ء هـ}{هـ و} = \frac{ء ن}{ن جـ} = \frac{٦}{١٠}$

∵ $\frac{ء هـ}{ء و} = \frac{هـ ن}{و جـ}$ ∴ $\frac{٦}{١٦} = \frac{هـ ن}{٢٤}$

∴ هـ ن = ٩ سم

في Δ م و جـ :

∵ ء أ // و جـ ∴ $\frac{م ء}{م و} = \frac{ء أ}{و جـ}$

∴ $\frac{٨}{٢٤} = \frac{ء أ}{٢٤}$ ∴ ء أ = ٨ سم

في Δ جـ ء أ :

∵ ن ب // ء أ ∴ $\frac{جـ ن}{جـ ء} = \frac{ن ب}{أ ء}$

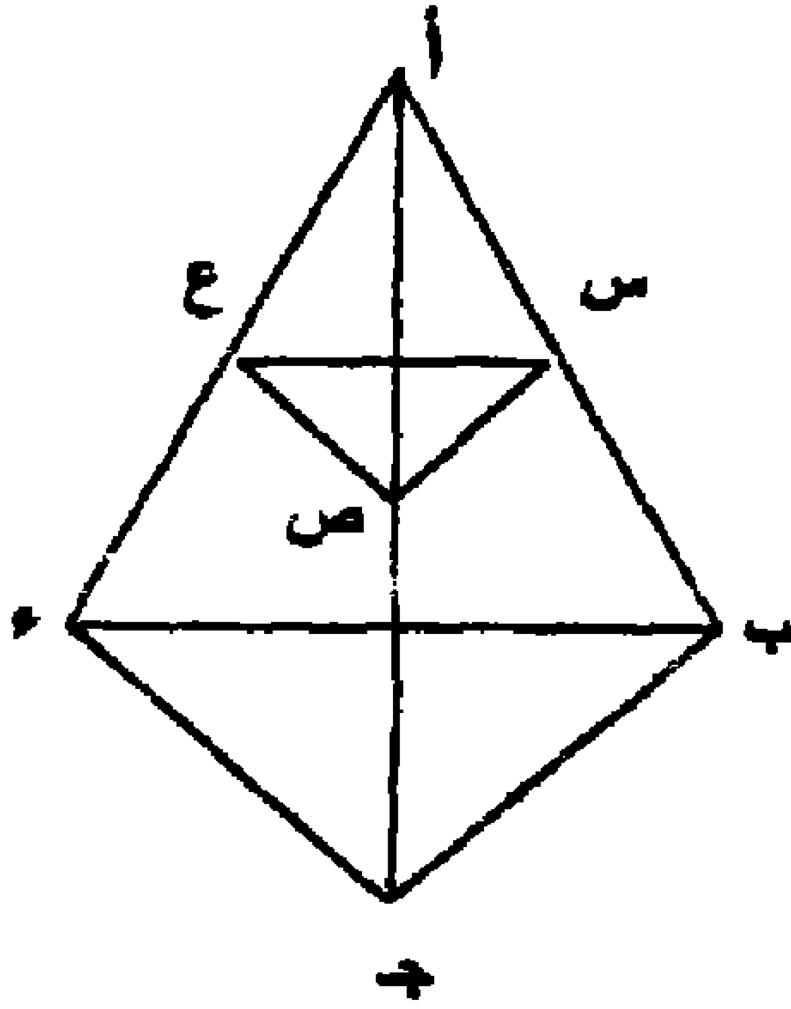
∴ $\frac{١٠}{١٦} = \frac{ن ب}{٨}$ ∴ ن ب = ٥ ∴ هـ ب = هـ ن + ن ب = ٩+٥ = ١٤

مثال : أ ب جـ ء هرم ثلاثي فيه س، ص ، ع منتصفات أ ب ، أ جـ ، أ ء برهن أن :

١) المستوي س ص ع // المستوى ب جـ ء ٢) Δ س ص ع يشابه Δ ب جـ ء

٣) النسبة بين مساحتيهما .

الحـــــل



∵ س منتصف أ ب ، ص منتصف أ جـ

∴ س ص // ب جـ وبالمثل

ص ع // جـ ء ، س ع // ب ء

، ∵ $\overline{س ص}$ ، $\overline{س ع}$ متقاطعان في س

، $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{ب ء}$ متقاطعان في ب

∴ مستوى س ص ع // مستوى ب جـ ء **أولاً**

، ∵ $\overline{س ص}$ // $\overline{ب جـ}$ في Δ أ ب جـ ∴ $\frac{أ س}{أ ب} = \frac{س ص}{ب جـ} = \frac{أ ص}{أ جـ}$

، $\overline{ص ع}$ // $\overline{جـ ء}$ في Δ أ جـ ء ∴ $\frac{أ ص}{أ جـ} = \frac{ص ع}{جـ ء}$

، $\overline{س ع}$ // $\overline{ب ء}$ في Δ أ ب ء ∴ $\frac{أ س}{أ ب} = \frac{س ع}{ب ء}$

∴ $\frac{س ص}{ب جـ} = \frac{ص ع}{جـ ء} = \frac{س ع}{ب ء}$

∴ Δ س ص ع يشابه Δ ب جـ ء والنسبة بين مساحتيهما = $(س ص)^{٢} : (ب جـ)^{٢}$

مثال : م أ ب جـ هرم ثلاثي أخذت النقط س ، ص ، ع علي $\overline{م أ}$ ، $\overline{م ب}$ ، $\overline{م جـ}$ علي الترتيب بحيث

كان $\frac{م س}{س أ} = \frac{م ص}{ص ب} = \frac{م ع}{ع جـ} = \frac{١}{٣}$. برهن أن :

١) المستوي س ص ع // المستوى أ ب جـ

٢) إذا أخذت نقطة ق ∈ $\overline{ب جـ}$ ورسم $\overline{م ق}$ فقطع $\overline{ص ع}$ في ل برهن أن أ ق = ٤ س ل

الحـــــل

$\because \frac{م س}{س أ} = \frac{م ص}{ص ب} = \frac{1}{3}$

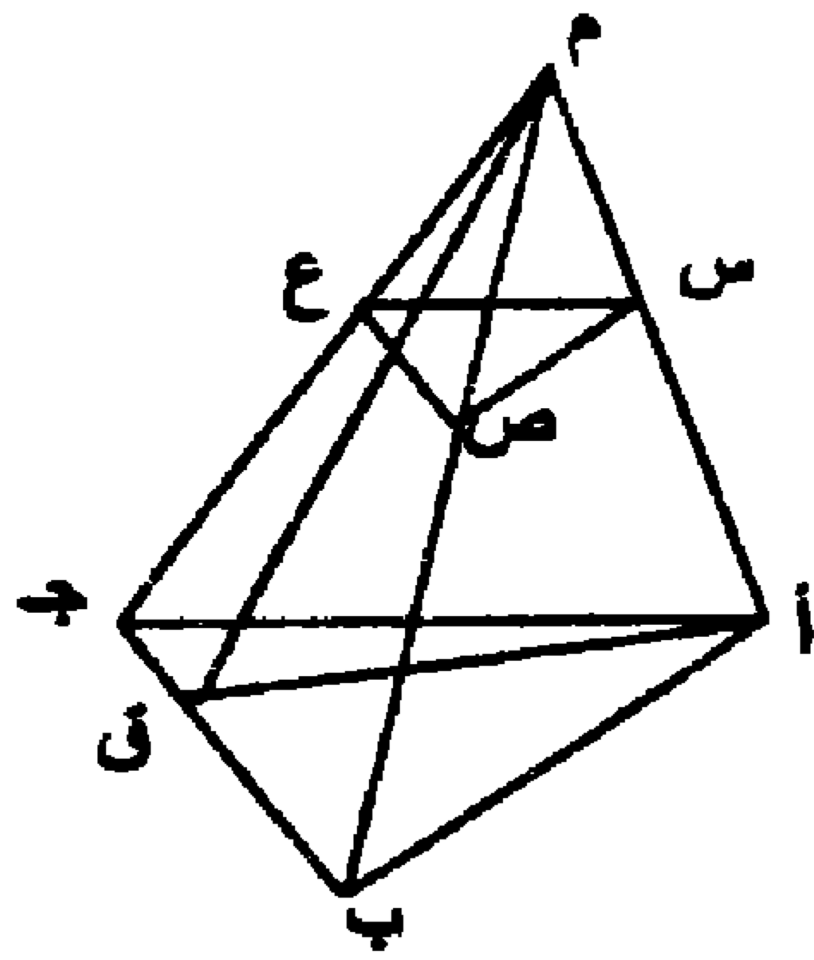
$\therefore \overline{س ص} // \overline{ب أ}$ ، $\overline{ص ع} // \overline{ب جـ}$

$\therefore$ المستوى س ص ع // المستوى أ ب جـ

$\because$ المستوى م أ ق قطع المستويين س ص ع ، أ ب جـ

في $\overleftrightarrow{س ل}$ ، $\overleftrightarrow{م ق}$ $\therefore \overline{س ل} // \overline{أ ق}$

$\therefore \frac{م س}{س أ} = \frac{م ص}{ص ب} = \frac{1}{4}$ $\therefore$ أ ق = ٤ س ل



تمرين (٤)

(١) م أ ب جـ هرم ثلاثي أخذت النقط ء، هـ ، و علي الأحرف $\overline{م أ}$ ، $\overline{م ب}$ ، $\overline{م جـ}$ علي الترتيب بحيث كان: $\frac{م ء}{م أ} = \frac{م هـ}{هـ ب} = \frac{م و}{و جـ} = \frac{1}{3}$

أ) أثبت أن المستوي ء هـ و // المستوي أ ب جـ

ب) إذا كان م (Δ ء هـ و) = ٩ سم^2 فأوجد مساحة Δ أ ب جـ

(٢) م أ ب جـ هرم ثلاثي مساحة قاعدته أ ب جـ = ١٥٠ سم^2 أخذت نقطة ء علي $\overline{م أ}$ بحيث $\frac{م ء}{ء أ} = \frac{2}{3}$ رسم من ء مستوى يوازي القاعدة أ ب جـ فقطع $\overline{م ب}$ في هـ ، $\overline{م جـ}$ في و

أ) أثبت أن : Δ ء هـ و يشابه Δ أ ب جـ

ب) أوجد مساحة Δ ء هـ و

(٣) أ ب جـ ، ء ب جـ مثلثان في مستويين مختلفين ، هـ منتصف $\overline{أ ب}$ ، ومنتصف $\overline{أ جـ}$ أثبت أن $\overleftrightarrow{هـ و}$ يوازي المستوي ء ب جـ .

(٤) أ ب جـ ، ء ب جـ مثلثان في مستويين مختلفين ، س، ص، ع، ل منتصفات $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ ، $\overline{جـ ء}$ ، $\overline{ب ء}$ علي الترتيب – أثبت أن الشكل س ص ع ل أضلاعه في مستوى واحد يوازي كلا من $\overleftrightarrow{ب جـ}$ ، $\overleftrightarrow{أ ء}$

(٥) أ ب جـ أَ بَ جَ منشور ثلاثي ، ن نقطة تقاطع قطري الوجه أَ أ ب بَ ، م نقطة تقاطع قطري الوجه بَ ب جـ جَ ، ط ، ق منتصفا $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ علي الترتيب. أثبت أن الشكل ن م ق ط متوازي أضلاع .

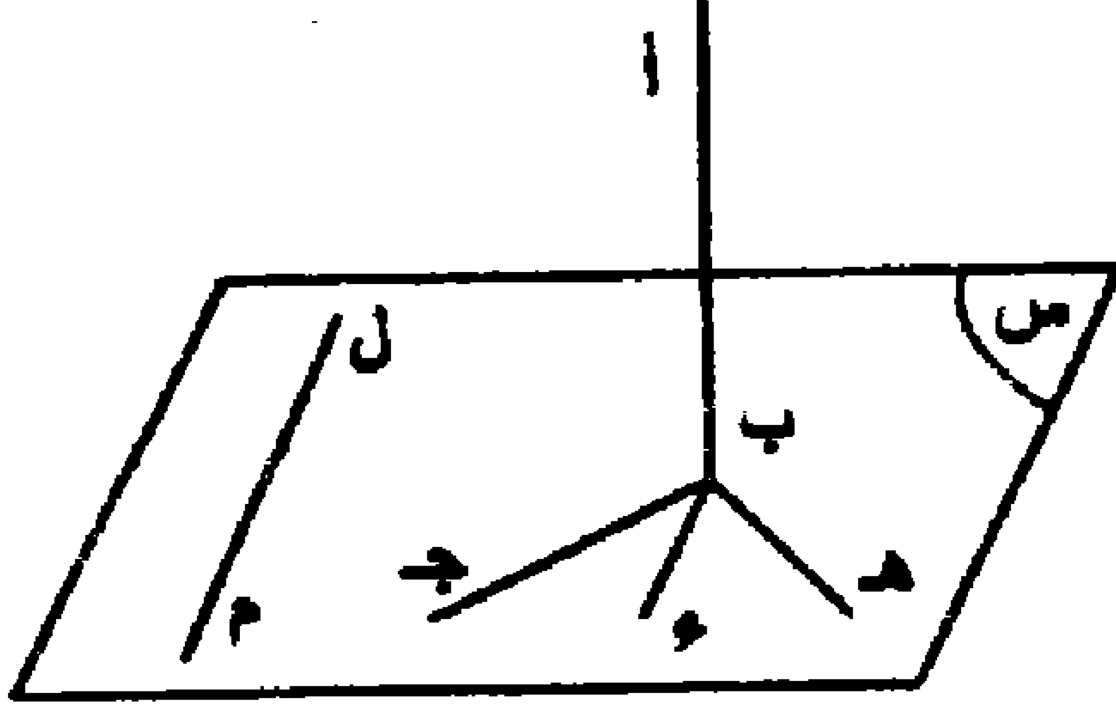
(٦) أ ب جـ ء مربع ، ن نقطة لا تنتمي إلي مستواه بحيث ن أ = ن ب = ن جـ = ن ء ، رسم مستوي مار بالضلع $\overline{\text{أ ب}}$ قاطعاً $\overline{\text{ن جـ}}$ ، $\overline{\text{ن ء}}$ في هـ ، و علي الترتيب. أثبت أن الشكل أب هـ و شبه منحرف متساوي الساقين .

(٧) س ، ص ، ع ثلاث مستويات متوازية قطعها المستقيمان ل ، م فإذا قطعها ل في أ ، ب ، جـ وقطعها م في ء، هـ ، و وكان أ ب = ٤سم ، ب جـ = ٢سم ، هـ و = ٣سم فأحسب طول $\overline{\text{ء هـ}}$.

(٨) س ، ص مستويان متوازيان ، $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ يقطع المستويين في ب، جـ علي الترتيب بحيث كان أ ب: ب جـ : جـ ء = ١: ٣: ٥ ، $\overleftrightarrow{\text{أ و}}$ يقطع س ، ص في النقطتين هـ و ، $\overleftrightarrow{\text{ء ن}}$ يقطع المستوى ص في م والمستوي س في ن – أثبت أن : ٢ م جـ . جـ و = ٥ ن ب . ب هـ

المستقيم العمودي علي المستو

يقال للمستقيم بأنه عمودي علي مستقيم ، إذا كان هذا المستقيم عمودياً علي جميع المستقيمات الواقعة في المستوي والتي تلاقي ذلك المستقيم .



في الشكل :

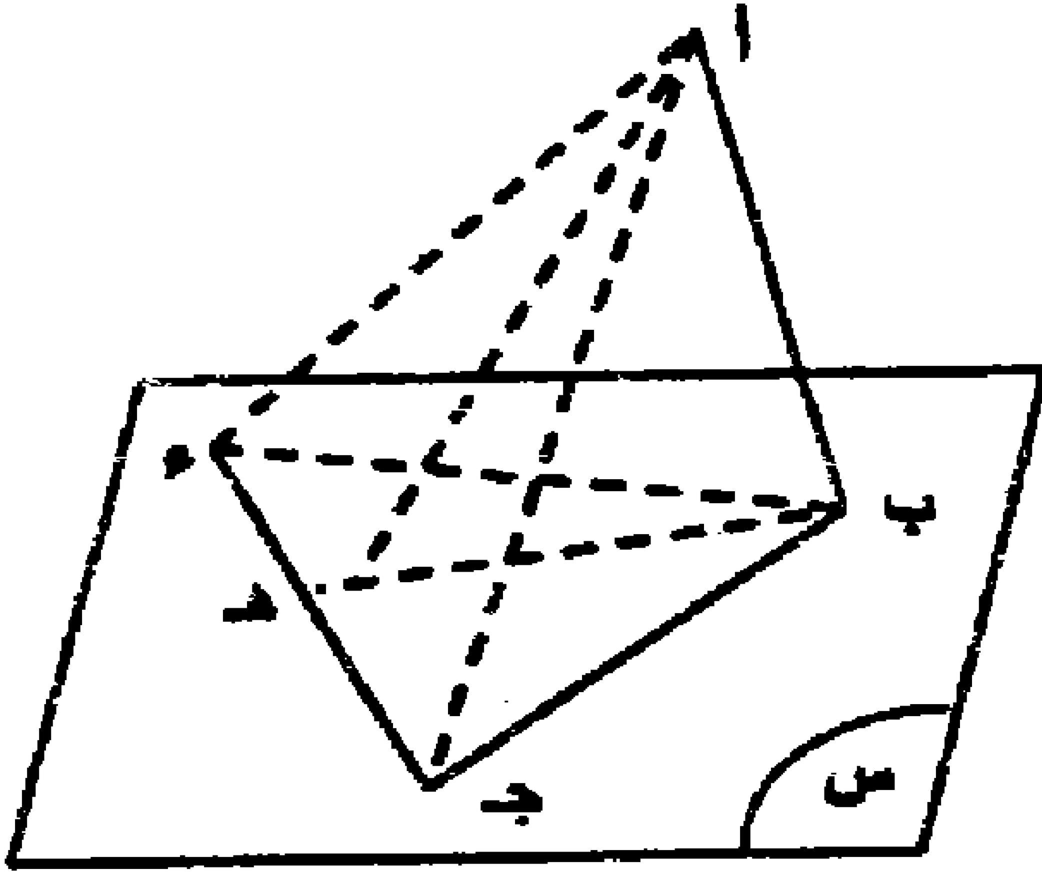
أ ب عمودي علي كلمن المستقيمات :

ب جـ ، ب ء ، ب هـ ، ل م الواقعة في المستوي س

∴ المستقيم أ ب ⊥ المستوي س .

أي أن : إذا كان المستقيم أ ب ⊥ المستوي س فانه يكون عمودياً علي جميع المستقيمات الواقعة في المستوي سواء مرت هذه المستقيمات بالنقطة ب أو لم تمر .

نظرية: المستقيم العمودي علي كل من مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عموديا علي مستويهما .



في الشكل:

أ ب ⊥ كل من المستقيمين ب جـ ، ب ء

المتقاطعين في نقطة ب والواقع في المستوي س

∴ أ ب ⊥ المستوي س

نتائج :

١- إذا كان مستقيم عمودياً علي كل من مستقيمين مستويين معاً وغير متوازيين فإنه يكون عمودياً علي مستويهما. (هذه النتيجة تعميم للنظرية السابقة) .

∴ لإثبات أن مستقيما عموديا علي مستوي معلوم ، نثبت أن هذا المستقيم يكون عموديا علي أي مستقيمين غير متوازيين في المستوي .

٢- جميع الأعمدة المرسومة علي مستقيم ل من نقطة أ عليه تقع في مستوى واحد هو المستوى العمودي علي هذا المستقيم.

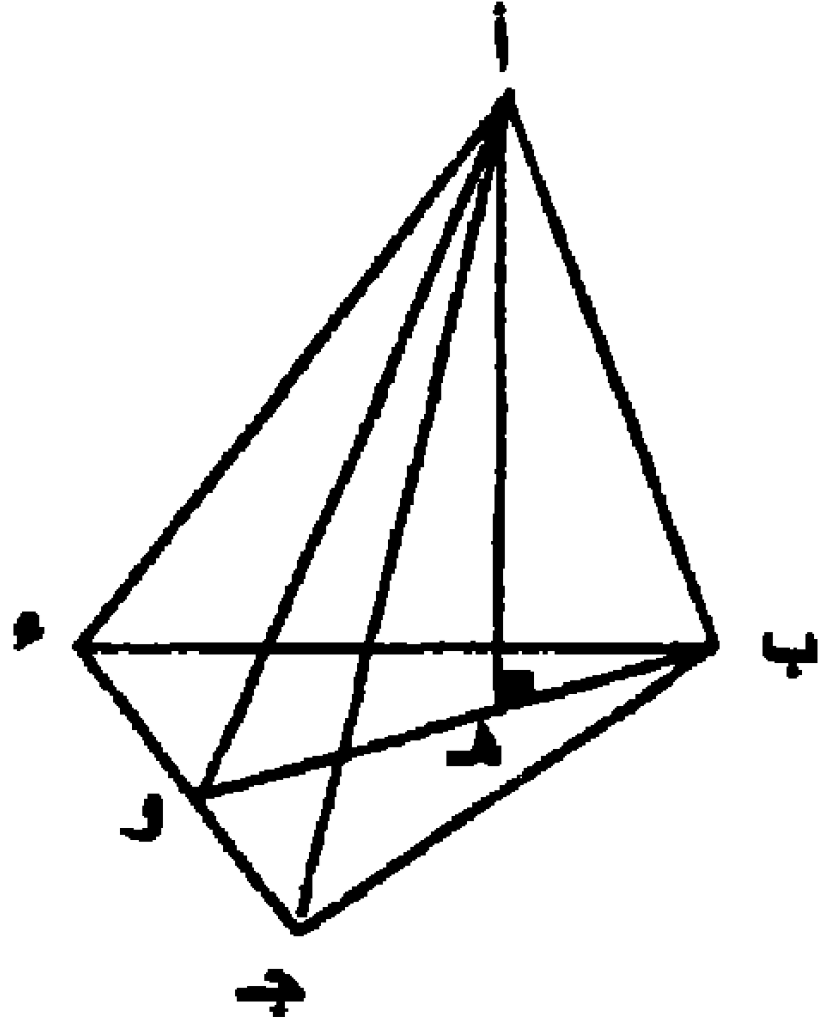
٣- يوجد مستو واحد وواحد فقط عمودي علي مستقيم ل من نقطة عليه.

٤- المستقيمان العمودان علي مستقيم واحد متوازيان .

٥- إذا كان مستقيم عمودياً علي كل من مستويين فإنهما يكونان متوازيان وكذلك إذا كان مستقيم عمودياً علي أحد مستويين متوازيين فإنه يكون عمودياً علي الآخر.

<u>تمرين :</u> أ ب جـ ء هرم ثلاثي فيه أ جـ = أ ء ، ب جـ = ء ب ، ب و متوسط في Δ ب جـ ء رسم أهـ ⊥ ب و برهن أن أ هـ ⊥ المستوى ب جـ ء .

الحـــــل



∵ و في منتصف جـ ء ، Δ ب جـ ء متساوي الساقين

∴ $\overline{ب و}$ ⊥ $\overline{جـ ء}$

∴ $\overline{جـ ء}$ ⊥ $\overline{ب و}$ ----- (١)

كذلك $\overline{أ و}$ ⊥ $\overline{جـ ء}$

∴ $\overline{جـ ء}$ ⊥ $\overline{أ و}$ ----- (٢)

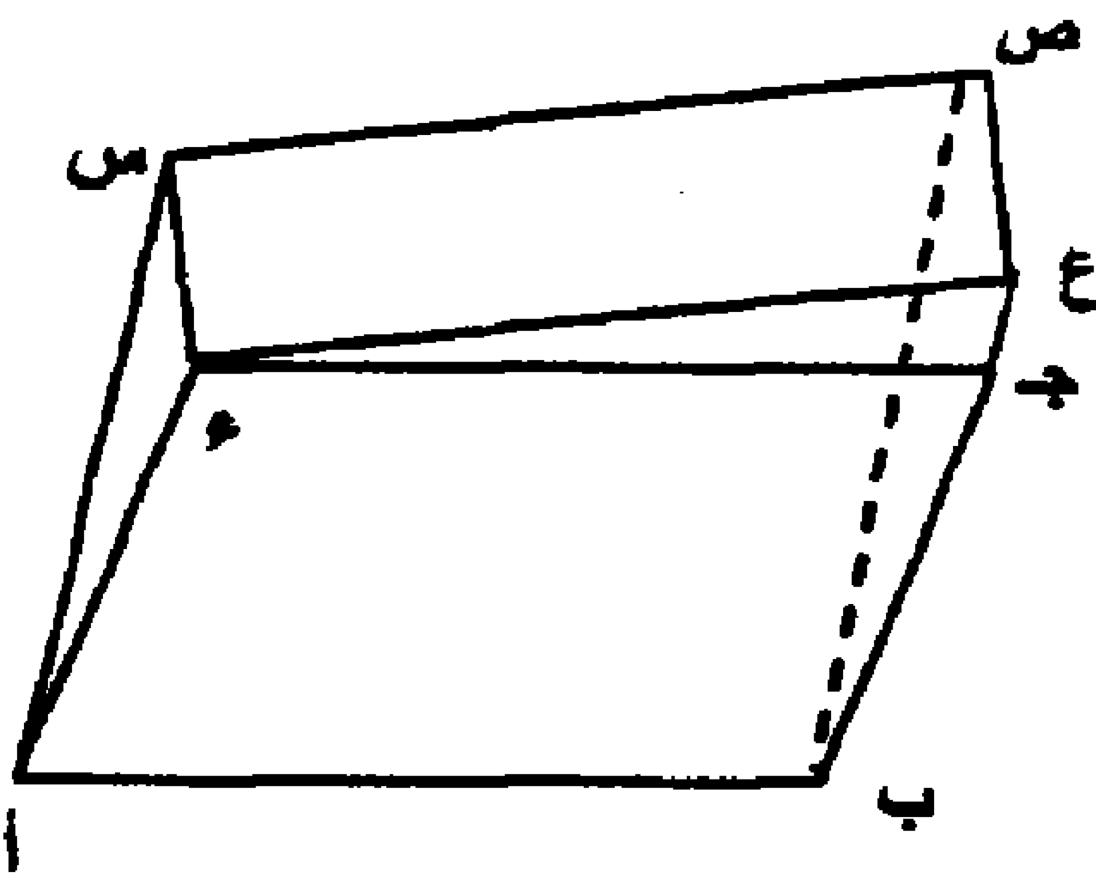
من (١) ، (٢)

∴ $\overline{جـ ء}$ ⊥ المستوي ب و أ ∴ $\overline{جـ ء}$ ⊥ $\overline{أ هـ}$

∴ $\overline{أ هـ}$ ⊥ كلا من $\overline{جـ ء}$ ، $\overline{ب و}$ ∴ $\overline{أ هـ}$ ⊥ المستوي ب جـ ء

<u>مثال:</u> أ ب جـ ء متوازي أضلاع أقيم من أ ، ب ، جـ أعمدة علي المستوي أ ب جـ ء فقابلت مستوياً ماراً بالنقطة ء في س ، ص ، ع . اثبت أن: الشكل س ص ع ء متوازي أضلاع.

الحـــــل



∵ $\overleftrightarrow{جـ ع}$ ، $\overleftrightarrow{ب ص}$ ، $\overleftrightarrow{أ س}$ أعمدة علي المستوى أ ب جـ ء

∴ $\overleftrightarrow{جـ ع}$ // $\overleftrightarrow{ب ص}$ // $\overleftrightarrow{أ س}$

∵ $\overleftrightarrow{ب ص}$ // $\overleftrightarrow{أ س}$ ، $\overleftrightarrow{ب جـ}$ // $\overleftrightarrow{أ ء}$

$\overleftrightarrow{ب ص}$ ∩ $\overleftrightarrow{ب جـ}$ = { ب }

، $\overleftrightarrow{أ س}$ ∩ $\overleftrightarrow{أ ء}$ = { أ }

∴ المستوي ب ص ع جـ // المستوي أ س ء

∵ المستوي ع ص س ء قاطعاً لهما في $\overleftrightarrow{ع ص}$ ، $\overleftrightarrow{س ء}$

∴ $\overleftrightarrow{ع ص}$ // $\overleftrightarrow{س ء}$ ـــــ (١)

بالمثل $\overleftrightarrow{ع جـ}$ // $\overleftrightarrow{ص ب}$ ، $\overleftrightarrow{جـ ء}$ // $\overleftrightarrow{ب أ}$

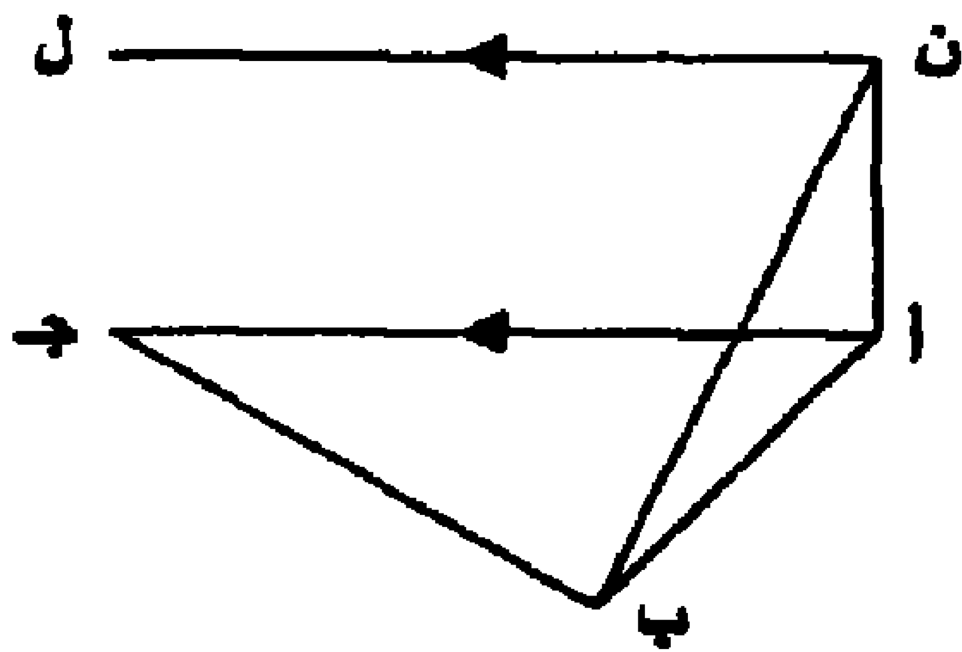
∴ المستوي ع جـ ء // المستوي ص ب أ س ، المستوي ع ص س ء قاطعاً لهما

في $\overleftrightarrow{ص س}$ ، $\overleftrightarrow{ع ء}$ ∴ $\overleftrightarrow{ص س}$ // $\overleftrightarrow{ع ء}$ ------ (٢)

من (١) ، (٢) ∴ الشكل س ص ع ء متوازي أضلاع

مثال: أ ب جـ ∆ قائم الزاوية في أ والمستقيم أ ن عمودي على مستوي المثلث رسم ن ل موازياً أ جـ أثبت أن ن ل ⊥ ن ب .

الحـــــل



أن ⊥ المستوي أ ب جـ

∴ ن أ ⊥ أ جـ ، أ جـ ⊥ أ ب ، أ جـ ⊥ أ ن

(لأن ن أ ⊥ مستوي ∆ أ ب جـ)

∴ أ جـ ⊥ المستوي ن أ ب

، ∵ ن ل // أ جـ ∴ ن ل ⊥ المستوي ن ل ب

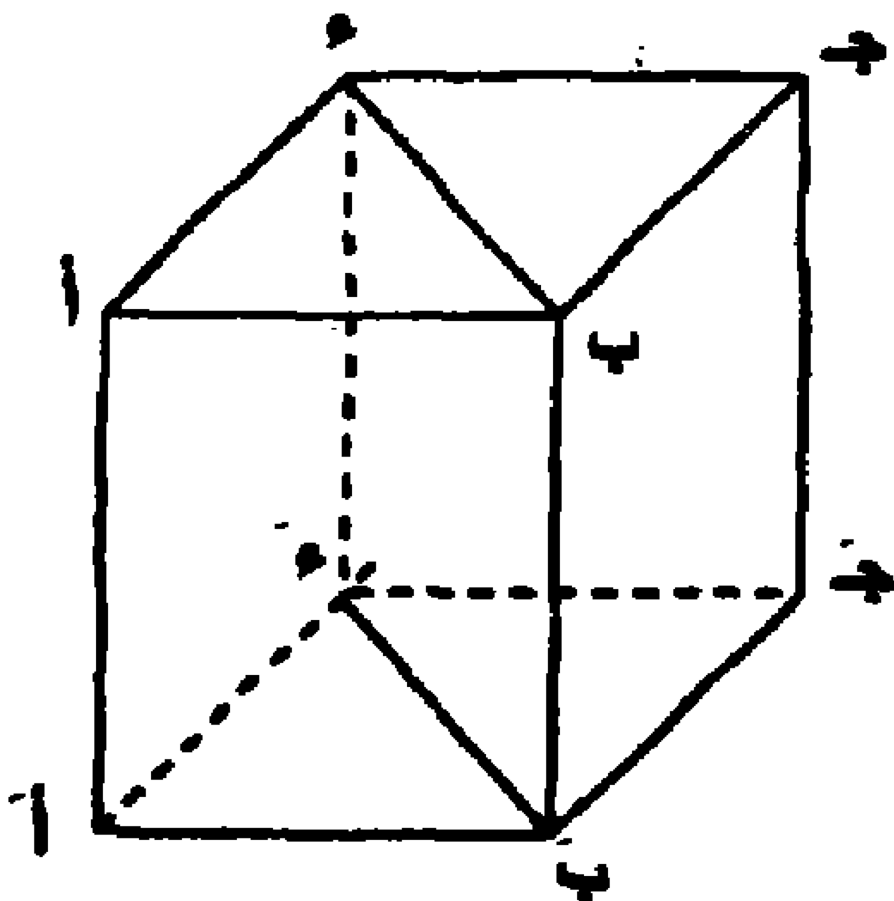
∴ ن ل ⊥ ن ب

مثال: أ ب جـ ء أَ بَ جَـ ءَ مكعباً .

١) بين أن $\overline{ب بَ}$ ⊥ على المستوي أ ب جـ وأستنتج أن $\overline{أ جـ}$ ، $\overline{ب بَ}$ متعامدان .

٢) أثبت أن $\overline{أ جـ}$ ⊥ المستوي ء ب بَ وأستنتج أن $\overline{أ جـ}$ ، $\overline{ء بَ}$ متعامدان .

الحـــــل



(١) $\overline{ب بَ}$ والمستوي أ ب ج متعامدان لأن :

$\overline{ب جـ}$ ⊥ ب بَ ، $\overline{ب أ}$ ⊥ ب بَ

∴ ب بَ ⊥ المستوي أ ب جـ

∵ ب بَ ⊥ المستوي أ ب جـ

، $\overline{أ جـ}$ يقع في المستوي أ ب جـ

∴ المستقيمان $\overline{ب بَ}$ ، أ جـ متعامدان

(٢) أ جـ والمستوي ء ب بَ متعامدان لأن :

أ جـ ⊥ ء ب (قطر المربع أ ب جـ ء) ، أ جـ ⊥ ب بَ

∴ أ جـ ⊥ المستوي ء ب بَ

∴ أ جـ ⊥ المستوي ء ب بَ ، ء بَ يقع في المستوى ء ب بَ

∴ أ جـ ، ء بَ متعامدان .

مثال: أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ ، ء نقطة خارج مستو المثلث بحيث كان ء أ = ء ب = ء جـ ، نصف ب جـ في هـ . أثبت أن : ء هـ ⊥ المستوى أ ب جـ .

الحـــــل

الفكرة : محاولة إثبات أن ء هـ ⊥ مستقيمين في المستوي أ ب جـ وبذلك يكون ء هـ ⊥ المستوي أ ب جـ

∵ ء جـ = ء ب ، هـ منتصف ب جـ

∴ ء هـ ⊥ ب جـ ----- (١)

نصل أ هـ فيكون أ هـ = ب هـ

∴ ء ب^{٢} = ء هـ^{٢} + هـ ب^{٢} = ء هـ^{٢} + أ هـ^{٢}

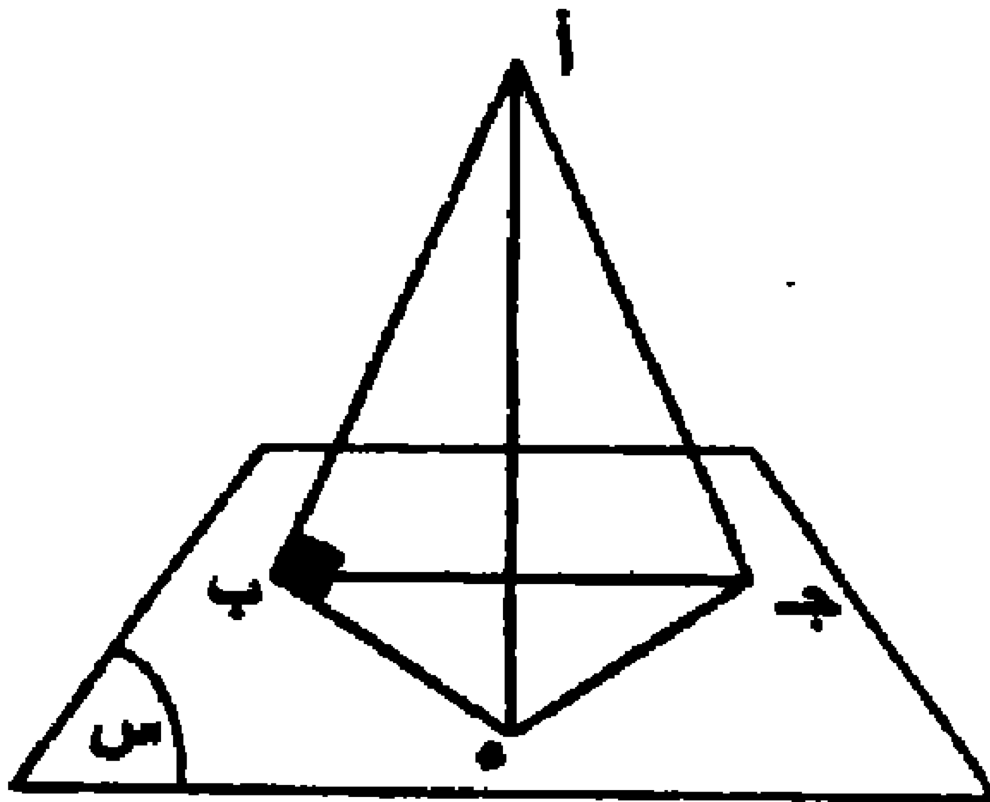
لكن ء ب = ء أ ∴ ء أ^{٢} = ء هـ^{٢} + أ هـ^{٢}

∴ < ء هـ أ قائمة ∴ ء هـ ⊥ أ هـ ---- (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن ء هـ عمودي علي كل من ب جـ ، أ هـ الواقعين في المستوي أ ب جـ

∴ ء هـ ⊥ المستوي أ ب جـ

مثال : أ ب عمودي علي المستوي س ويلاقيه في ب، ب جـ ، جـ ء مستقيمان متعامدان في المستوي س . أثبت أن: أ جـ ⊥ جـ ء .



الحـــــل

∵ أ ب ⊥ المستوي س فهو عمودي علي أي مستقيم فيه

∴ أ ب ⊥ جـ ب ومن الرسم

أ جـ^{٢} = أ ب^{٢} + جـ ب^{٢} ----- (١)

∵ ب جـ ⊥ جـ ء

∴ ب ء^{٢} = جـ ء^{٢} + جـ ب^{٢} ---- (٢)

∵ أ ب ⊥ ب ء ∴ أ ء^{٢} = أ ب^{٢} + ب ء^{٢} ---- (٣)

بالتعويض من (٢) في (٣) عن قيمة ب ء^٢

∴ أ ء^٢ = أ ب^٢ + ب ء^٢ = أ ب^٢ + جـ ء^٢ + جـ ب^٢

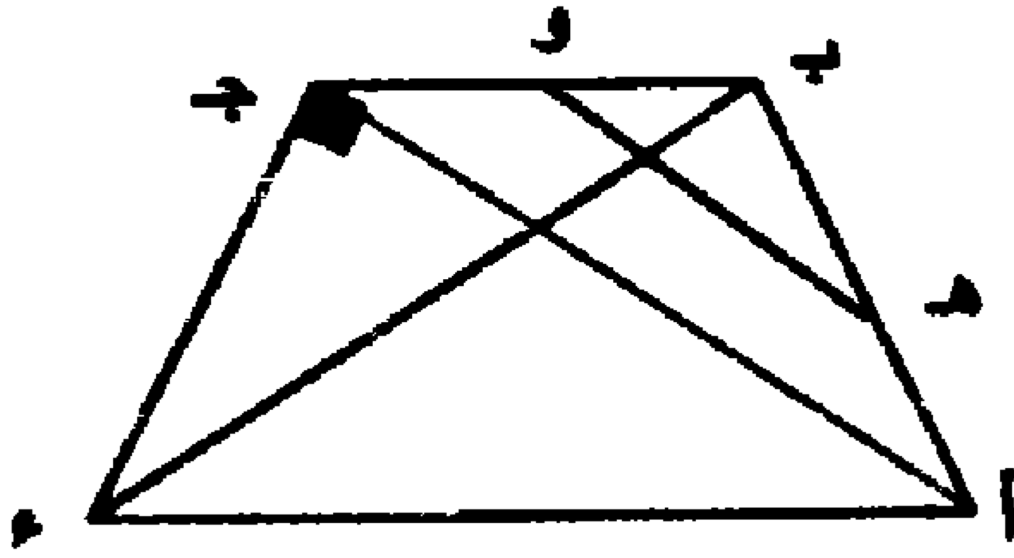
= أ ب^٢ + جـ ء^٢ + جـ ب^٢

= أ جـ^٢ + جـ ب^٢ من المعادلة رقم (٣)

∴ < أ جـ ء قائمة ∴ أ جـ ⊥ جـ ء

مثال: أ ب جـ ء شكل رباعي ليست أضلاعه كلها في مستوى واحد ، أ جـ عمودي على كل من جـ ، ء جـ . نصف أ ب في هـ ، ب جـ في و. أثبت أن هـ و ⊥ المستوي ب جـ ء .

الحـــــل



∵ أ جـ ⊥ ب جـ ، ء جـ

∵ هـ و // أ جـ

∴ هـ و ⊥ ب جـ ، ء جـ

وحيث إن ب جـ ، ء جـ يعنيان مستوي

∴ هـ و ⊥ المستوى ب جـ ء

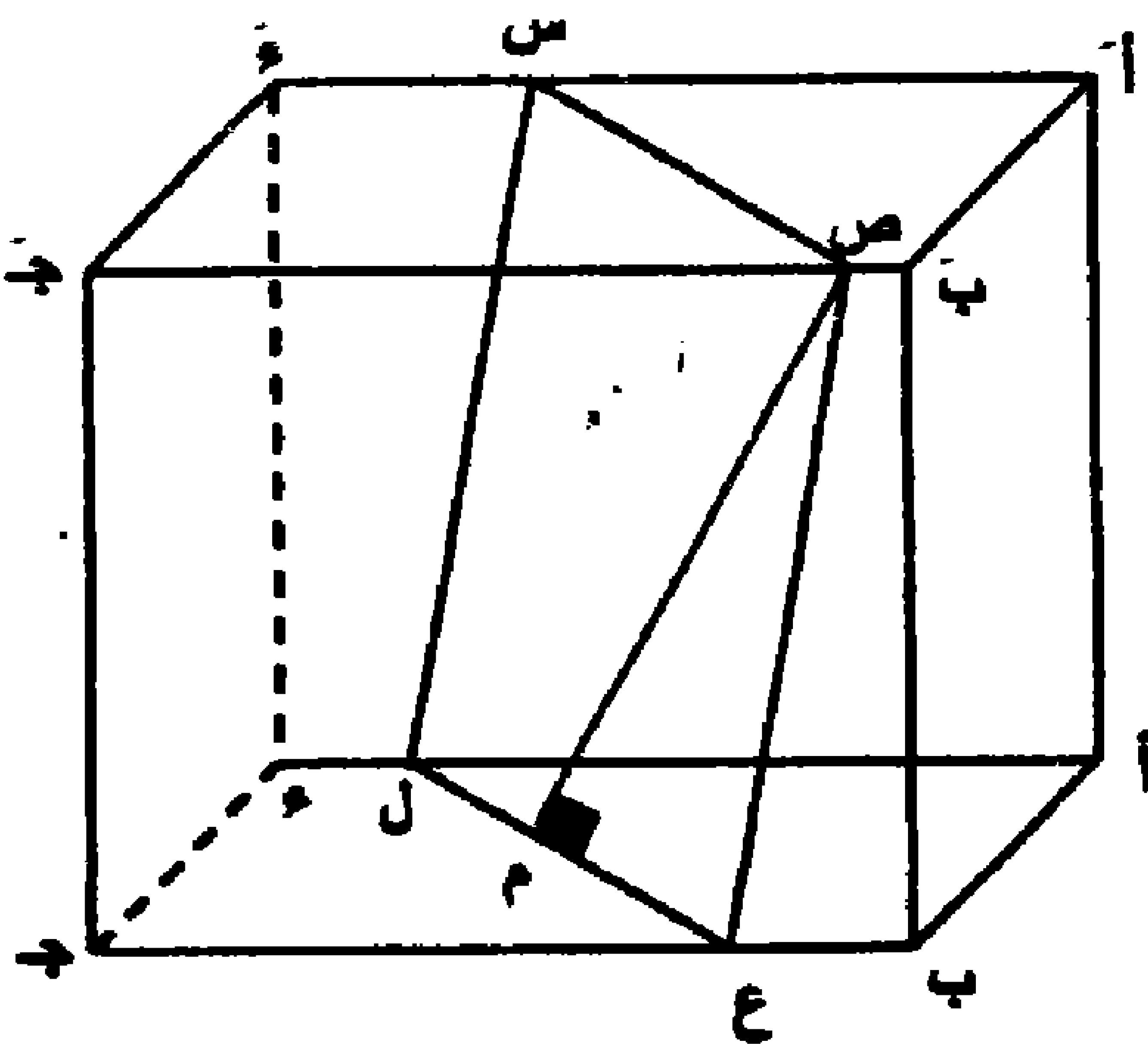
مثال: أ ب جـ ء أَ بَ جَـ ءَ متوازي سطوح – المستوى س العمودي على ب جـ قطع الأحرف أَ ءَ ، بَ جَـ ، ب جـ ، أ ء في س ، ص ، ع، ل على الترتيب أثبت أن: المقطع س ص ع ل سطح متوازي أضلاع وإذا رسم $\overline{\text{ص م}}$ ⊥ ل ع. أثبت أن: $\overline{\text{ص م}}$ ⊥ المستوي أ ب جـ ء .

الحـــــل

∵ المستوي أ ب جـ ء // المستوي أَ بَ جَـ ءَ

، المستوي س قاطعا لهما في $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ع ل}}$

∴ سَ صَ // ع ل ----- (١)



بالمثل المستوى ب بَ جَـ جـ // المستوى أ ء ءَ أَ

والمستوي س قاطعا لهما في $\overleftrightarrow{\text{س ل}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{صع}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{س ل}}$ // $\overleftrightarrow{\text{صع}}$ ----- (٢)

من (١) ، (٢) ∴ الشكل سصع ل متوازي أضلاع

، ∵ $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ⊥ المستوي س

∴ $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{ص م}}$ ----- (٣)

∵ $\overleftrightarrow{\text{ص م}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{ل ع}}$ فرضاً ----- (٤)

من (٣) ، (٤)

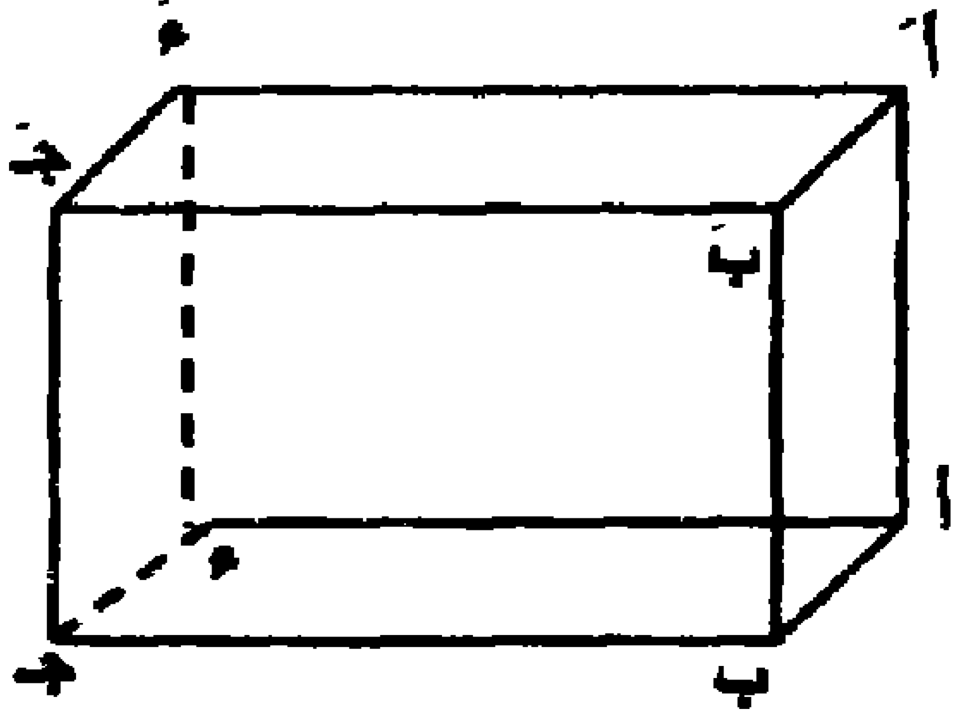
∴ $\overleftrightarrow{\text{ص م}}$ ⊥ كل من $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ل ع}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{ص م}}$ ⊥ المستوي أ ب جـ ء

تمرين (٥)

١- في الشكل المقابل :

أ ب جـ ء أَ بَ جَـ ءَ متوازي مستطيلات



(أ) ما وضع $\overline{\text{أ أَ}}$ بالنسبة للمستوي أ ب جـ ء ؟ ولماذا؟

(ب) ما وضع $\overline{\text{ء أ}}$ بالنسبة للمستوي أ ب بَ أَ ؟ لماذا؟

(ج) ما وضح $\overline{\text{ب أ}}$ بالنسبة للمستوي أ ء ءَ أَ ؟ ولماذا؟

(ء) أثبت ان $\overline{\text{أ أَ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب ء}}$

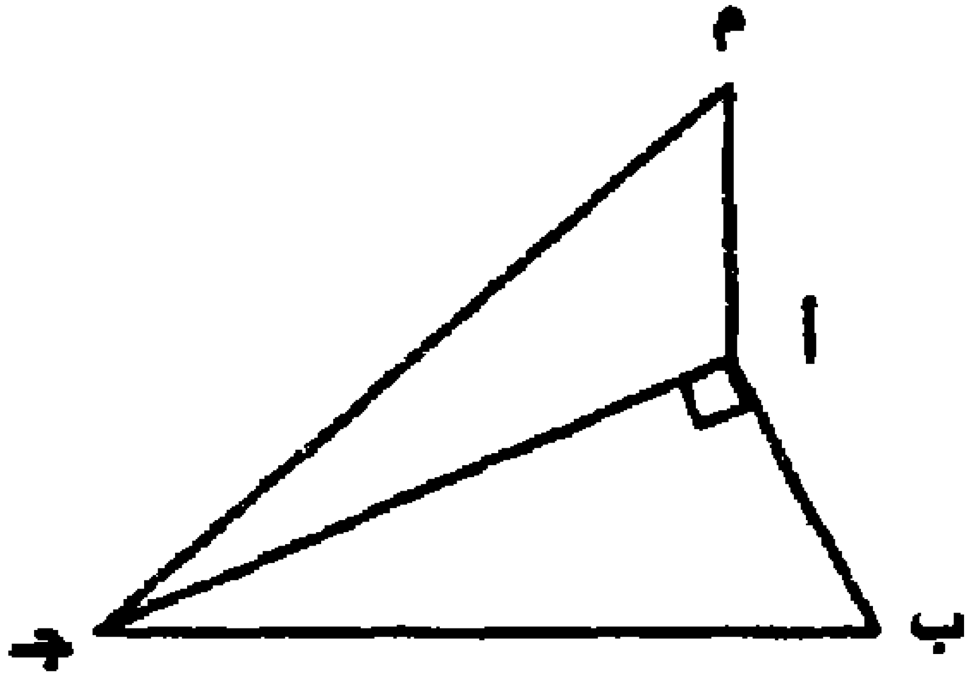
٢- في الشكل المقابل:

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ

، م نقطة لا تنتمي للمثلث أ ب جـ

، م أ = أ ب ، م جـ = ب جـ

- اثبت أن: $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ ⊥ المستوي م أ ب .



٣- في الشكل المقابل:

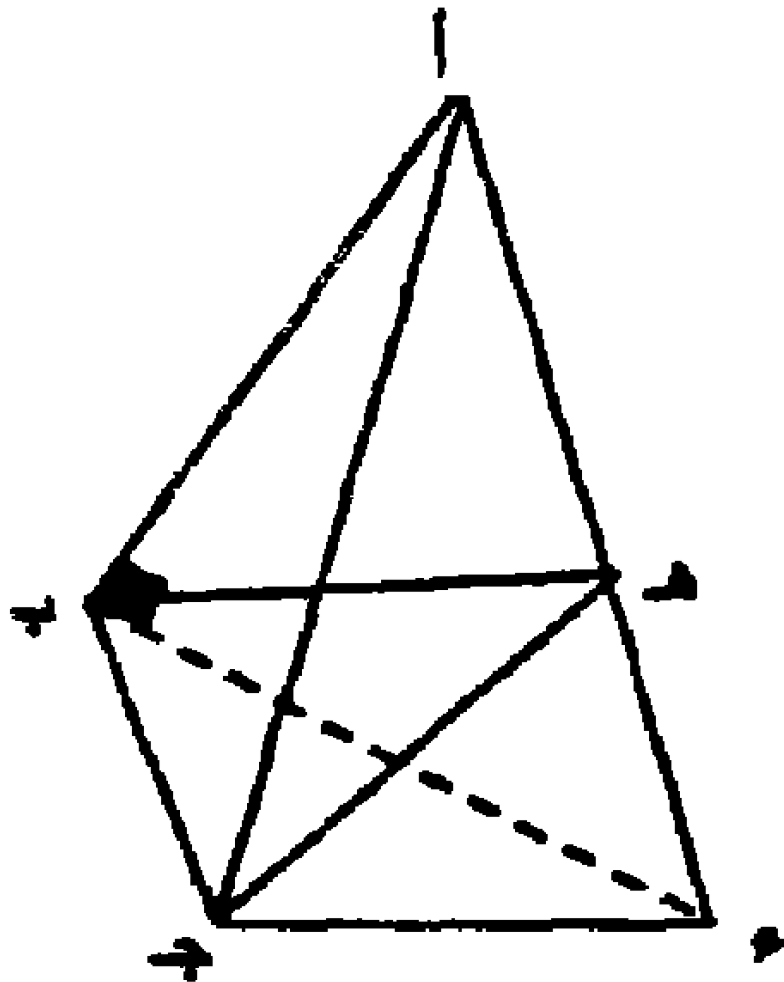
إذا كان $\overline{\text{أ ب}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{ء ب}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ ، أ ب = ب ء

فاثبت أن:

(أولاً) Δ أ ب جـ ≡ Δ ء ب جـ

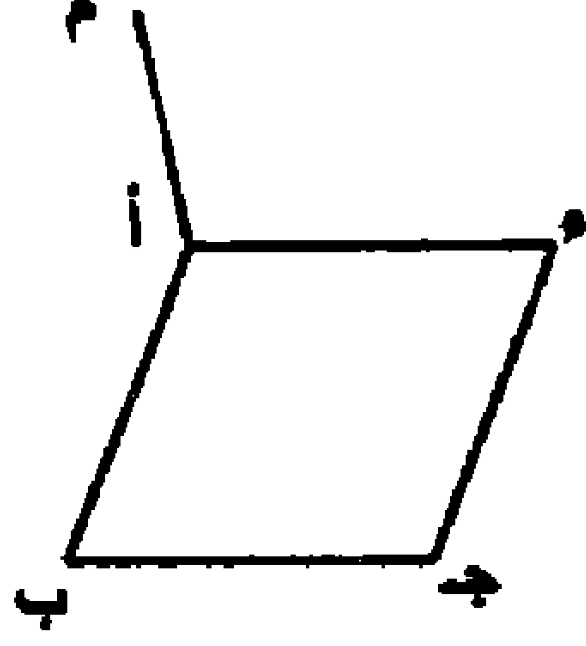
(ثانيا) $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ⊥ المستوي أ ب ء .

(ثالثا) $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ ⊥ المستوي هـ ب جـ حيث هـ منتصف $\overline{\text{أ ء}}$.



٤- النقط أ ، ب ، جـ ، ء لا تقع في مستو واحد وكان أ ب = أ جـ = أ ء ، أ ب ⊥ المستوي أ جـ ء ، أ ء ⊥ المستوي ب أ جـ . ارسم شكلا يوضح ذلك : أثبت أن Δ ب جـ ء متساوى الأضلاع.

٥- في الشكل المقابل : أ ب جـ ء مربع ، م نقطة لا تنتمى إلي مستوى المربع بحيث م أ ⊥ أ ب



أولاً: هل م أ ⊥ المستوى أ ب جـ ء ؟ ولماذا؟

ثانياً : أثبت أن ب أ ⊥ المستوى م أ ء .

ثالثاً : هل يوجد مستقيم أخر ⊥ المستوى م أ ء ؟ لماذا ؟

٦- أ ب جـ ء أَ بَ جَـ ءَ مكعب طول حرفه = ل

أثبت أن : (**أولاً**) Δ ءَ أ جـ متساوى الأضلاع واحسب مساحة سطحه بدلالة ل .

(**ثانيا**) أ ب ⊥ ب جـَ (**ثالثا**) أ جـ ⊥ ءَ ب

(**رابعا**) أثبت أن أقطار المكعب متساوية في الطول وطول كلا منها ل$\sqrt{٣}$ وتستخدم هذه الخاصية في حل التمارين .

٧- أ ب جـ ء أَ بَ جَـ ءَ متوازي مستطيلات أبعاده الثلاثة ب جـ = س ، ب أ = ص ، ب بَ = ع

أولاً: أثبت أن : ب جـ ⊥ ب أَ

ثانياً : أثبت أن : اقطار متوازي المستطيلات متساوية في الطول ومربع طول كلا منها = س^{٢}+ ص^{٢}+ع^{٢}

ثالثاً : إذا كان س = ٨ سم ، ص = ٦سم ، ع = ٢٤ سم ــ فاحسب طول قطر متوازي المستطيلات .

تمارين غير محلولة

- أذكر فقط أي من الجمل الآتية صحيح وأي منهما خاطئ :-

١. أى نقطتين يمر بهما مستو واحد فقط .

٢. أى نقطة من الفراغ يمر بها عدد لا نهائي من المستويات .

٣. أى ثلاثة نقط ليست على استقامة واحدة يمر بها مستو واحد على الأقل .

٤. كل مستقيمين متقاطعين يحتويهما مستو واحد فقط .

٥. كل مستويين متقاطعين يشتركان فى نقطة واحدة .

٦. أى مستقيم محتوى فى كل مستوى يجزئ هذا المستوى إلى ثلاث مجموعات منفصلة من النقط.

٧. أى مستوى يجزئ الفراغ إلى مجموعتين منفصلتين من النقط.

٨. رؤوس المثلث تعين مستوياً.

٩. رؤوس متوازى الأضلاع لا تعين مستويا.

١٠. المستقيمات الرأسية فى الفراغ كلها متوازية.

١١. المستقيمات الأفقية فى الفراغ كلها متوازية.

١٢. المستويان الموازيان لثالث فى الفراغ متوازيان.

١٣. إذا وازى مستقيم كل من مستويين كان هذا المستويان متوازيين.

١٤. إذا توازى مستويان فكل مستقيم فى أحدهما يوازى أى مستقيم فى الآخر.

١٥. إذا كان $\overleftrightarrow{أ ب}$ ⊂ س ، المستوى ⊂ س يوازى المستوى ص فإن أ ب // المستوى ص.

١٦. قاعدة المنشور القائم يجب أن تكون سطح مضلع منتظم.

١٧. المنشور القائم أحرفه عمودية على كل من قاعدتيه.

١٨. متوازى السطوح المائل هو منشور مائل جميع أوجهه سطوح متوازيات أضلاع.

١٩. متوازى المستطيلات هو منشور قائم قاعدته سطح مستطيل.

٢٠. المكعب له ثمانية أوجه وستة رؤوس وإثنا عشر حرف.

٢١. أقطار متوازى السطوح متساوية فى الطول.

٢٢. أقطار متوازى المستطيلات متساوية فى الطول.

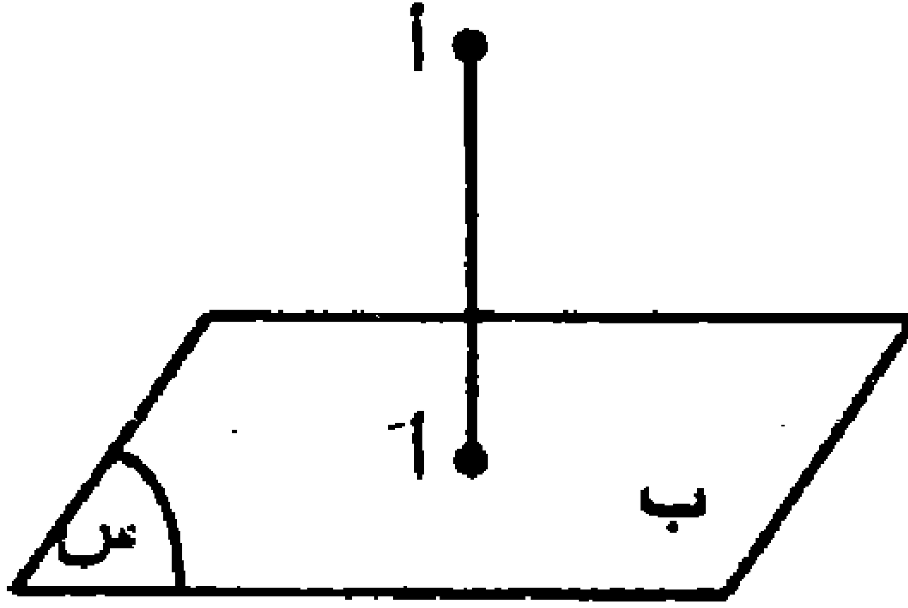
٢٣. لا يمكن رسم أربع مستويات كل ثلاثة منها متقاطعة فى نقطة واحدة.

٢٤. قاعدة الهرم الرباعى القائم يمكن أن تكون سطح معين.

الباب الثانـــي

الإسقــاط العمــودي

مسقط نقطة :



إذا كان أ نقطة واقعة خارج المستوي س وكانت النقطة أَ هي موقع العمود الساقط من النقطة أ علي المستوي س فإن النقطة أَ هي المسقط العمودي للنقطة أ علي المستوى س .

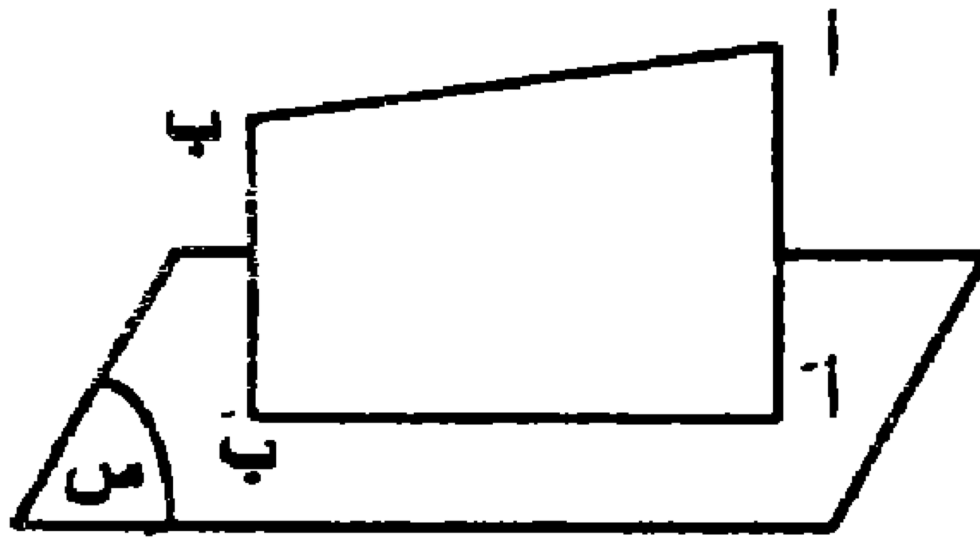
∴ أَ هي مسقط أ علي المستوي س .

إذا كانت ب نقطة ∈ المستوي س فإن مسقطها علي المستوي س هو نفس النقطة ب .

تعريف :

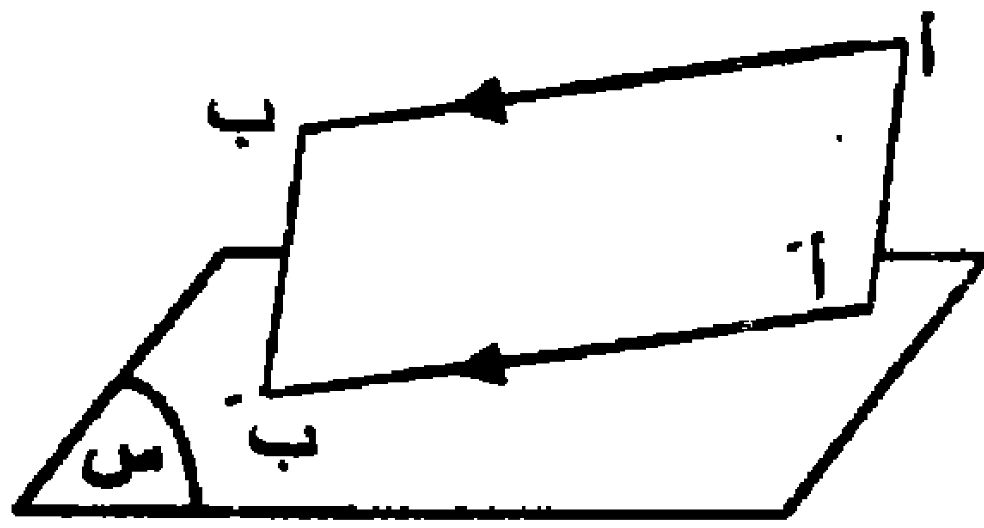
المسقط العمودي لنقطة معلومة علي مستوي معلوم هو موقع القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من النقطة علي ذلك المستوى.

مسقط قطعة مستقيمة علي مستوي معلوم :



- إذا كانت أ ب قطعة مستقيمة ، س مستوى معلوم ، أ ب لا تقع في المستوى س . وكانت أَ مسقط أ علي المستوى س ، بَ مسقط ب علي المستوى س فإن $\overline{\text{أَ بَ}}$ تسمي مسقط أ ب علي المستوى س.

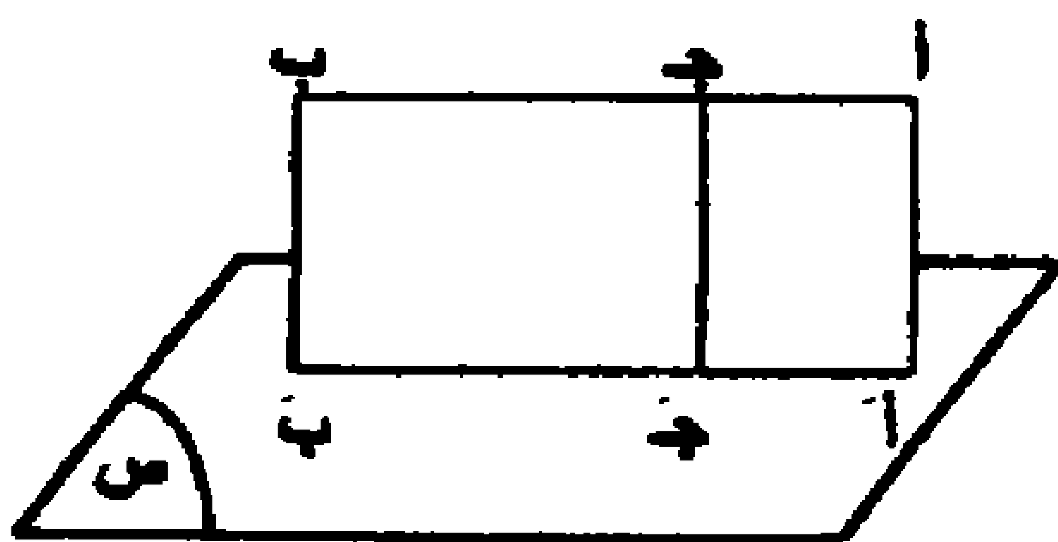
مسقط قطعة مستقيمة علي مستوي في أوضاع مختلفة :-



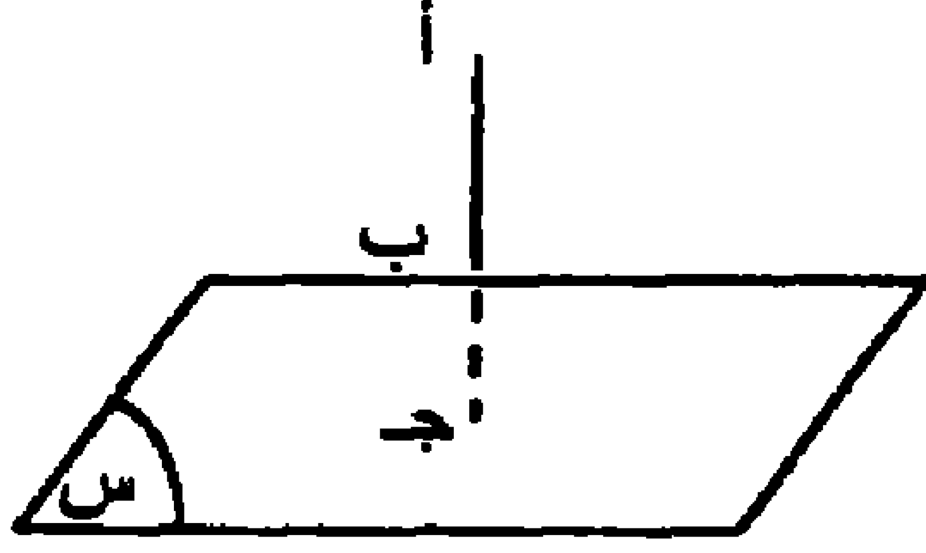
(١) إذا كانت $\overline{\text{أ ب}}$ // المستوي س

∴ مسقطها $\overline{\text{أَ بَ}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$

، أَ بَ = أ ب

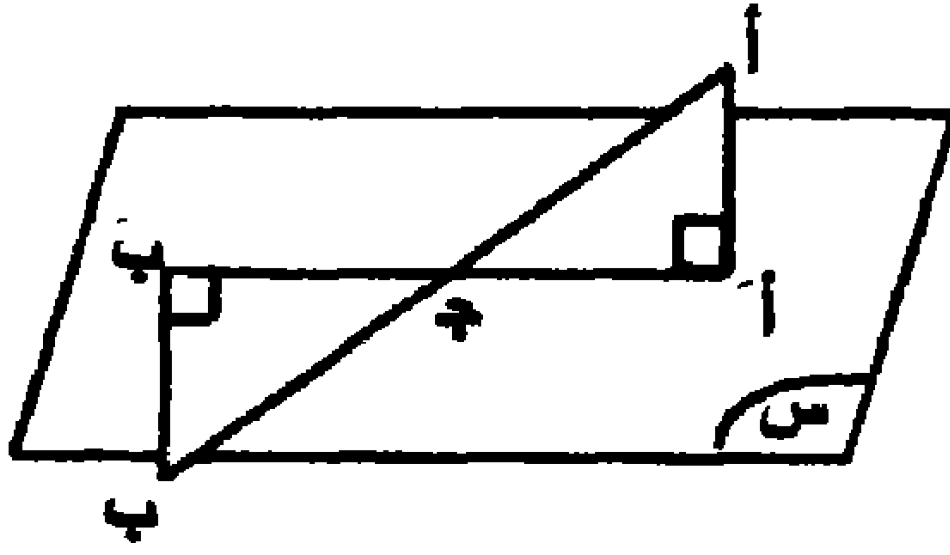


(٢) إذا كانت جـ ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أَ بَ}}$ هو مسقط $\overline{\text{أ ب}}$ علي المستوي س فإن : جـَ مسقط جـ ∈ $\overline{\text{أَ بَ}}$



(٣) إذا كانت $\overline{\text{أ ب}}$ ⊥ المستوي س فإن :

مسقط $\overline{\text{أ ب}}$ علي المستوي هو النقطة أَ



(٤) إذا كانت $\overline{\text{أ ب}}$ ∩ س = { جـ }

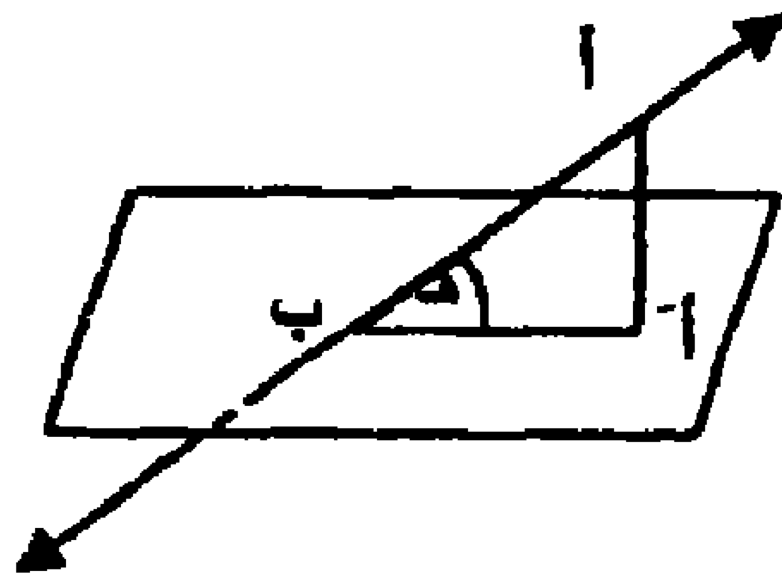
فإن $\overline{\text{أَ بَ}}$ مسقط $\overline{\text{أ ب}}$ يمر بالنقطة جـ

حيث $\overline{\text{أَ جـ}}$ مسقط $\overline{\text{أ جـ}}$ علي س

جـ بَ مسقط جـ ب علي س

∴ $\overline{\text{أَ جـ بَ}}$ مسقط $\overline{\text{أ جـ ب}}$ علي س

الزاوية بين مستقيم ومستوى :-



هي الزاوية المحصورة بين المستقيمين ومسقطه علي ذلك المستوي .

ويطلق عليها زاوية ميل المستقيم علي المستوي .

من الرسم : أَ ب مسقط أ ب علي س

- ∠ أ ب أَ هي الزاوية المحصورة بين أ ب ، س حيث ق (∠ أ ب أَ) = هـ تسمي زاوية ميل المستقيم علي المستوي س

، جتا هـ = $\frac{\text{أَ ب}}{\text{أ ب}}$ ← أَ بَ = أ ب جتا هـ

∴ طول المسقط = طول المستقيم × جتا زاوية ميلها علي المستوى .

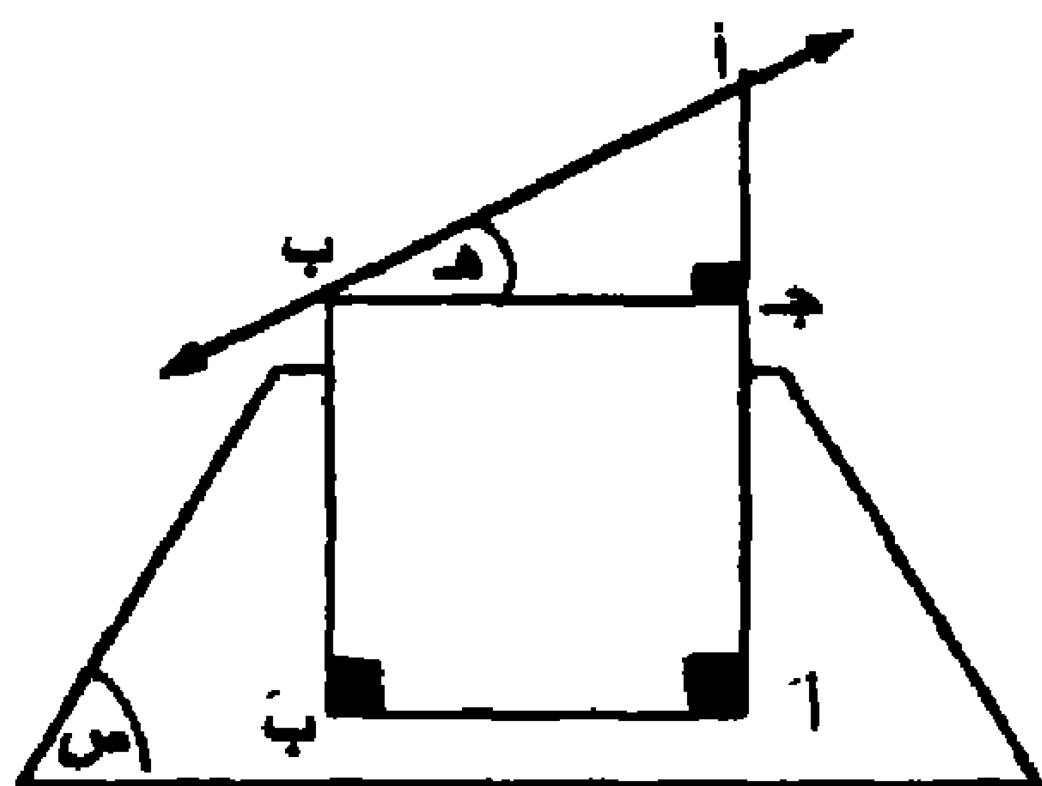
<u>ملاحظة :</u>
يوجد تناسب عكس بين المستيم ومسقطه علي المستوي حيث تتزايد أو تتناقص هـ فتتناقص أو تتزايد (علي الترتيب) طول القطعة التي هى مسقط علي س حيث : هـ ∈ [٠ ، ٩٠]

فعندما هـ = صفر ← أَ ب = أ ب (المستقيم يوازي المستوي)

وعندما هـ = ٩٠ ← أَ ب = صفر (المستقيم عمودي علي المستوي)

وعندما ٠ < هـ < ٩٠ ← أَ ب < أ ب

∴ طول مسقط القطعة المستقيمة على مستوى يكون أصغر من أو يساوي طول هذه القطعة المستقيمة .

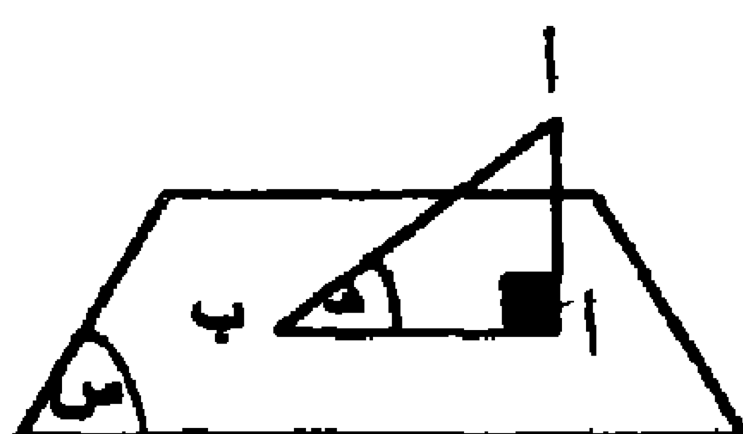


والأشكال الآتية توضح ذلك: -

(١) إذا لم تشترك القطعة المستقيمة أ ب مع المستوي س في أي نقطة فإن مسقط أ ب علي المستوي س هو أَ بَ

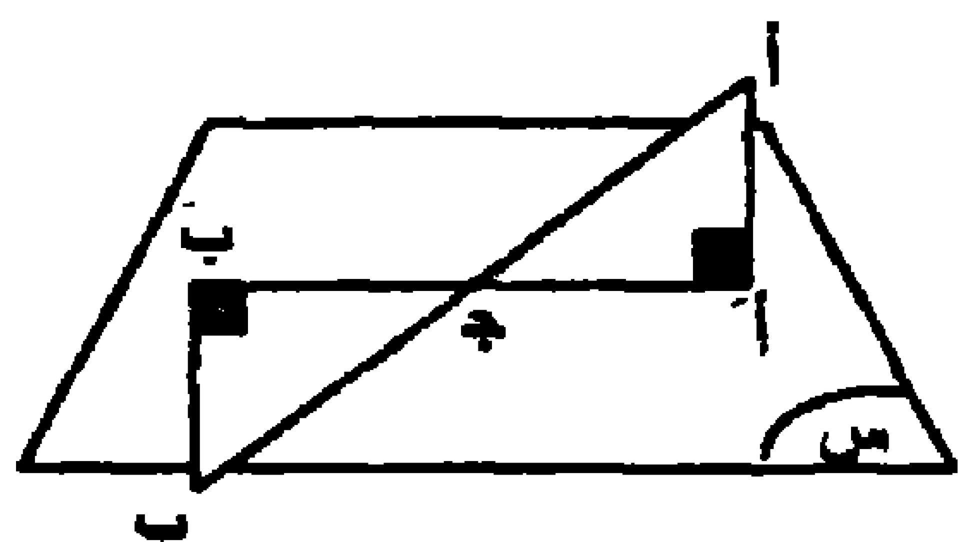
، نرسم ب جـ // بَ أَ ويقطع أ أَ في جـ

∴ ب جـ = بَ أَ ، ∠ أ ب جـ هي زاوية ميل أ ب علي المستوي س ، ب جـ < ب أ



(٢) إذا اشتركت القطعة المستقيمة أ ب مع المستوي س في نقطة ب .

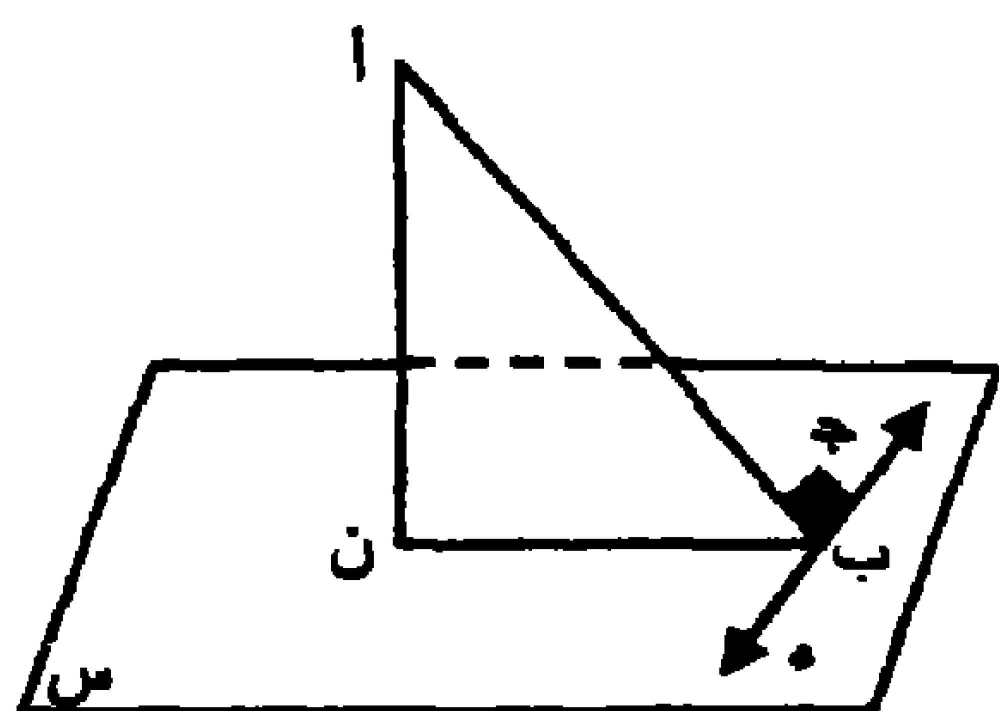
∴ ∠ أ ب أَ هي زاوية ميل أ ب علي المستوي س ، أَ ب < أ ب



(٣) إذا قطعت القطعة المستقيمة أ ب المستوي س في نقطة جـ فتكون ∠ أ جـ أَ هي زاوية ميل أ ب علي المستوي س.

نظرية :

▪إذا رسم مستقيم مائل علي مستو وكان عموديا علي مستقيم في المستوي فإن مسقطه علي المستوي يكون عموديا علي مستقيم المستوي .



معطيات : $\overleftrightarrow{أ ب}$ مائل علي س ، $\overleftrightarrow{أ ب} \perp \overleftrightarrow{جـ ء}$: $\overleftrightarrow{جـ ء} \subset$ س

، $\overleftrightarrow{أ ن} \perp$ س .

المطلوب : $\overleftrightarrow{ن ب}$ مسقط $\overleftrightarrow{أ ب}$ علي س يكون عموديا علي $\overleftrightarrow{جـ ء}$

البرهان: ∵ $\overleftrightarrow{أ ن} \perp$ س ، $\overleftrightarrow{أ ن} \perp \overleftrightarrow{جـ ء}$ أي $\overleftrightarrow{جـ ء} \perp \overleftrightarrow{أ ن}$

∵ $\overleftrightarrow{جـ ء} \perp \overleftrightarrow{أ ب} \Leftarrow \overleftrightarrow{جـ ء} \perp$ المستوي أ ب ن

∴ $\overleftrightarrow{جـ ء} \perp \overleftrightarrow{ب ن}$ أي $\overleftrightarrow{ب ن}$ مسقط $\overleftrightarrow{أ ب} \perp \overleftrightarrow{جـ ء}$

عكس النظرية :

▪إذا رسم مستقيم مائل علي مستو وكان مسقطه علي المستوي عمودياً علي مستقيم فيه كان هذا المستقيم المائل عمودياً علي ذلك المستقيم .

معطيات : $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مائل علي المستوى س ، $\overleftrightarrow{\text{أ ن}}$ ⊥ س

$\overleftrightarrow{\text{ن ب}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ الواقع في س

المطلوب : $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$

البرهان : $\overleftrightarrow{\text{أ ن}}$ ⊥ س ⇐ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$

⇐ $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ولكن $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{ب ن}}$

⇐ $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ ⊥ المستوي أ ب ن

⇐ $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ومنه $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$

أ
جـ
ن
ب
ء
س

مثال: $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ مستقيمان متقاطعان في ب ، ق (< جـ ب ء) = ى حيث جا ى = $\frac{٤}{٥}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ = ٢٠ سم . رسم من جـ العمود $\overleftrightarrow{\text{جـ هـ}}$ علي المستوي ب جـ ء حيث جـ هـ = ١٢ سم ثم رسم من هـ العمود $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ علي $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ قابله في و ــ أوجد طول $\overline{\text{هـ و}}$.

المعطيات : جا ى = $\frac{٤}{٥}$ ، $\overline{\text{جـ هـ}}$ ⊥ المستوى ب جـ ء

المطلوب : إيجاد طول $\overline{\text{جـ و}}$

العمل: نرسم $\overline{\text{جـ و}}$

البرهان:

$\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ مائل علي المستوي ب جـ ء وعمودي علي $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$

∴ مسقطه $\overleftrightarrow{\text{جـ و}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ أي أن ق(< ب و جـ) = ٩٠ °

هـ
١٢سم
ء
جـ
و
٢٠سم
ى
ب

في Δ ب جـ و القائم الزاوية في و :

∵ $\frac{\text{جـ و}}{\text{ب جـ}}$ = جا ى ∴ $\frac{\text{جـ و}}{٢٠} = \frac{٤}{٥}$ ∴ جـ و = ١٦ سم

∵ $\overline{\text{جـ هـ}}$ ⊥ المستوى ب جـ ء ∴ $\overline{\text{هـ جـ}}$ ⊥ $\overline{\text{جـ و}}$

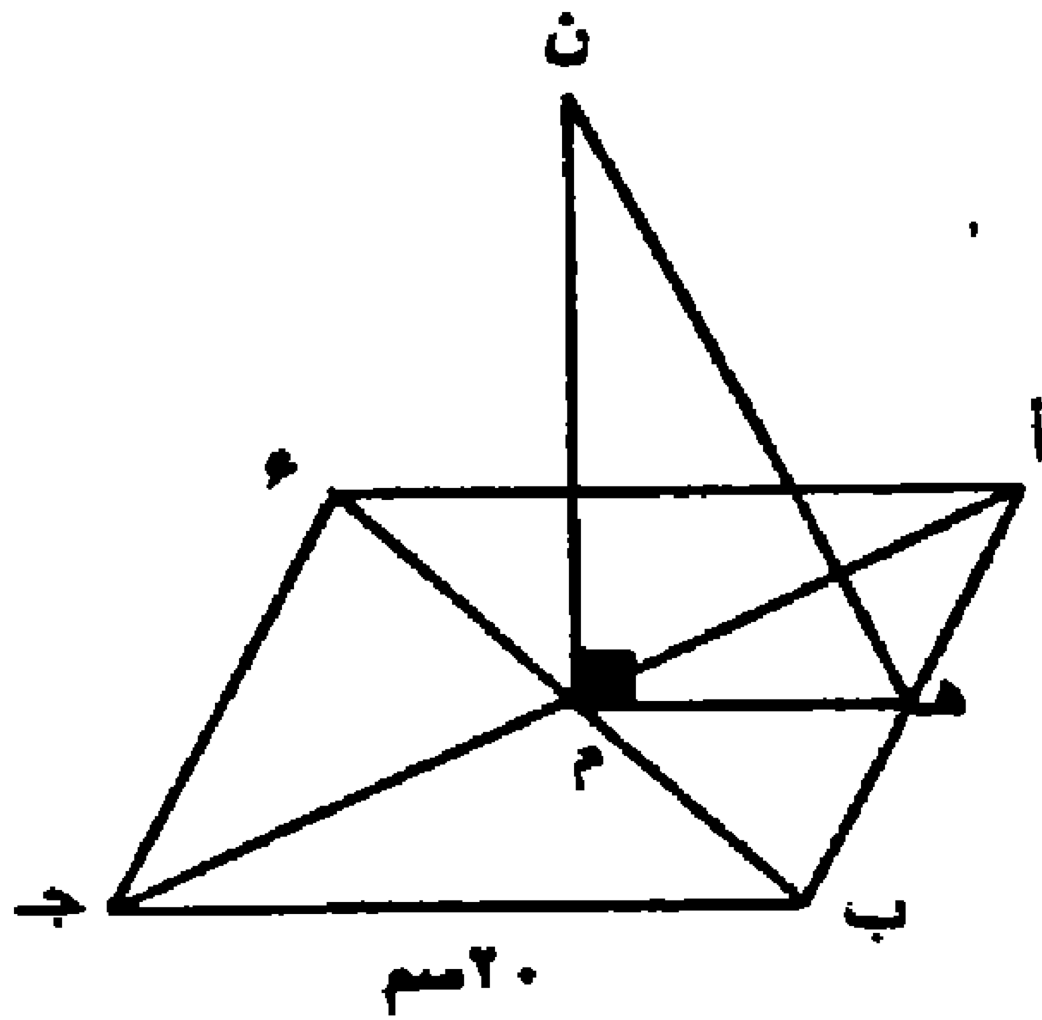
∴ Δ هـ جـ و قائم الزاوية في جـ ∴ (هـ و)^{٢} = (هـ جـ)^{٢} + (جـ و)^{٢}

∴ (هـ و)^{٢} = (١٢)^{٢} +(١٦)^{٢} = ٤٠٠ ∴ هـ و = $\sqrt{٤٠٠}$ = ٢٠ سم

مثال : أ ب جـ ء مربع مركزه م وطول ضلعه ٢٠ سم ، هـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، رسم $\overline{\text{م ن}}$ ⊥ مستوي

المربع بحيث كان م ن = ١٠ ٧ سم – اثبت أن ن هـ ⊥ أ ب ، و طول أ ن .

العمل: نرسم م هـ



البرهان: ∵ م مركز المربع ، هـ منتصف أ ب

∴ م هـ ⊥ أ ب

∵ ن هـ مائلة علي المستوي أ ب جـ ء مسقطها م هـ ⊥ أ ب

∴ ن هـ ⊥ أ ب (عكس نظرية ٤)

∵ (أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢} ∴ أ جـ = ٢٠ √٢ سم

∴ أ م = $\frac{١}{٢}$ أ جـ = ١٠ √٢ سم

∵ ن م ⊥ أ م ∴ (ن أ)^{٢} = (م ن)^{٢} + (أ م)^{٢}

∴ ن أ = ٣٠ سم

مثال: أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ ، أ ب = ٣ سم ، أ جـ = ٤سم - رسم أ ء ⊥ المستوي أ ب جـ حيث أ ء = ١ سم ثم فرضت هـ ∈ ب جـ حيث ب هـ = ١,٨ سم - اثبت أن ء هـ ⊥ ب جـ واحسب طول ء هـ .

العمل : نرسم أ هـ

البرهان : ∵ ق (ب أ جـ) = ٩٠° ، ∴ ب جـ = ٥ سم

∴ ب هـ × ب جـ = ١,٨ × ٥ = ٩ ، (أ ب)^{٢} = ٩

∴ (أ ب)^{٢} = ب هـ . ب جـ

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب هـ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{أ ب}}$ ، < ب مشتركة

∴ Δ ب أ جـ ≈ Δ ب هـ أ

∴ ق (< ب هـ أ) = ق (ب أ جـ) ∴ أ هـ ⊥ ب جـ

∵ ء هـ مائلة علي المستوي أ ب جـ

∴ مسقطها أ هـ ⊥ ب جـ

∴ ء هـ ⊥ ب جـ ، جـ هـ = ٣,٢ سم ، أ هـ = ٢,٤ سم ، ء هـ = ٢,٦ سم

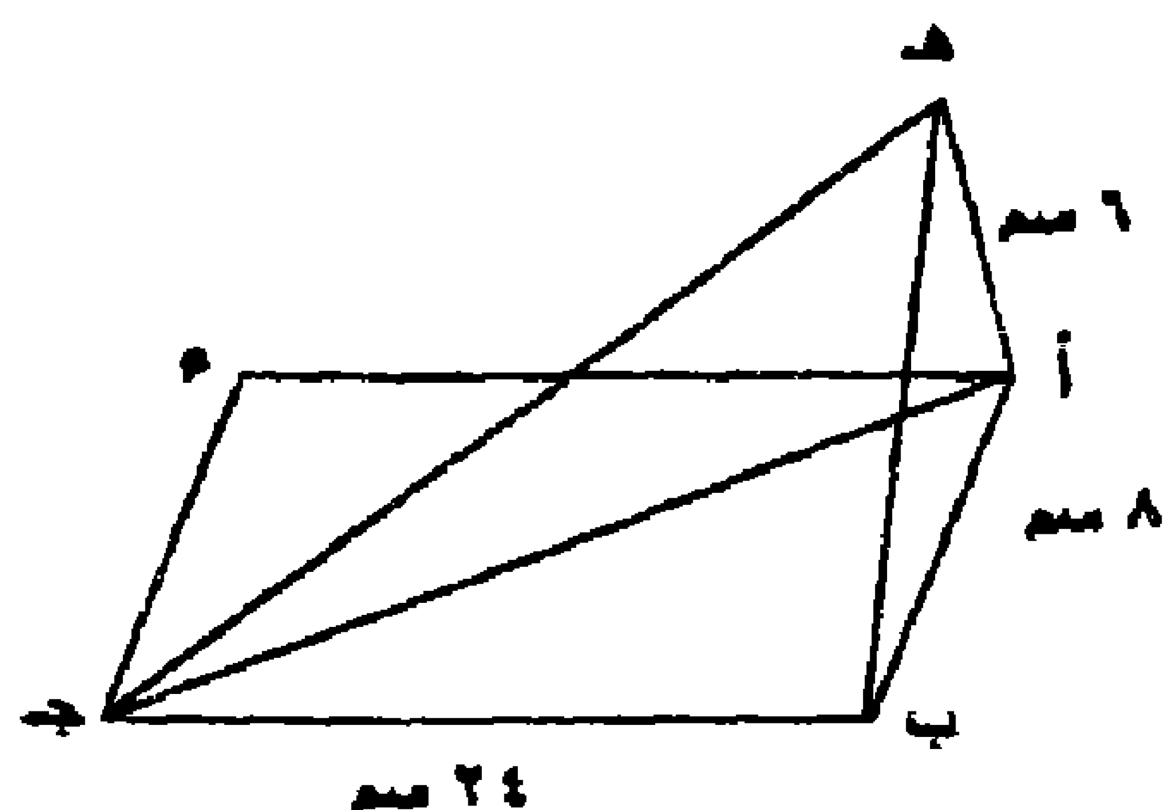
مثال: أ ب جـ ء مستطيل فيه أ ب = ٨سم ، ب جـ = ٢٤ سم رسم من أ العمود أ هـ علي

مستوي المستطيل بحيث أ هـ = ٦ سم. احسب أولاً : مساحة سطح Δ جـ هـ ب **ثانيا:** طول هـ جـ

البرهـــان

$\overleftrightarrow{\text{هـ ب}}$ مائل على المستوي أ ب جـ ء ، مسقطه $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ الواقع في المستوي أ ب جـ ء

∴ المائل $\overleftrightarrow{\text{هـ ب}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ أي أن ق (< هـ ب جـ) = ٩٠ °



∵ Δ أ ب هـ قائم الزاوية في أ

∴ $(\text{ب هـ})^2 = (\text{أ ب})^2 + (\text{أ هـ})^2$ = ٦٤+ ٣٦ = ١٠٠

∴ ب هـ = ١٠ سم

∵ Δ جـ هـ ب قائم الزاوية في ب

∴ مساحة سطح Δ جـ هـ ب = $\frac{١}{٢}$ ب جـ × هـ ب

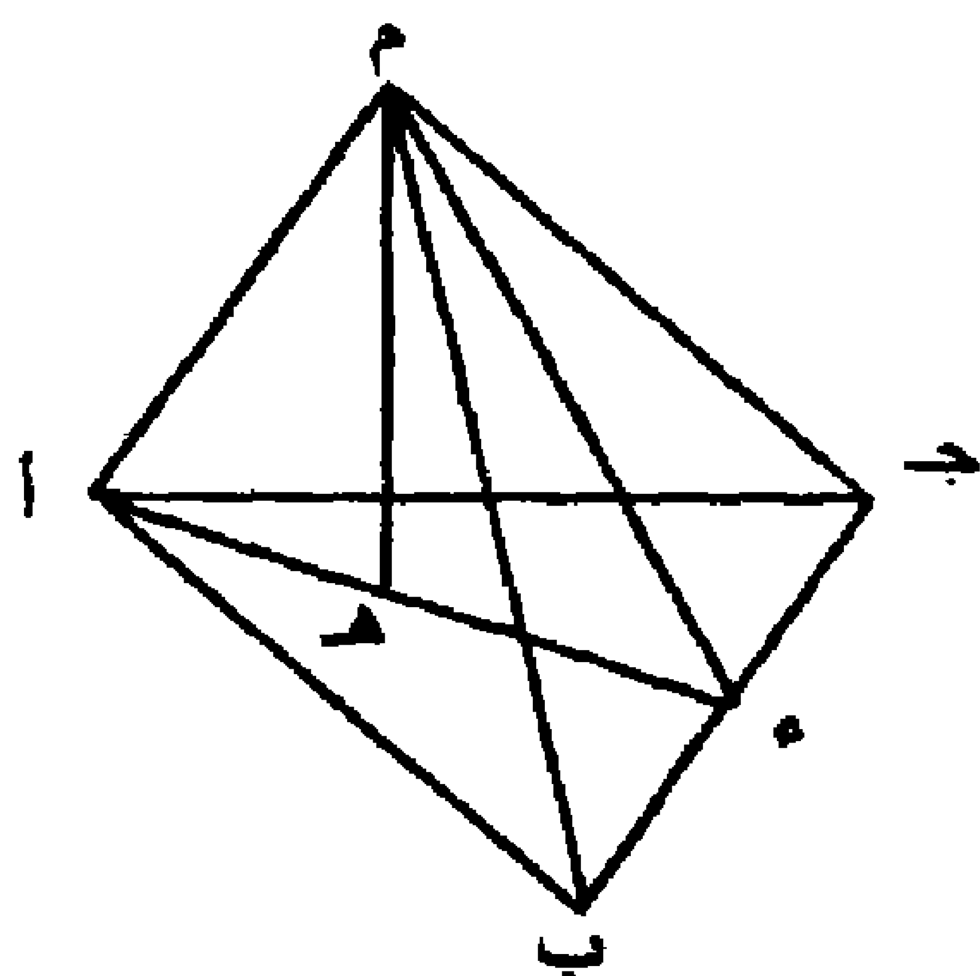
= $\frac{١}{٢}$ × ٢٤ × ١٠ = ١٢٠ سم^2

∵ $(\text{هـ جـ})^2 = (\text{هـ ب})^2 + (\text{ب جـ})^2$ = ١٠٠ + ٥٧٦ = ٦٧٦

∴ هـ جـ = ٢٦ سم

مثال: $\overline{\text{م أ}}$ ، $\overline{\text{م ب}}$ ، $\overline{\text{م جـ}}$ ثلاث قطع مستقيمة غير مستوية ومتعامدة مثنى مثنى رسمت $\overline{\text{م هـ}}$ ⊥ المستوي أ ب جـ تقابله في هـ فإذا قطع $\overleftarrow{\text{أ هـ}}$ الضلع $\overline{\text{ب جـ}}$ في ء. اثبت أن $\overline{\text{م أ}}$ ⊥ المستوي م ب جـ وأن $\overline{\text{م ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ ثم أثبت أن $(\text{م هـ})^2$ = أ هـ . هـ ء

البرهـــان



∵ $\overline{\text{م أ}}$ ⊥ كل من $\overline{\text{م ب}}$ ، $\overline{\text{م جـ}}$

∴ $\overline{\text{م أ}}$ ⊥ المستوي م ب جـ

∵ $\overline{\text{م أ}}$ ⊥ أي مستقيم في المستوى م ب جـ

∴ $\overline{\text{م أ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$

، $\overline{\text{م أ}}$ ⊥ $\overline{\text{م ء}}$ ∴ $\overline{\text{م هـ}}$ ⊥ المستوي أ ب جـ

∴ $\overline{\text{م هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$

∵ $\overline{ب جـ}$ ⊥ كل من م أ ، م هـ ∴ ب جـ ⊥ المستوى م أ هـ

∴ $\overline{ب جـ}$ ⊥ $\overline{أ هـ}$ ∴ $\overline{ب جـ}$ ⊥ $\overline{أ ء}$

∵ $\overline{ب جـ}$ عمودي علي كل من م أ ، أ ء

∴ $\overline{ب جـ}$ ⊥ المستوي م أ ء فيكون عموديا علي مستقيم فيه

∴ $\overline{ب جـ}$ ⊥ $\overline{م ء}$

∴ $\overline{م هـ}$ ⊥ المستوي أ ب جـ

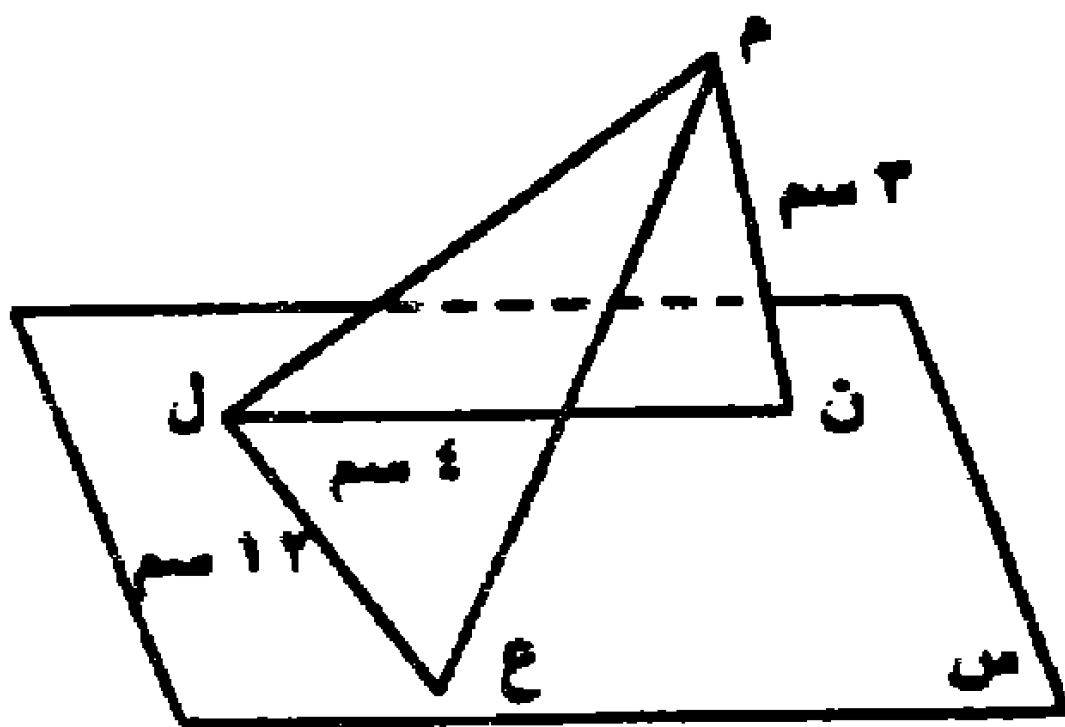
∴ $\overline{م هـ}$ ⊥ $\overline{م ء}$

حيث أن Δ أ م ء فيه ق (< أ م ء) = ٩٠ ° ، $\overline{م هـ}$ ⊥ $\overline{أ ء}$

∴ (م هـ)^2 = أ هـ . هـ ء

مثال : س مستوى ، م نقطة ∉ س ، رسمت $\overline{م ن}$ عمودية علي المستوي س وتقابله في ن ثم رسم المستقيمان $\overleftrightarrow{ن ل}$ ، $\overleftrightarrow{ل ع}$ في المستوي س بحيث ق (< ن ل ع) = ٩٠ ° ثم رسم $\overline{م ل}$ ، $\overline{ل ع}$ فإذا كان م ن = ٣ سم ، ن ل = ٤سم ، ل ع = ١٢ سم فاحسب طول $\overline{م ع}$.

الحـــــــل



∵ م ن ⊥ المستوى س

∴ ن ل هو مسقط م ل علي س مسقطها ن ل ⊥ ل ع

∴ م ل ⊥ ل ع

في Δ م ن ل :

م ل = $\sqrt{٩+١٦}$ = ٥ سم

في Δ م ل ع : (م ع)^2 = (م ل)^2 + (ل ع)^2

∴ م ع = $\sqrt{٢٥+١٤٤}$ = ١٣ سم

مثال: أ ب جـ ء أَ بَ جَ ءَ مكعب رسمت $\overline{أَ ب}$ ، $\overline{أَ جـ}$ ، $\overline{أَ ء}$. اثبت ان:

١) كل من Δ Δ أَ ب جـ ، أَ ء جـ قائم الزاوية وأنهما متطابقان .

٢) $\overline{أَ جـ}$ ⊥ $\overline{ب ء}$

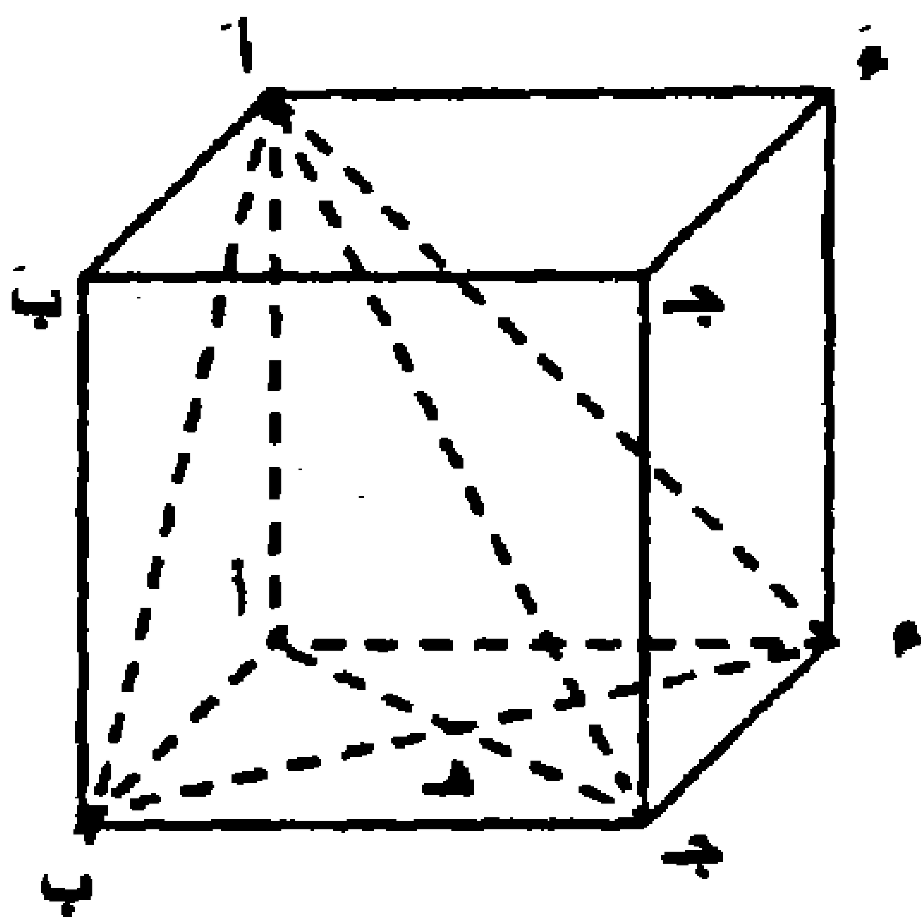
الحـــــــل

∵ أ أَ ⊥ مستوي المربع أ ب جـ ء

∴ أ ب مسقط أَ ب علي المستوي أ ب جـ ء

∵ أ ب ⊥ ب جـ ∴ أَ ب ⊥ ب جـ

∴ Δ أَ ب جـ قائم الزاوية في ب



بالمثل : أ ء مسقط أَ ء علي المستوي أ ب جـ ء

، أ ء ⊥ ء جـ ∴ أَ ء ⊥ ء جـ

∴ أَ ء قائم الزاوية في ء ، Δ أَ ل جـ ≡ Δ أَ ء جـ

، ∵ أَ أ ⊥ المستوي أ ب جـ ء ، أ جـ مسقط أَ جـ عليه

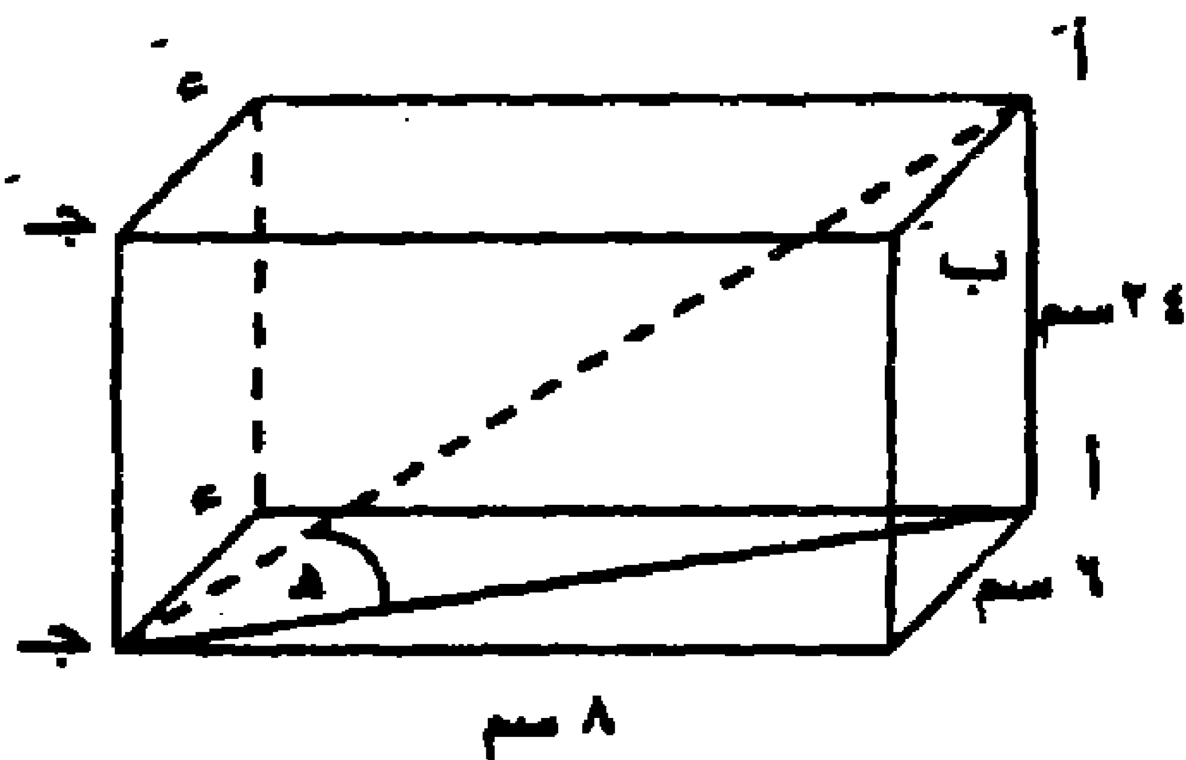
، ∵ أ جـ ⊥ ب ء (قطران في المربع أ ب جـ ء)

∴ أَ جـ ⊥ ب ء

مثال: أ ب جـ ء أَ بَ جَ ءَ متوازي مستطيلات فيه أ ب = ٦سم ، ب جـ = ٨سم ، أ أَ = ٢٤ سم

ـ أحسب طول القطر أَ جـ ثم أوجد قياس زاوية ميل أَ جـ علي المستوي أ ب جـ ء .

الحـــــل



أ هي مسقط أَ علي المستوي أ ب جـ

، ∵ جـ ∈ المستوي أ ب جـ ∴ مسقط جـ هو جـ

∴ أ جـ هو مسقط أَ جـ علي المستوي أ ب جـ

في Δ أ ب جـ ∴ ق (<ب) = ٩٠ °

∴ أ جـ٢ = أ ب ٢ + ب جـ٢ = ٣٦ + ٦٤ = ١٠٠

∴ أ جـ = ١٠ سم ، أَ أ ⊥ أ جـ

∴ (أَ جـ)٢ = (أ أَ)٢ + (أ جـ)٢ = ٥٧٦ + ١٠٠ = ٦٧٦ ب

∴ أَ جـ = ٢٦ سم

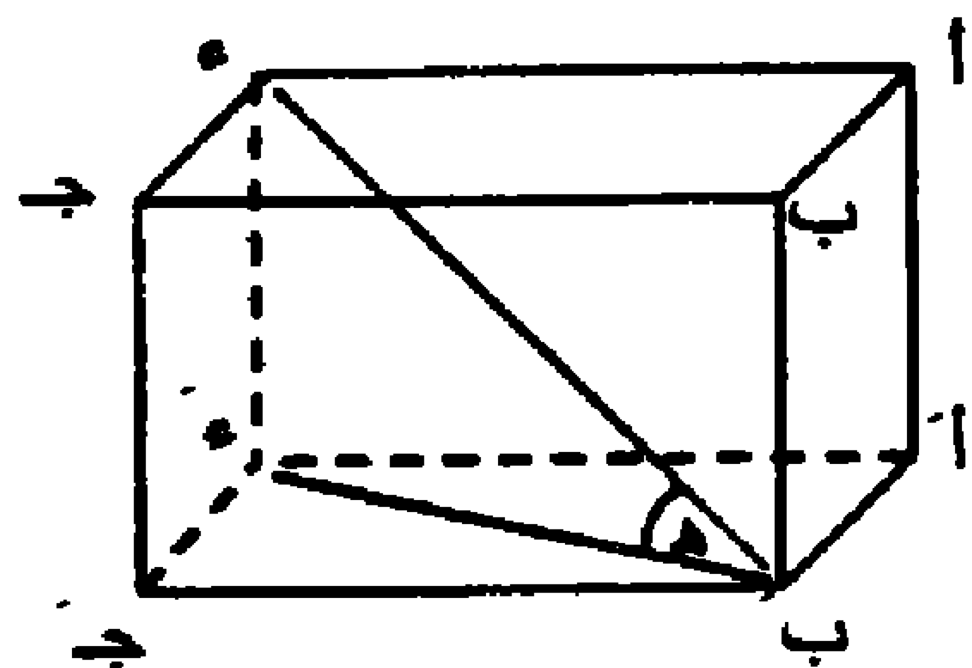
، <أَ جـ أ هي زاوية ميل أَ جـ علي المستوي أ ب جـ ء

في Δ أَ أ جـ: ∵ <أ = ٩٠ ° ∴ جتا أَ جـ أ = $\frac{\text{أ جـ}}{\text{أَ جـ}}$ = $\frac{١٠}{٢٦}$

∴ هـ = ٤٨َ ٢٢َ ٦٧ °

مثال: أ ب جـ ء أَ بَ جَـ ءَ مكعب طول ضلعه ل . برهن أن جيب تمام الزاوية التي يميل بها قطر المكعب علي الوجه الذي تقع فيه = $\frac{\sqrt{6}}{3}$

الحـــــــل



المطلوب : إثبات أن جتا هـ = $\frac{\sqrt{6}}{3}$

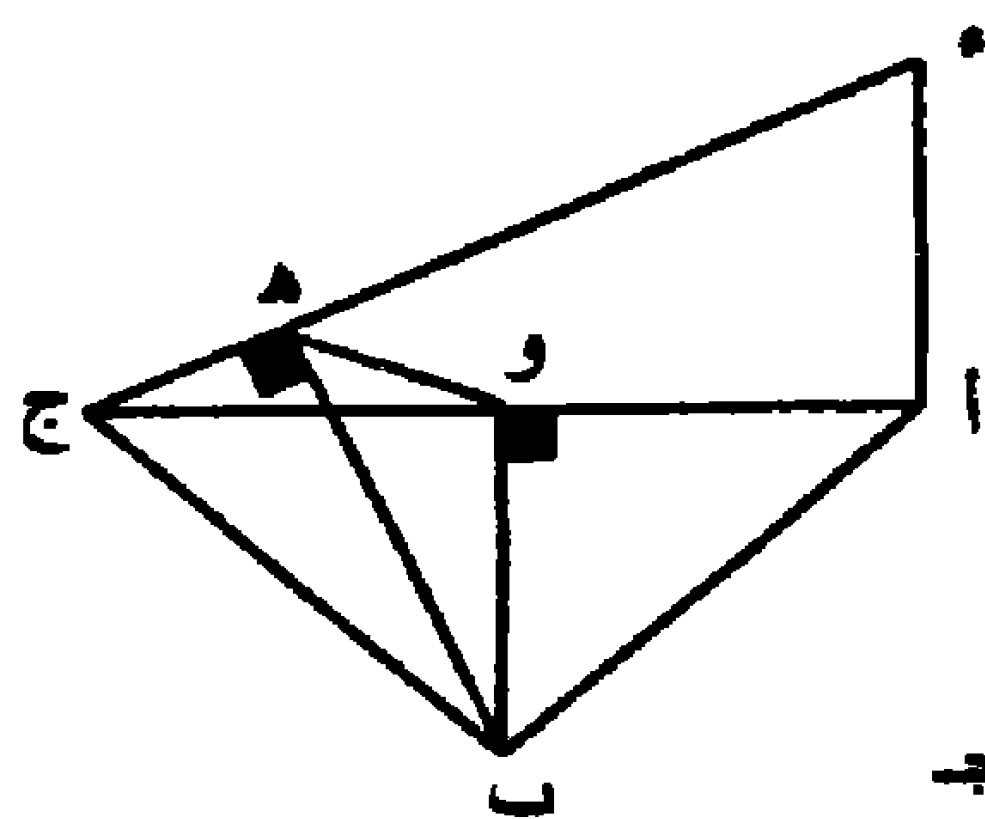
∵ Δ ء ءَ بَ قائم الزاوية في ءَ

∴ زاوية ميل القطر ء بَ علي القاعدة هي هـ

∴ جتا هـ = $\frac{بَ ءَ}{ء بَ}$ = $\frac{ل\sqrt{2}}{ل\sqrt{3}}$ = $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

مثال: أ ب جـ Δ متساوي الأضلاع . رسم أ ء ⊥ علي مستو المثلث . ثم رسم ب و ⊥ أ جـ ، ب هـ ⊥ ء جـ برهن أن : ١) ب و ⊥ لمستوي أ ء جـ ٢) وهـ ⊥ ء جـ

الحـــــــل



∵ $\overline{ء أ}$ ⊥ المستوي أ ب جـ

∴ $\overline{ء أ}$ عمودي علي أي مستقيم فيه

∴ $\overline{ء أ}$ ⊥ $\overline{ب و}$ ولكن $\overline{ب و}$ ⊥ $\overline{أ جـ}$

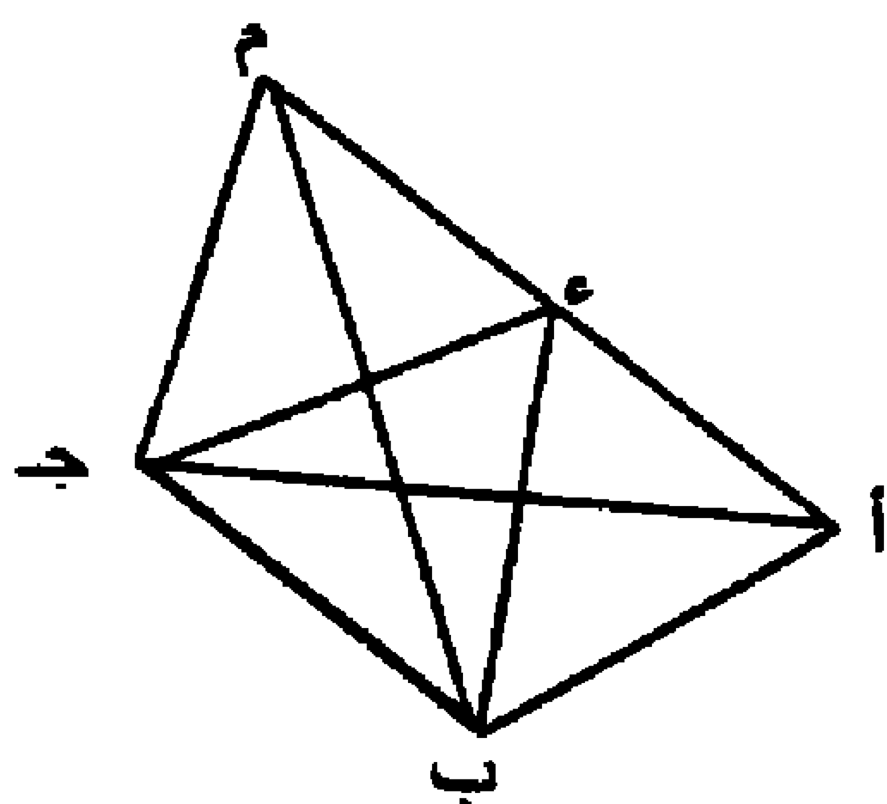
∴ $\overline{ب و}$ ⊥ كلا من $\overline{ء أ}$ ، $\overline{أ جـ}$

∴ $\overline{ب و}$ ⊥ المستوي ء أ جـ ∵ $\overline{ب و}$ ⊥ المستوي أ ء جـ

∴ $\overline{ب و}$ (المائل) ⊥ $\overline{ء جـ}$ ∴ مسقط $\overline{و هـ}$ ⊥ $\overline{ء جـ}$

تمرين(٦)

١- في الشكل المقابل:

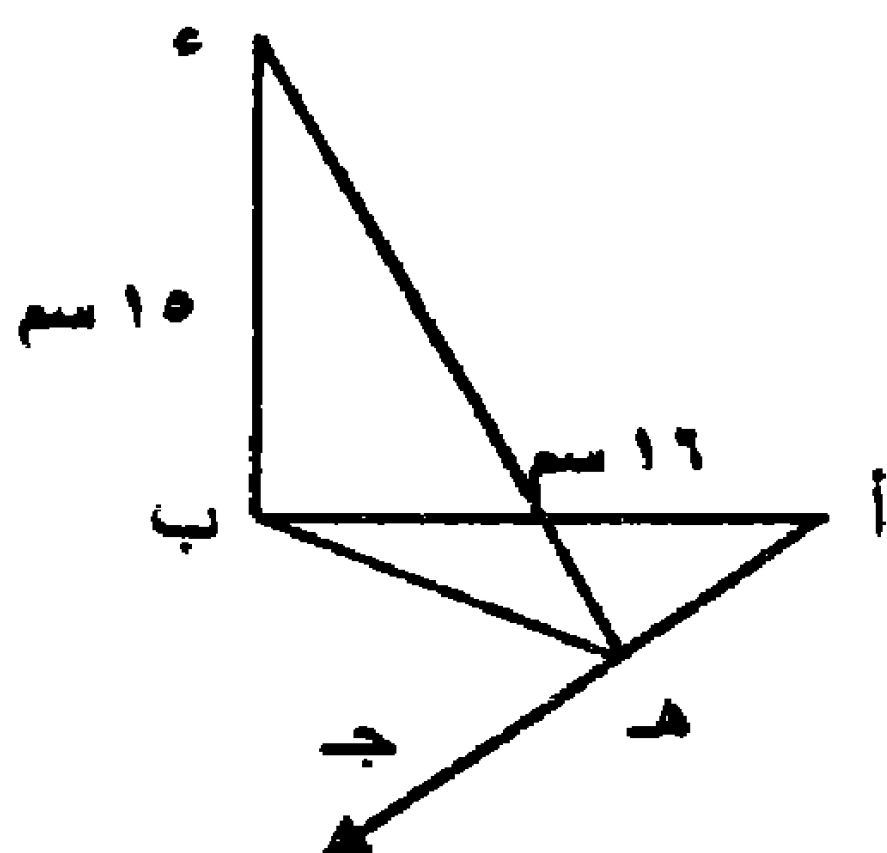


المستوى أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب

، جـ م ⊥ المستوي أ ب جـ ، ء منتصف أ م

أثبت أن: ء ب = ء جـ

٢- في الشكل المقابل:

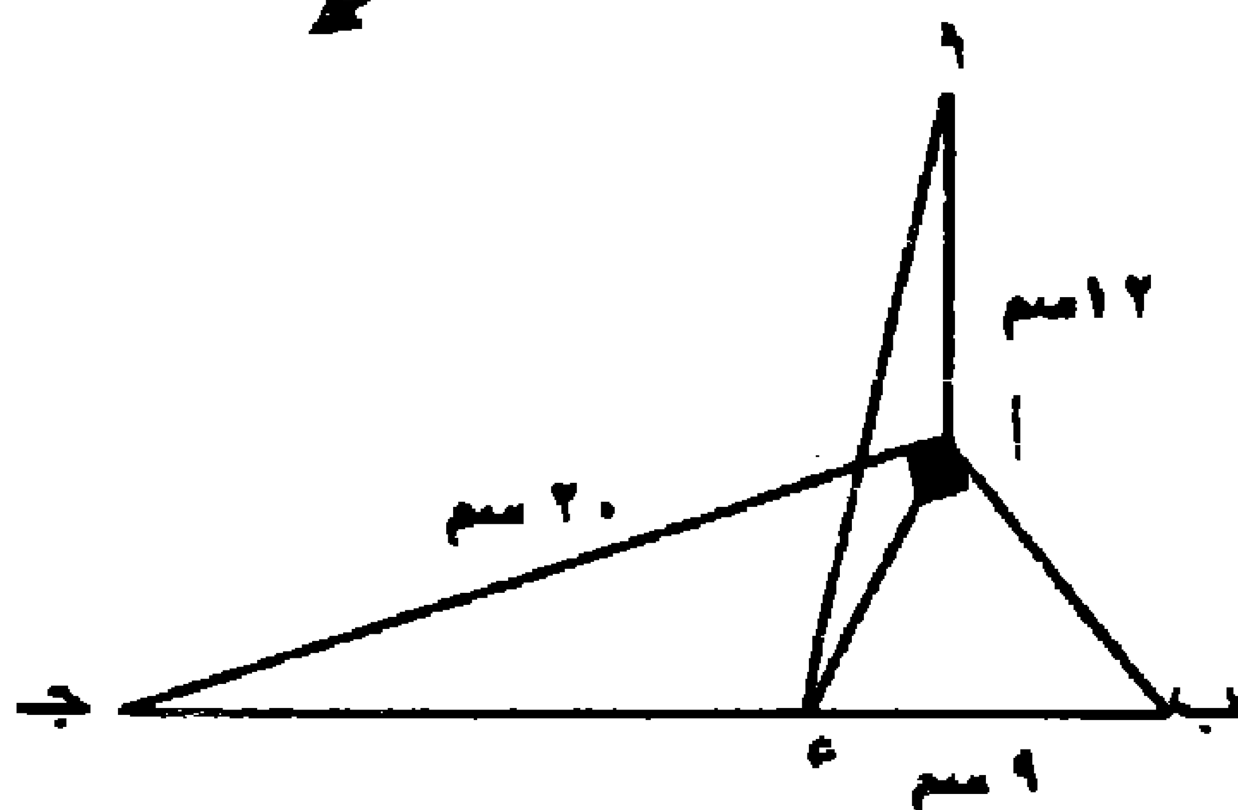


ق (< ب أ جـ) = ٣٠° ، أ ب = ١٦ سم

، ء ب ⊥ المستوي أ ب جـ ، ء هـ ⊥ أ جـ

فإذا كان ب ء = ١٥ سم. احسب ء هـ .

٣- في الشكل المقابل:



أ ب جـ مثلث فيه < أ قائمة ، أ ب = ١٥ سم

، أ جـ = ٢٠ سم ، أ م ⊥ مستوي المثلث أ ب جـ

، ء ∈ ب جـ بحيث ب ء = ٩ سم .

أثبت أن:

م ء ⊥ ب جـ وأوجد قياس زاوية ميل م ء على المستوي أ ب جـ .

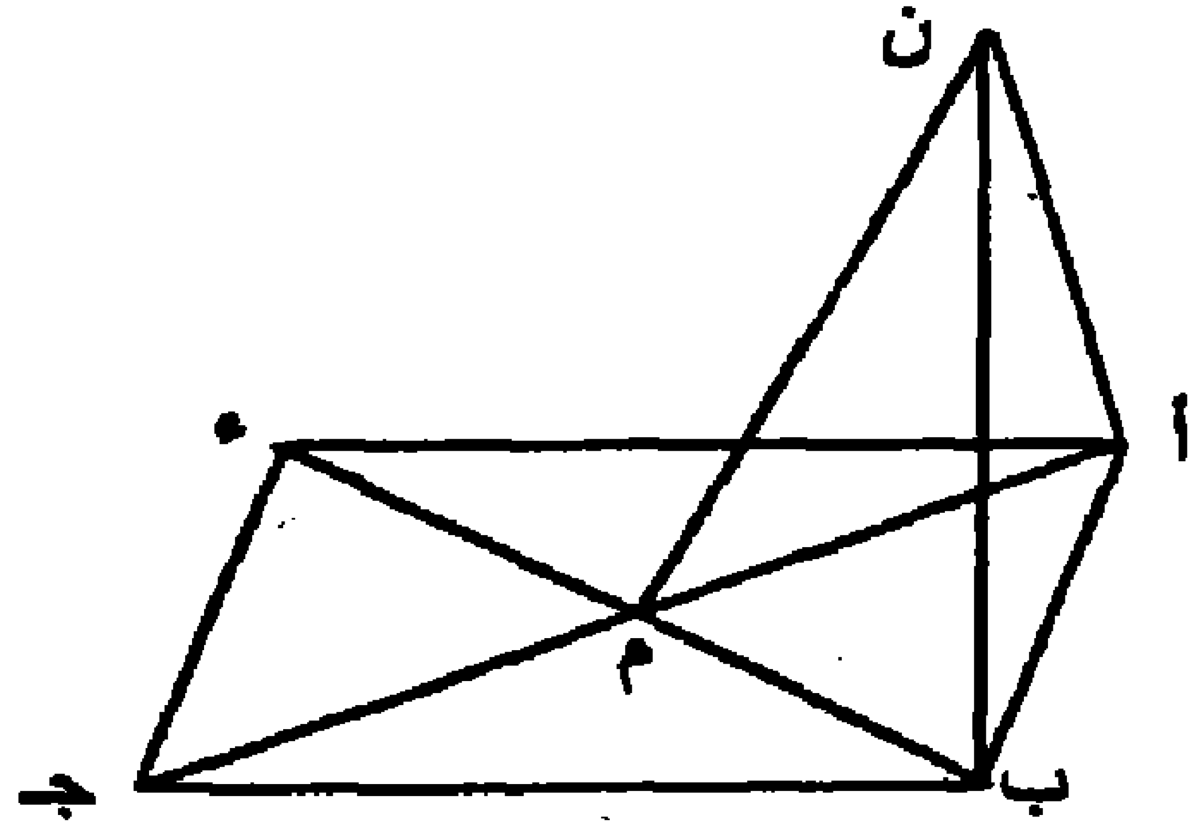
٤- أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ . رسم أ م ⊥ المستوي أ ب جـ ، كان أ م = ٣,٦سم ، رسم م هـ ⊥ ب جـ ويقطعها في هـ ورسمت أ هـ . فإذا كان أ ب = ٦سم ، أ جـ = ٨ سم . فاحسب طول كل من أ هـ ، م هـ .

٥- جـ ء هـ مثلث قائم الزاوية في جـ . رسم جـ أ ⊥ المستوي جـ ء هـ ، رسمت أ ء ، أ هـ وكانت مساحة سطح Δ أ هـ ء = ٩٦ سم^2 ، جـ ء = ٩سم ، جـ هـ =١٢ سم .

- احسب طول أ هـ .

٦- أ ب جـ مثلث فيه أ ب = أ جـ ، ق (< ب أ جـ) = ١٢٠ ° - رسم $\overleftrightarrow{أء}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ ويقطعها في ء ، كان أ ء = ١٠سم ، ورسم $\overleftrightarrow{أم}$ ⊥ المستوي أ ب جـ فإذا كان ق(< أ م ب) = ٣٠ ° - فاحسب كل من أ م ، م ء ، مساحة سطح Δ م ب جـ .

٧- في الشكل المقابل:



أ ب ج ء مربع طول ضلعه ١٢سم تقاطع قطراه في م رسم $\overline{أن}$ ⊥ مستوي المربع بحيث كان أ ن = ٥ سم

١) أثبت أن :

أ) $\overline{ب ء}$ ⊥ المستوى ن أ م

ب) $\overline{ن ب}$ ⊥ ب جـ

٢) أوجد طول $\overline{ن ب}$

٨- م أ ب ج هرم ثلاثي $\overline{م أ}$ ، $\overline{م ب}$ ، $\overline{م جـ}$ متعامدة مثنى مثنى ، $\overleftrightarrow{م هـ}$ ⊥ المستوي أ ب جـ ويقطعه في هـ وكان $\overleftrightarrow{أ هـ}$ يقطع $\overline{ب جـ}$ في نقطة ء فأثبت أن:

(أولاً) $\overline{م أ}$ ⊥ المستوي م ب جـ

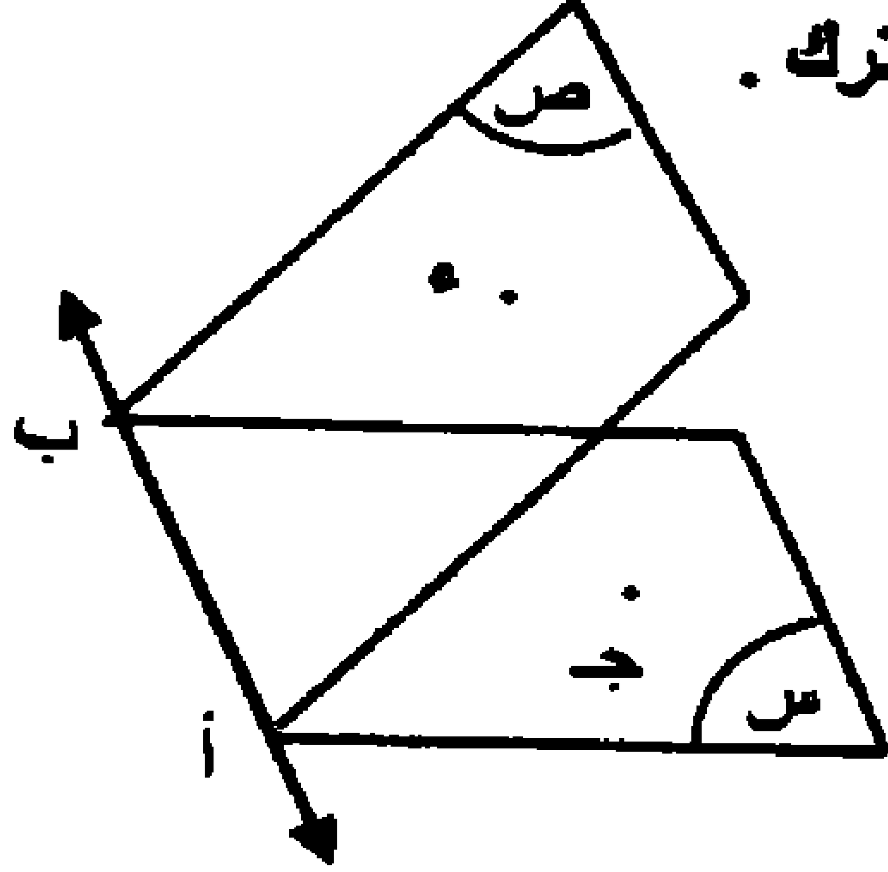
(ثانياً) $\overline{م ء}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$

(ثالثاً) $(م هـ)^2$ = أ هـ . هـ ء

الزاويـة الزوجيـة

تعريف :

الزاوية الزوجية هي الناتجة من اتحاد نصفي مستويين لهما حد مشترك .



$\overleftrightarrow{أب}$ حداً لنصفي المستويين س ، ص

∴ س ∪ أ ب ∪ ص يسمي زاوية زوجية .

حيث كل من س ، ص وجه للزاوية الزوجية

، $\overleftrightarrow{أب}$ يسمي حرف للزاوية الزوجية .

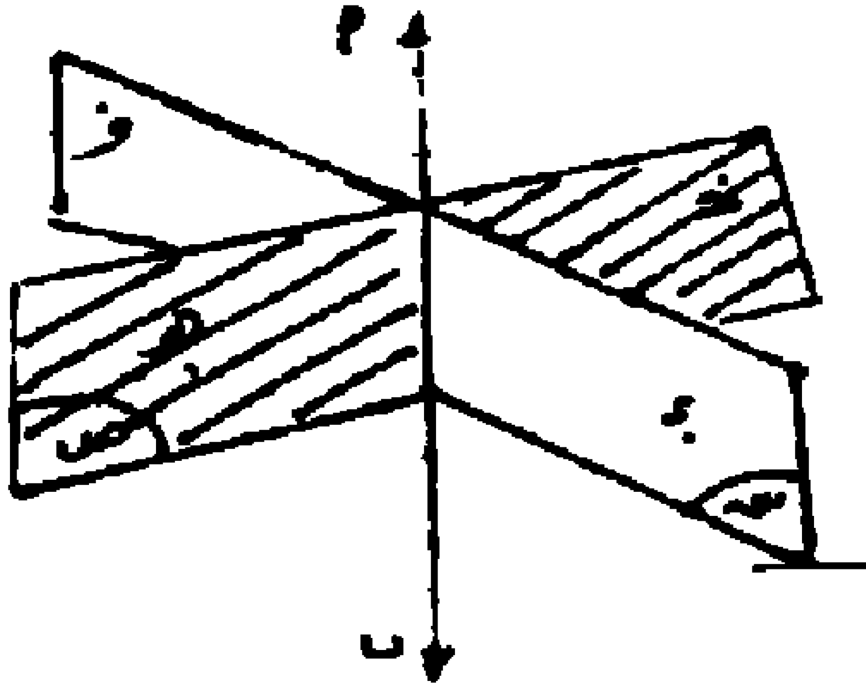
ويرمز للزاوية الزوجية بأحد الرموز الآتية :-

أ- الزاوية س – أ ب – ص

ب- الزاوية جـ - أ ب – ء

ج- الزاوية الزوجية التي حرفها $\overleftrightarrow{أب}$

الزوايا الزوجية الناتجة عن تقاطع مستويين:-



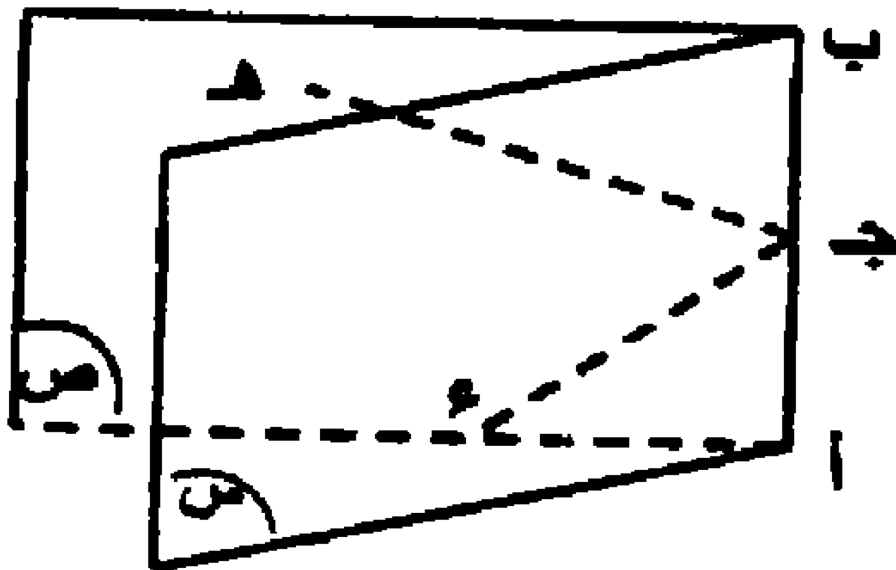
إذا تقاطع مستويان س ، ص في المستقيم أ ب فإنه ينشأ عن تقاطعهما الزوايا الزوجية الآتية :-

(< جـ - $\overleftrightarrow{أب}$ – ء)

(< ء - أ ب – هـ)

(< و - $\overleftrightarrow{أب}$ – هـ) ، (< جـ - $\overleftrightarrow{أب}$ – و)

الزاوية المستوية للزاوية الزوجية (قياس الزاوية الزوجية):-



نحدد نقطة علي حرف الزاوية الزوجية أ ب ونقيم منها عمودين علي الحرف أحدهما يقع في المستوي الأول س والثاني يقع في المستوي الثاني ص من ذلك يتحدد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين ففي الشكل المقابل:-

جـ نقطة علي أ ب (حرف الزاوية)

جـ ء ⊥ أ ب في المستوي س ، جـ هـ ⊥ أ ب في المستوي ص

∴ مقياس الزاوية الزوجية (الزاوية المستوية) بين المستويين س، ص هي الزاوية ء جـ هـ

<u>تعريف</u> : الزاوية المستوية لزاوية زوجية هي الزاوية الحادثة من تقاطع هذه الزاوية الزوجية مع أي مستوي عمودي علي حرفها .

<u>حقيقة</u>: جميع الزوايا المستوية لزاوية زوجية تكون متساوية القياس .

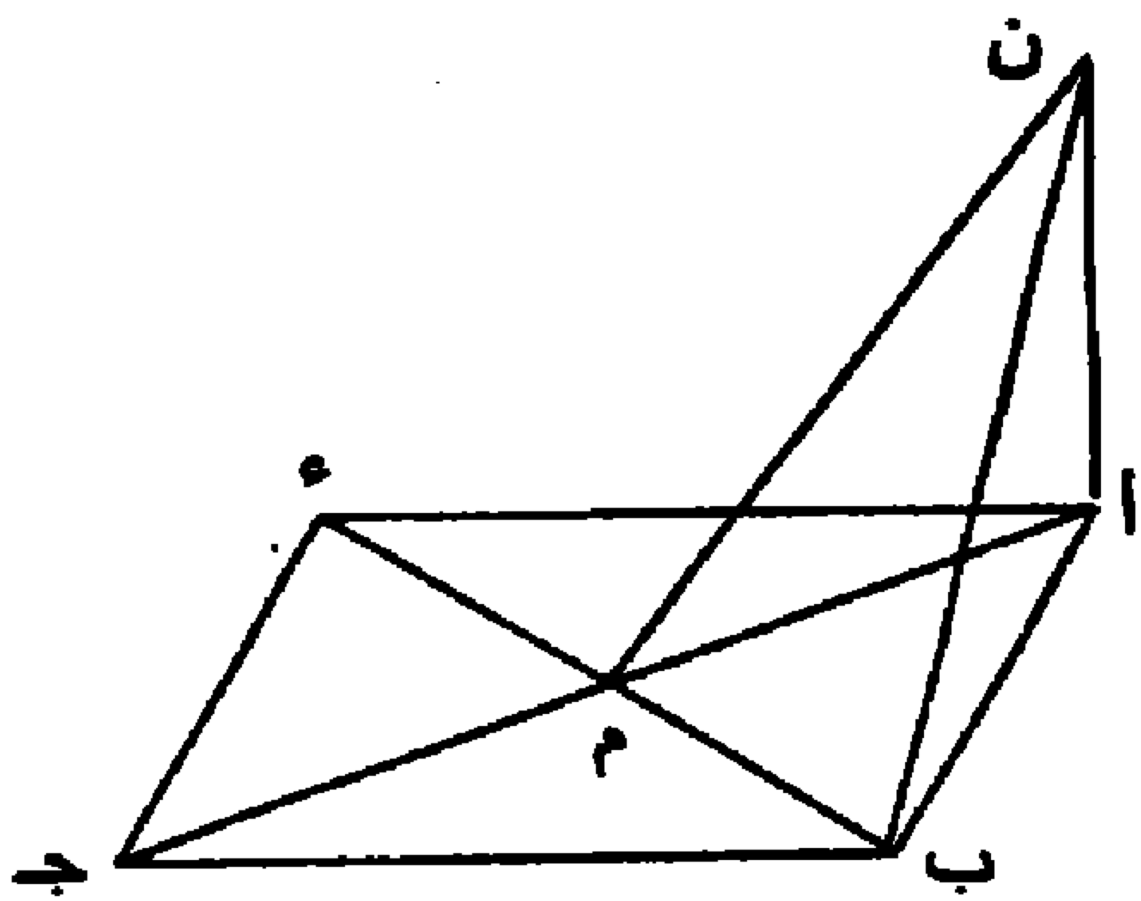
<u>تعريف</u>: قياس الزاوية الزوجية هو قياس أي من زواياها المستوية .

<u>ملاحظة</u>: الزاوية الزوجية تكون حادة ، منفرجة ، مستقيمة ، قائمة، إذا كانت زاويتها المستوية حادة ، منفرجة ، مستقيمة ، قائمة.

<u>مثال</u>: أ ب ج ء مربع طول ضلعه ١٢ سم تقاطع قطراه في م . رسمت أ ن عمودية علي مستوي المربع حيث أ ن = ٦ √٢ سم - اثبت أن : ب ء ⊥ المستوي ن أ م .

وأوجد ق (< أ – ب ء – ن)

<u>الحـــــــل</u>



∵ أ ن ⊥ مستوي المربع ∴ أ ن ⊥ ب ء

ولكن ب ء ⊥ أ م (لأن أ جـ ، ب ء قطر المربع)

∴ ب ء ⊥ كل من أ ن ، أ م

∴ ب ء ⊥ المستوي ن أ م ∴ ب ء ⊥ م ن

∴ ق (< أ م ن) = ق (< أ – ب ء – ن)

، ∵ أ ن ⊥ مستوي المربع ∴ أ ن ⊥ أ م

، ∵ أ م = $\frac{١}{٢}$ أ جـ = ٦√٢

∴ Δ ن أ م قائم الزاوية في أ ، ن أ = أ م

∴ ق (< ن م أ) = ٤٥ °

∴ ق (< أ – ب ء – ن) = ٤٥ °

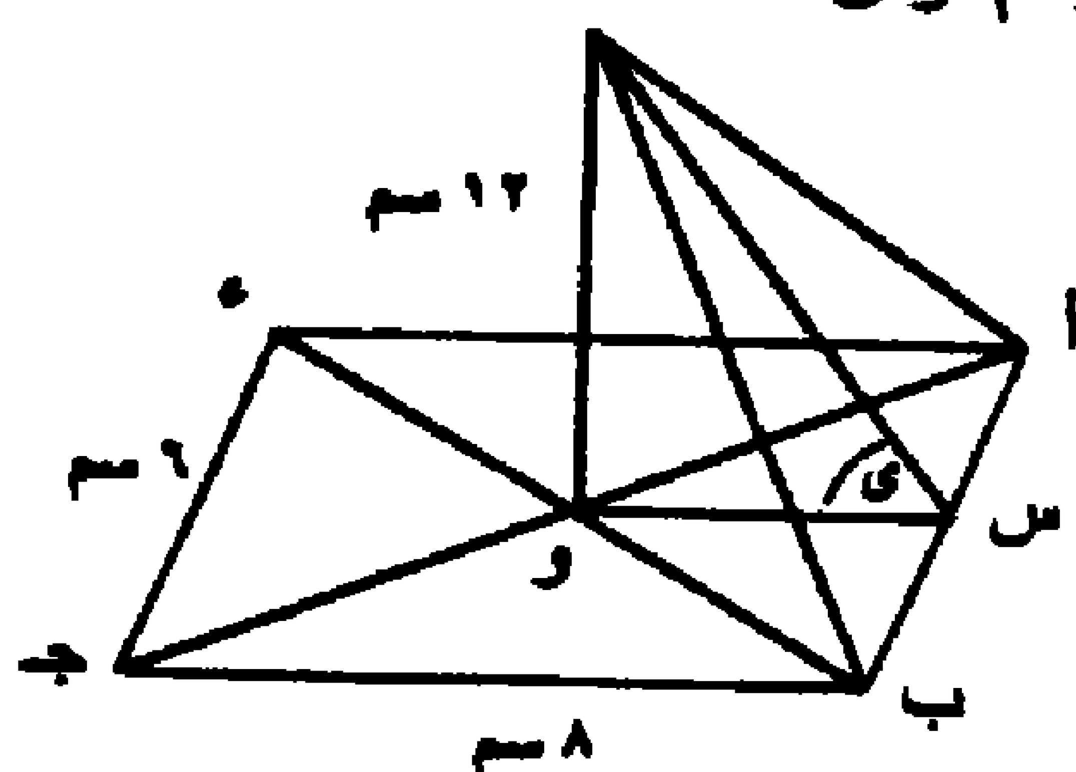
مثال: أ ب جـ ء مستطيل فيه أ ب = ٦سم ، ب جـ = ٨ سم تقاطع قطراه في و ثم رسمت و م عمودية علي مستوي المستطيل فإذا كان $\overline{م أ}$ = ١٣ سم أوجد طول $\overline{م و}$ ، و إذا كانت س منتصف $\overline{أ ب}$ فبرهن أن $\overline{س م}$ ⊥ $\overline{أ ب}$ وإذا كان ق (< م – $\overleftrightarrow{أ ب}$ – جـ) = ى – فأوجد قيمة طا ى .

الحـــــل

$\overline{أ جـ}^2$ = ٣٦ + ٦٤ = ١٠٠ ∴ أ جـ = ١٠سم ∴ أ و = ٥ سم

، ∵ م و ⊥ المستوي أ ب جـ ء ∴ $\overline{م و}$ ⊥ $\overline{و أ}$

∴ $\overline{م و}^2$ = ١٦٩ – ٢٥ = ١٤٤ ∴ $\overline{م و}$ = ١٢ سم نرسم $\overline{و س}$



∴ $\overline{و س}$ // $\overline{ب جـ}$ ∴ $\overline{و س}$ ⊥ $\overline{أ ب}$

، $\overline{و س}$ = ٤ سم

، ∵ $\overline{و س}$ مسقط م س علي المستوي أ ب جـ ء

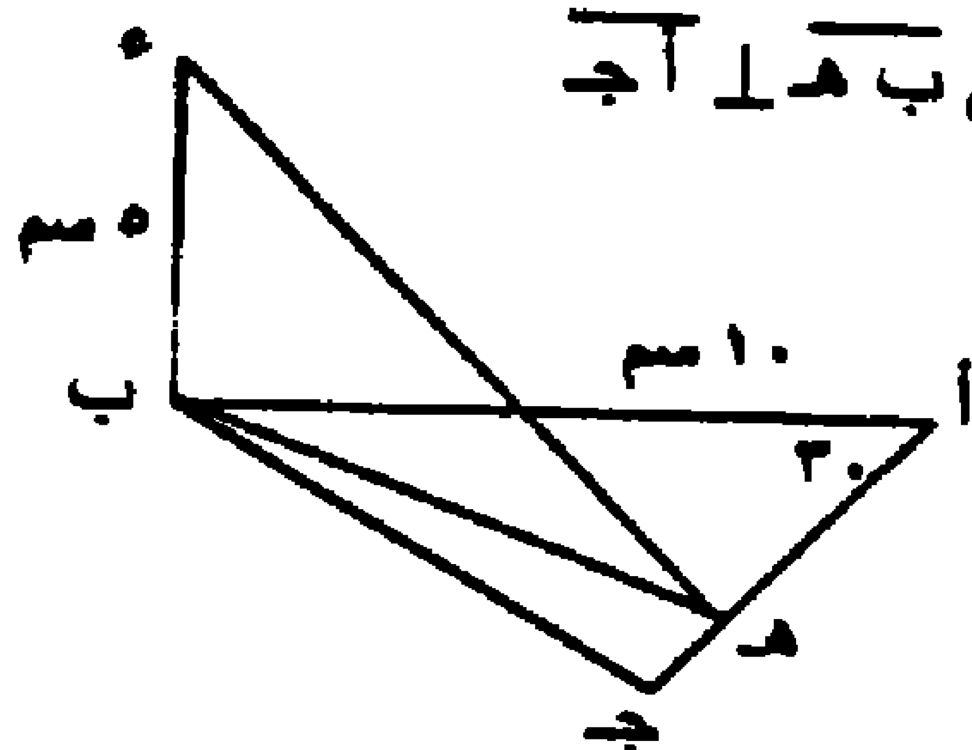
∴ $\overline{م س}$ ⊥ $\overline{أ ب}$

∴ ق (< م س و) = ق(< م – $\overleftrightarrow{أ ب}$ – جـ) = ى

طا ى = $\frac{م و}{و س}$ = $\frac{١٢}{٤}$ = ٣

مثال: أ ب جـ مثلث فيه ق(< أ) = ٣٠ ° ، أ ب = ١٠ سم ، رسم $\overline{ب ء}$ ⊥ المستوي أ ب ج بحيث كان ب ء = ٥ سم . ثم رسم $\overline{ب هـ}$ ⊥ $\overline{أ جـ}$ يقابله في هـ . أثبت أن $\overline{ء هـ}$ ⊥ $\overline{أ جـ}$ ثم أوجد طول كل من $\overline{ب هـ}$ ، $\overline{ء هـ}$ وقياس الزاوية الزوجية (ب – $\overleftrightarrow{أ جـ}$ – ء) .

البرهـــــان



∵ $\overline{ء هـ}$ مائلة علي المستوي أ ب جـ ومسقطها علي المستوي هي $\overline{ب هـ}$ ⊥ $\overline{أ جـ}$

∴ $\overline{ء هـ}$ ⊥ $\overline{أ جـ}$

وحيث أن $\overline{ب هـ}$ ⊥ $\overline{أ جـ}$

∴ < ب هـ ء زاوية مستوية للزاوية الزوجية (ب – $\overleftrightarrow{أ جـ}$ – ء)

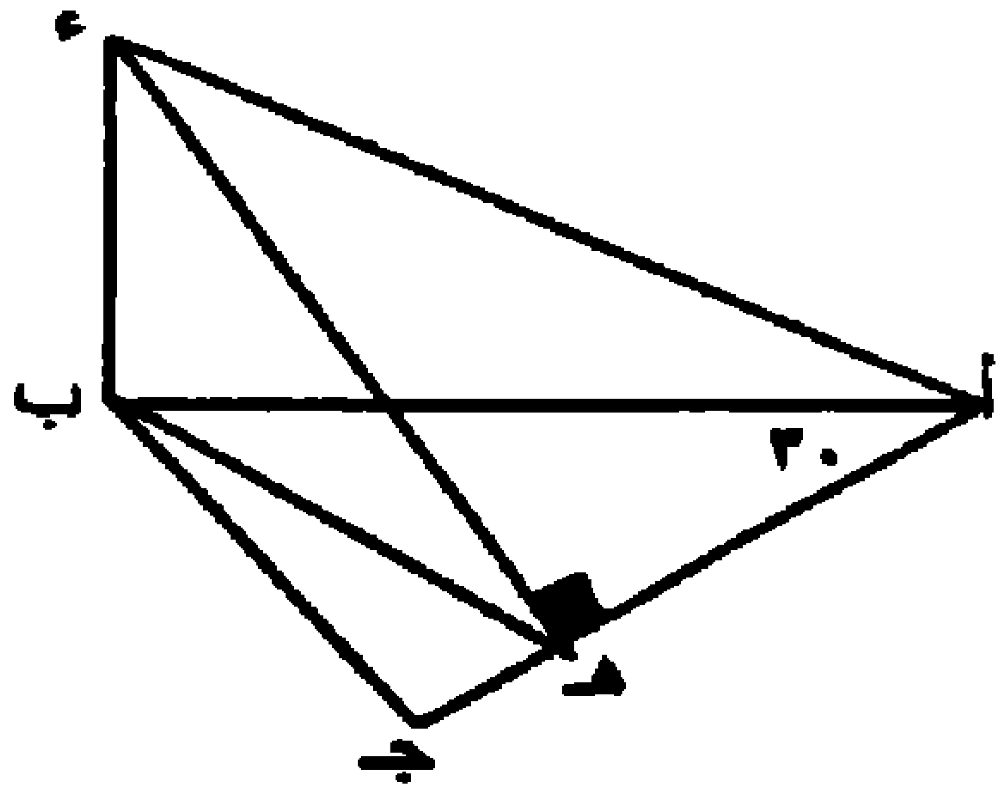
في Δ أ ب هـ : ب هـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب = $\frac{١}{٢}$ × ١٠ = ٥ سم

في Δ ء ب هـ : ء ب = ب هـ ، ق (ء ب هـ) = ٩٠ °

∴ ق(< ب هـ ء) = ٤٥ °

مثال: أ ب جـ مثلث فيه ق (< أ) = ٣٠ °، أ ب = ١٠ $\sqrt{٣}$ سم، رسم ب ء ⊥ المستوي أ ب جـ بحيث $\overline{ب ء}$ = ٥ سم ثم رسم $\overline{ء هـ}$ ⊥ $\overleftrightarrow{أ جـ}$ فقابله في هـ أثبت أن : $\overline{ب هـ}$ ⊥ $\overleftrightarrow{أ جـ}$ وأن قياس الزاوية الزوجية (< ب ـ $\overleftrightarrow{أ جـ}$ ـ ء) يساوي ٣٠ °.

البرهـــــان



∵ $\overline{ء هـ}$ مائل على المستوي أ ب جـ ، $\overline{ء ب}$ ⊥ المستوي أ ب جـ

∴ $\overline{ب هـ}$ هي مسقط $\overline{ء هـ}$ على المستوي أ ب جـ

∵ $\overline{ء هـ}$ ⊥ $\overline{أ جـ}$ ∴ $\overline{ب هـ}$ ⊥ $\overline{أ جـ}$

∴ < ب هـ ء زاوية مستوية للزاوية الزوجية (< ب ـ $\overleftrightarrow{أ جـ}$ ـ ء)

في Δ أ ب هـ: ب هـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب = ٥ $\sqrt{٣}$ سم

∵ $\overline{ء ب}$ ⊥ المستوي أ ب جـ ∴ $\overline{ء ب}$ ⊥ $\overline{ب هـ}$

ظا (< ب هـ ء) = $\frac{ء ب}{ب هـ}$ = $\frac{٥}{٥\sqrt{٣}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

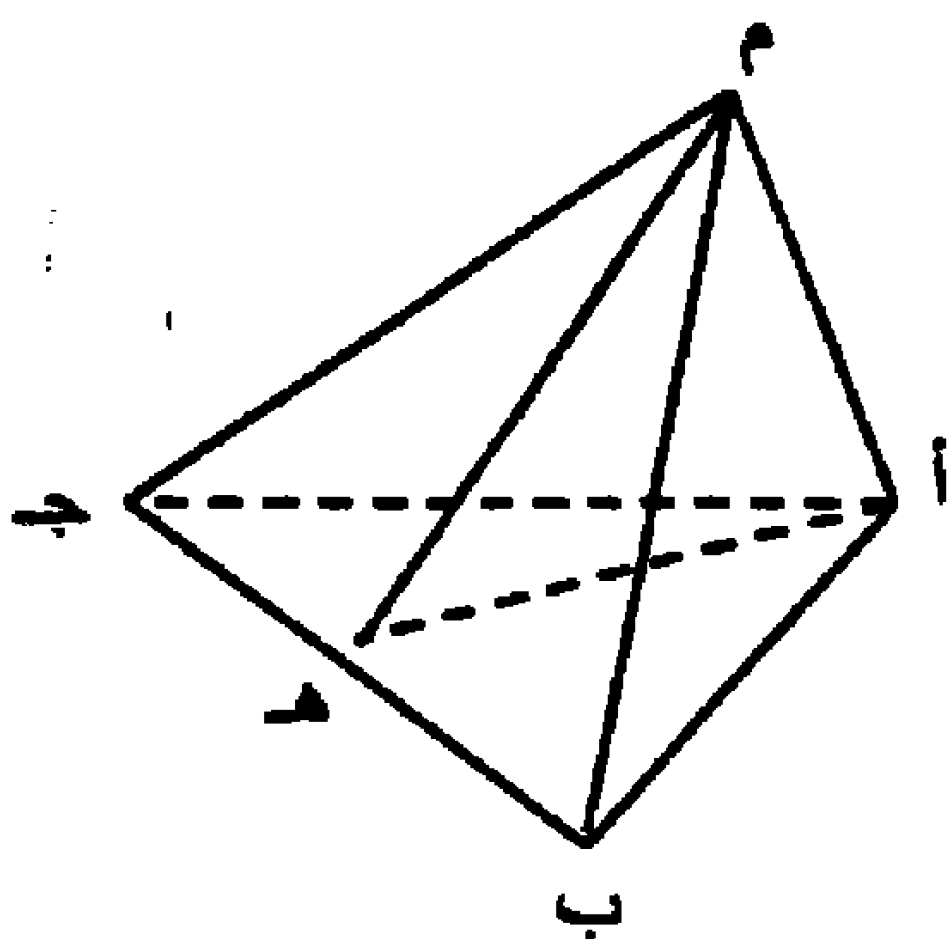
∴ ق (< ب هـ ء) = ٣٠ °

مثال: م أ ب جـ هرم ثلاثي فيه أ ب ج مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ٤٠ سم ، أ م ⊥ المستوي أ ب ج ، أ م = ٢٠ $\sqrt{٣}$ سم ، هـ منتصف ب جـ .

(أولاً) أثبت أن المستوي م أ هـ ⊥ المستوي أ ب ج .

(ثانيا) أحسب قياس (< م ـ ب جـ ـ أ)

الحـــــل



∵ $\overline{م أ}$ ⊥ المستوي أ ب جـ ، $\overline{م أ}$ ⊂ المستوي م أ هـ

∴ المستوي م أ هـ ⊥ المستوي أ ب جـ

∵ Δ أ ب جـ متساوي الأضلاع ، هـ منتصف $\overline{ب جـ}$

∴ $\overline{أ هـ}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$

∵ $\overline{م أ}$ ⊥ المستوي أ ب جـ ∴ أ هـ مسقط المائل م هـ على أ ب جـ

∵ $\overline{أ هـ}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ ∴ $\overline{م هـ}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$

∴ $\angle$ م هـ أ هي زاوية مستوية للزاوية الزوجية ($\angle$ م- $\overleftrightarrow{بجـ}$ - أ)

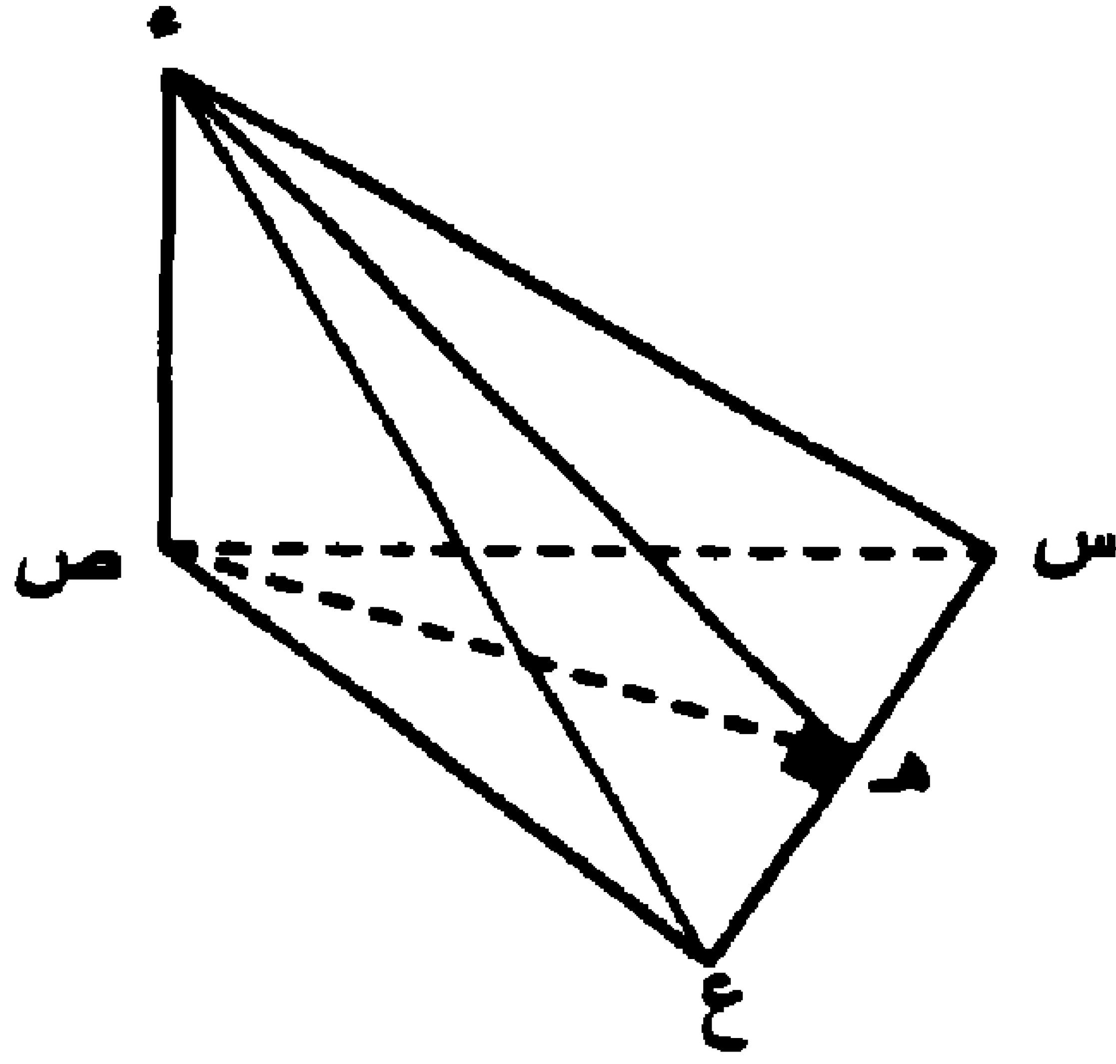
∵ $\overline{مأ}$ ⊥ المستوي أ ب جـ ∴ $\overline{مأ}$ ⊥ $\overline{أهـ}$

أ هـ = أ ب جا ٦٠ = ٤٠ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٢٠ $\sqrt{٣}$ سم

، ظا ($\angle$ م هـ أ) = $\frac{مأ}{أهـ}$ = $\frac{٢٠\sqrt{٣}}{٢٠\sqrt{٣}}$ = ١

∴ ق ($\angle$ م هـ أ) = ٤٥°

مثال : س ص ع Δ فيه ق($\angle$ س) = ٣٠°، س ص= ٢٠ سم - اقيم ص ء ⊥ مستوي Δ س ص ع حيث ص ء = ١٠ $\sqrt{٣}$ رسمت $\overline{صهـ}$ ⊥ $\overline{سع}$ وتقطعها في هـ. اثبت أن $\overline{ءهـ}$ ⊥ $\overline{سع}$ من ذلك احسب قياس الزاوية الزوجية بين المستويين ء س ع ، س ص ع .



الحــــــل

∵ $\overline{ءص}$ ⊥ المستوي س ع ص

∴ $\overline{هـص}$ مسقط $\overline{ءهـ}$ علي المستوي س ص ع

∵ $\overline{صهـ}$ ⊥ $\overline{سع}$

∴ $\overline{ءهـ}$ ⊥ $\overline{سع}$ (أولا)

∴ ($\angle$ ء هـ ص) هي زاوية مستوية للزاوية

الزوجية بين المستويين ء س ع ، س ص ع

في Δ س هـ ص : ص هـ = س ص جا ٣٠° = ٢٠ × $\frac{١}{٢}$ = ١٠ سم

∵ ء ص ⊥ المستوي س ص ع

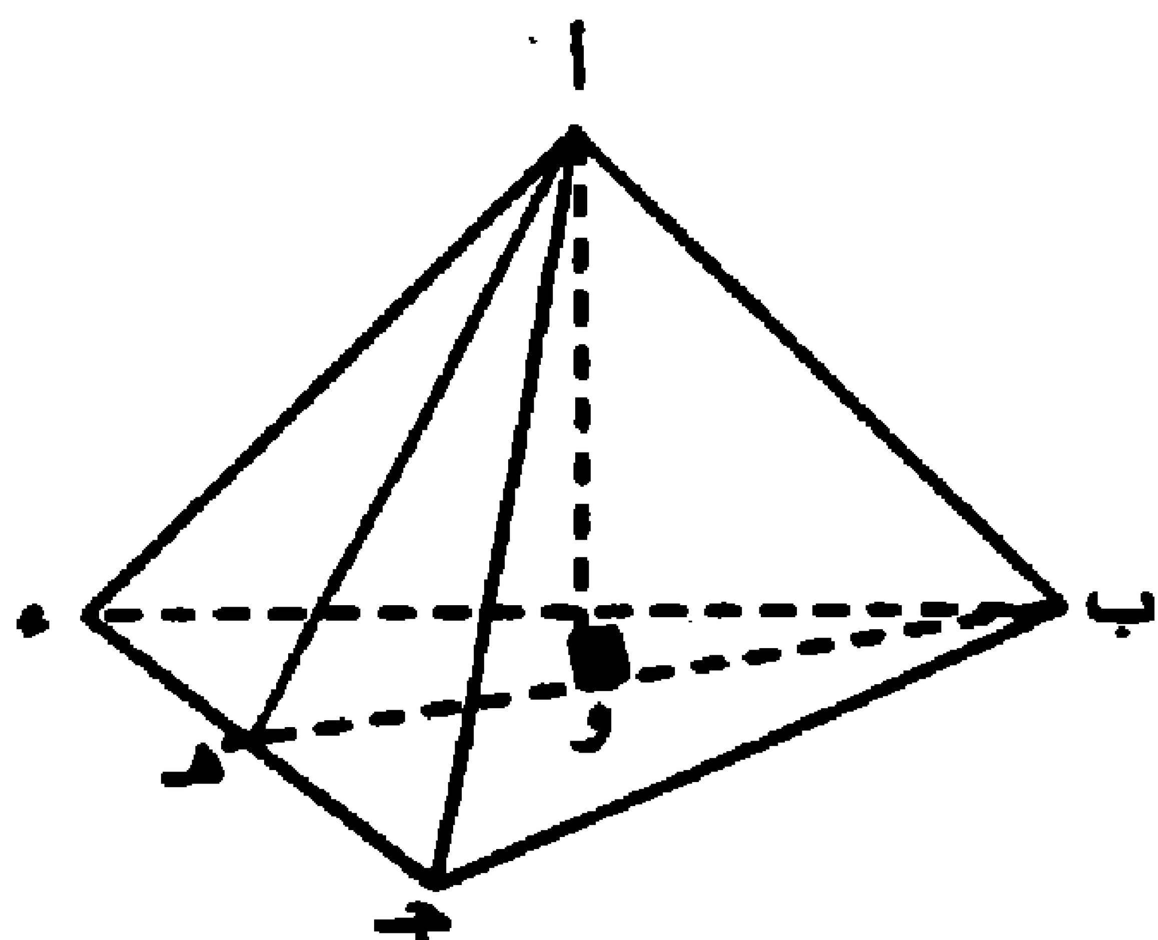
∴ $\overline{ءص}$ ⊥ $\overline{صهـ}$

ظا ($\angle$ ء هـ ص) = $\frac{ءص}{صهـ}$ = $\frac{١٠\sqrt{٣}}{١٠}$ = $\sqrt{٣}$

∴ ق ($\angle$ ء هـ ص) = ٦٠°

مثال: أ ب ج ء هرم ثلاثي فيه ب جـ = ب ء ، أ جـ = أ ء نصفت جـ ء في هـ أثبت أن جـ ء ⊥ المستوي أ ب هـ وإذا رسم أ و ⊥ ب هـ أثبت أن أ و ⊥ المستوي ب ج ء وإذا كان ج ء = ١٨ سم ، أ جـ = ١٥ سم ، أ و = ٦ $\sqrt{3}$ سم - أوجد قياس الزاوية الزوجية (ب – جـ ء – أ)

البرهـــــان



في Δ ب جـ ء ∵ ب جـ = ب ء ، هـ منتصف جـ ء

∴ ب هـ ⊥ جـ ء ----- (١)

في Δ أ جـ ء ∵ أ جـ = أ ء ، هـ منتصف جـ ء

∴ أ هـ ⊥ جـ ء ----- (٢)

من (١) ، (٢) جـ ء ⊥ المستوي أ ب هـ

∵ أ و ⊂ المستوي أ ب هـ ∴ جـ ء ⊥ أ و

∵ أ و ⊥ ب هـ ∴ أ و ⊥ المستوي ب جـ ء ∵ جـ ء ⊥ المستوي أ ب هـ

∴ أ هـ ب زاوية مستوية للزاوية الزوجية (ب – جـ ء – أ)

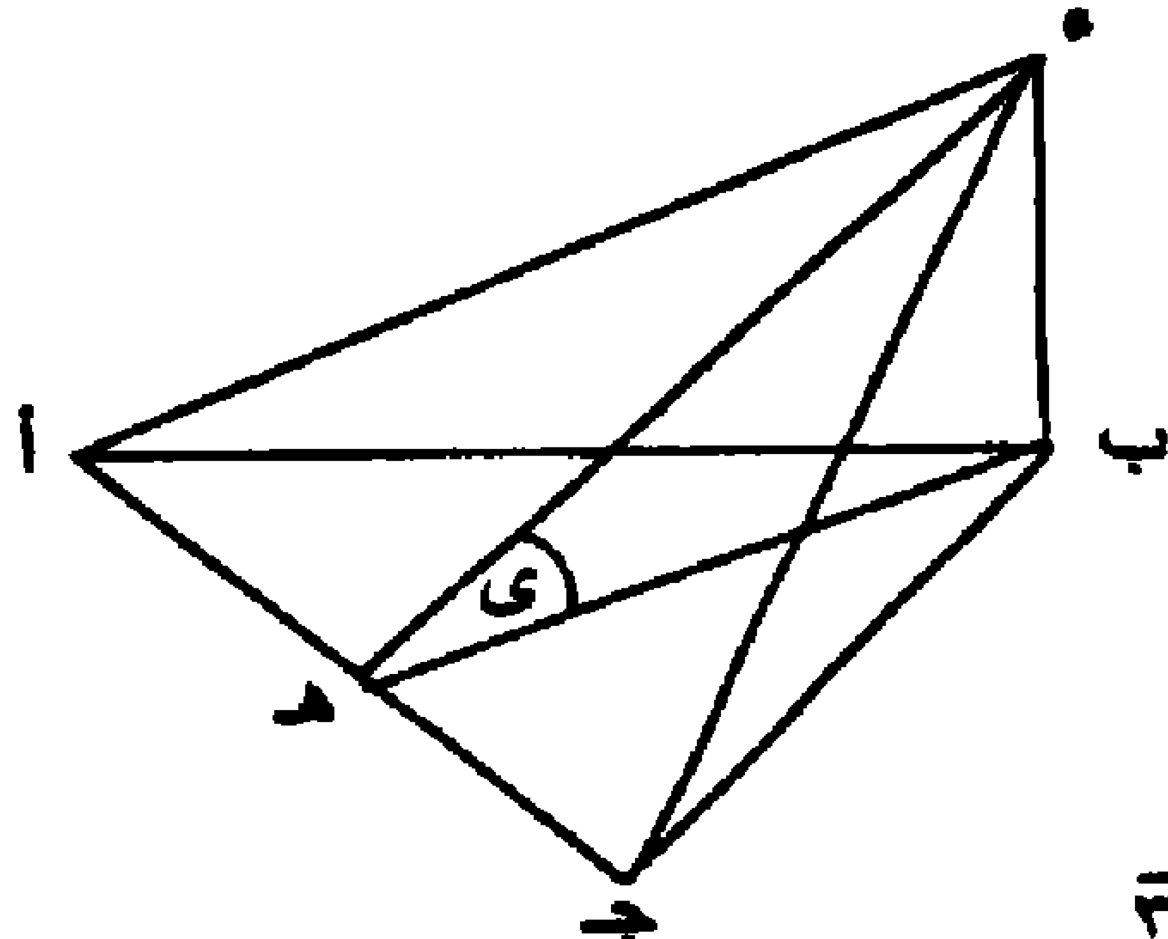
$(أهـ)^2 = (أجـ)^2 - (جـهـ)^2 = ٢٢٥ - ٨١ = ١٤٤$

∴ أ هـ = ١٢ سم ، جا (أ هـ و) = $\frac{أو}{أهـ} = \frac{٦\sqrt{٣}}{١٢} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ ق (∠ أ هـ و) = ٦٠°

مثال: أ ب ج Δ متساوي الأضلاع طول ضلعه ١٢ سم . أقيم المستقيم ب عموديا على مستوي المثلث فإذا كان ب ء = ٦ سم – فاحسب الزاوية بين المستويين ء جـ ا ، أ ب جـ .

الحـــــل



تنصف أ جـ في هـ ونصل ء هـ ، ب هـ

∵ Δ أ ب ج متساوي الأضلاع

∴ هـ منتصف أ جـ ، ب هـ ⊥ أ جـ

∴ ء هـ ⊥ أ جـ

∴ ى هي مقياس الزاوية الزوجية

$ء هـ^2 = \frac{٢}{١٢} - (٦)^2$ ∴ ء هـ = ٦ $\sqrt{٣}$

∴ ظا ى = $\frac{٦}{٦\sqrt{٣}} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$ ∴ ى = ٣٠°

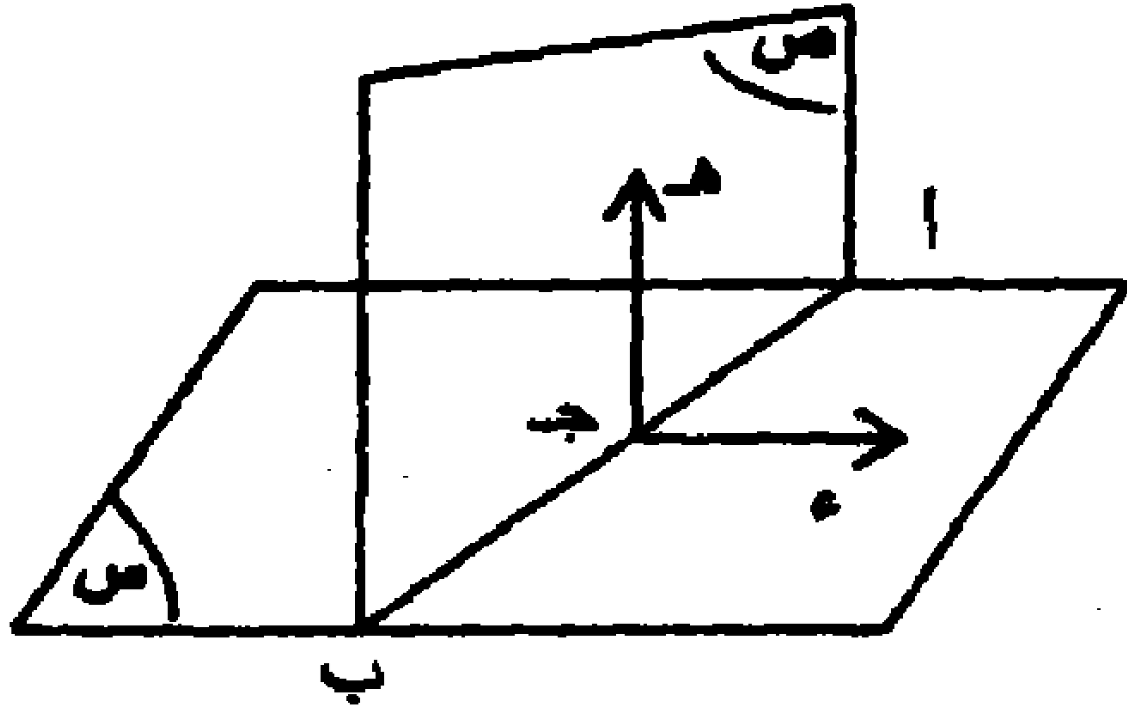
المستويات المتعامدة

يقال لمستويين أيهما متعامدان إذا كانت إحدي الزوايا الزوجية الناشئة عن تقاطعهما قائمة .

نظرية:

- إذا كان مستقيم عمودياً علي مستو فكل مستو يحوي هذا المستقيم يكون عمودياً علي ذلك المستوى .

المعطيات : $\overleftrightarrow{جـ هـ}$ ⊥ المستوى س عند جـ ، $\overleftrightarrow{جـ هـ}$ ⊂ ص ، س ∩ ص = $\overleftrightarrow{أ ب}$



المطلوب : إثبات أن : ص ⊥ س

البرهان:

نرسم $\overleftrightarrow{جـ ء}$ ⊥ $\overleftrightarrow{أ ب}$ في المستوى س

∵ $\overleftrightarrow{جـ هـ}$ ⊥ المستوي س (معطي) ، $\overleftrightarrow{جـ ء}$ ⊂ س

∴ $\overleftrightarrow{جـ هـ}$ ⊥ $\overleftrightarrow{جـ ء}$ ، وأيضا $\overleftrightarrow{جـ هـ}$ ⊥ $\overleftrightarrow{أ ب}$

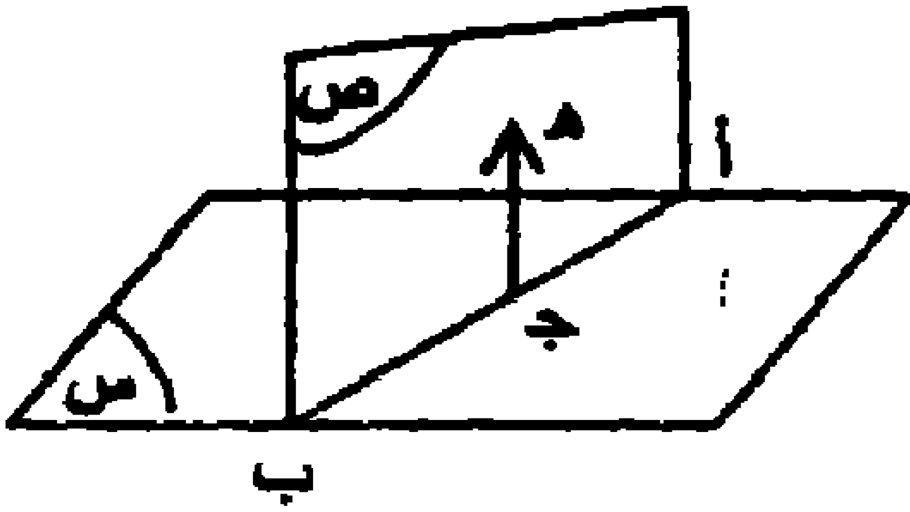
∴ ق (< ء جـ هـ) = ٩٠°

∵ < ء جـ هـ زاوية مستوية لإحدى الزوايا الزوجية الناشئة عن تقاطع المستويين س ، ص

∴ ص ⊥ س

عكس النظرية (بدون برهان)

- إذا تعامد مستويان ورسم فى أحدهما مستقيم عمودي على خط التقاطع كان هذا المستقيم عمودياً علي المستوي الآخر .

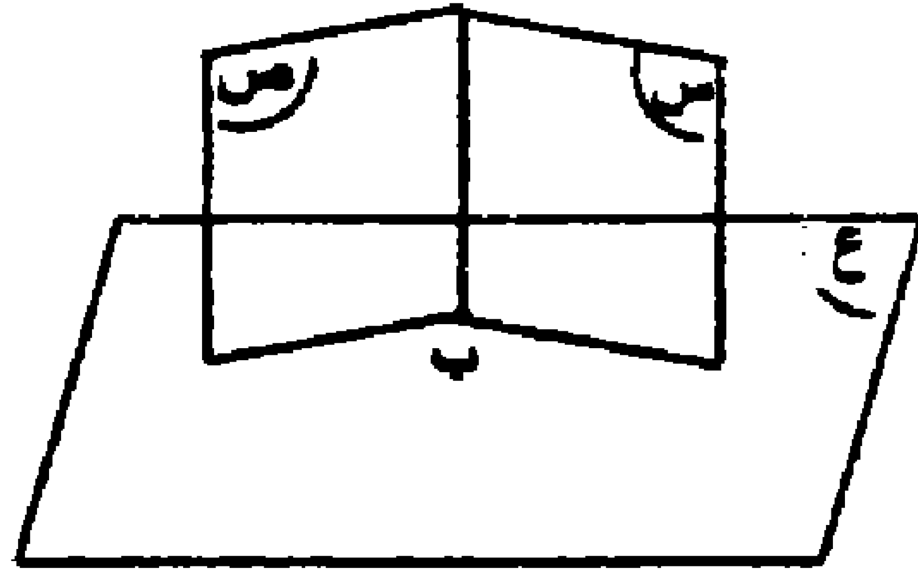


إذا كان س ⊥ ص ، س ∩ ص = $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{جـ هـ}$ ⊂ ص

، $\overleftrightarrow{جـ هـ}$ ⊥ $\overleftrightarrow{أ ب}$ فإن : $\overleftrightarrow{جـ هـ}$ ⊥ المستوي س .

حقيقة :

إذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودياً علي مستو ثالث كان خط تقاطع هذين المستويين عمودياً علي المستوي الثالث .



إذا كان كل من المستويين س ، ص عمودي علي المستوي ع

وكان س ∩ ص = $\overleftrightarrow{أب}$ فإن $\overleftrightarrow{أب}$ ⊥ المستوي ع .

ملاحظة :

لإثبات أن المستويين متعامدين :-

أ- نوجد مستقيم في أحدهم عمودي علي الآخر.

ب- نثبت الزاوية الزوجية بين المستويين قائمة .

مثال : س ، ص مستويان متعامدان ،المستقيم ل يقع في ص رسم من النقطة ب ∋ ل المستقيمان ب جـ ، ب ء عمودين علي ل ويلاقيان المستوى س في جـ و ء علي الترتيب .

– أثبت أن : جـ ء ⊥ المستوي ص .

الحـــــــل

∵ $\overleftrightarrow{ب جـ}$ ، $\overleftrightarrow{ب ء}$ عموديين علي ل

∴ المستقيم ل عمودي علي مستويهما ب جـ ء

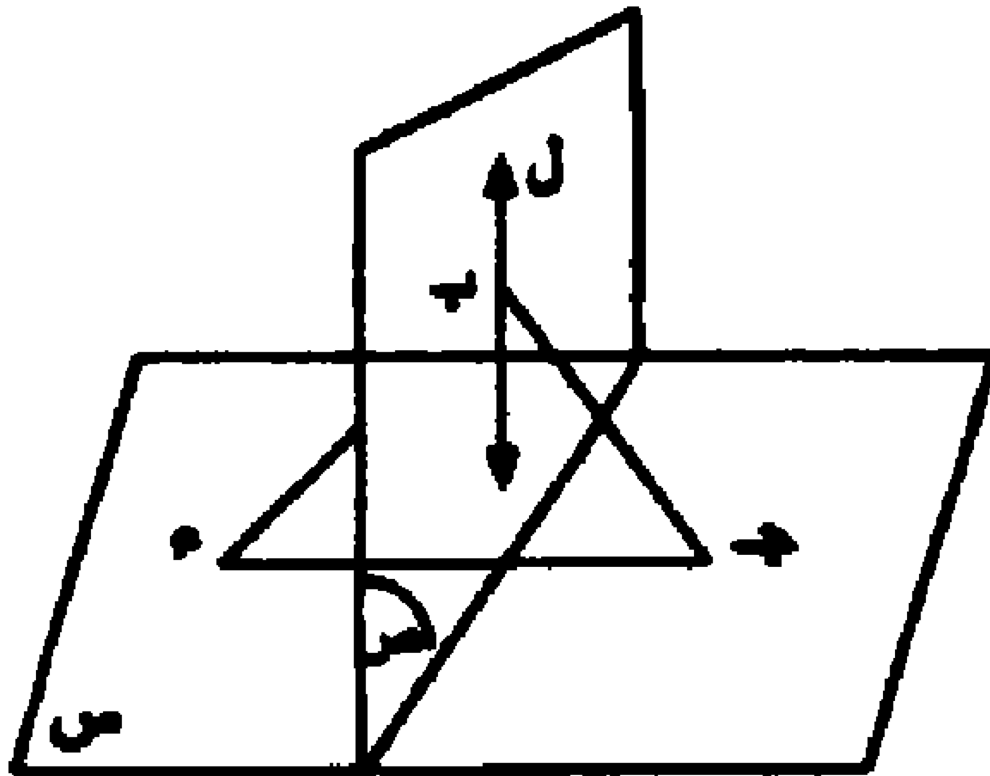
∵ ل ⊂ المستوى ص

∴ المستوى ص ⊥ المستوى ب جـ ء

∴ المستويان س ، ب جـ ء متعامدان على المستوى ص

∴ خط تقاطعهما ⊥ المستوى ص

∴ $\overline{جـ ء}$ ⊥ المستوى ص



مثال: م أ ب جـ هرم ثلاثى فيه م أ ⊥ المستوى أ ب جـ ، أ ب = أ جـ = ١٠ سم ، ب جـ = ١٦ سم ، م أ = ٨ سم . ء فى منتصف ب جـ .

أوجد: (١) ق (م – ب جـ – أ)   (٢) برهن أن المستويين م أ ء ، م ب جـ متعامدين

الحـــــــل

∵ ء في منتصف ب جـ ∴ أ ء ⊥ ب جـ

∵ م أ ⊥ المستوى أ ب جـ

∴ أ ء المسقط ، م ء مائل

∵ المسقط أ ء ⊥ ب جـ

∴ المائل م ء ⊥ ب جـ

∴ ق (< أ ء م) المستوية = ق (م – ب جـ – أ) الزوجية

م
٨ سم
جـ
أ
١٦سم
ب

في Δ أ ء ب

∵ $(أء)^2 = (١٠)^2 - (٨)^2 = ٣٦$ ∴ أ ء = ٦سم

∵ م أ ⊥ المستوى أ ب جـ ∴ م أ ⊥ أ ء

∴ Δ م أ ء $(م ء)^2 = ٨^2 + ٦^2 = ١٠٠$ ∴ م ء = ١٠ سم

∴ جتا (< م ء أ) = $\frac{٦}{١٠}$ = ٠,٦ ∴ ق (< م ء أ) = ...

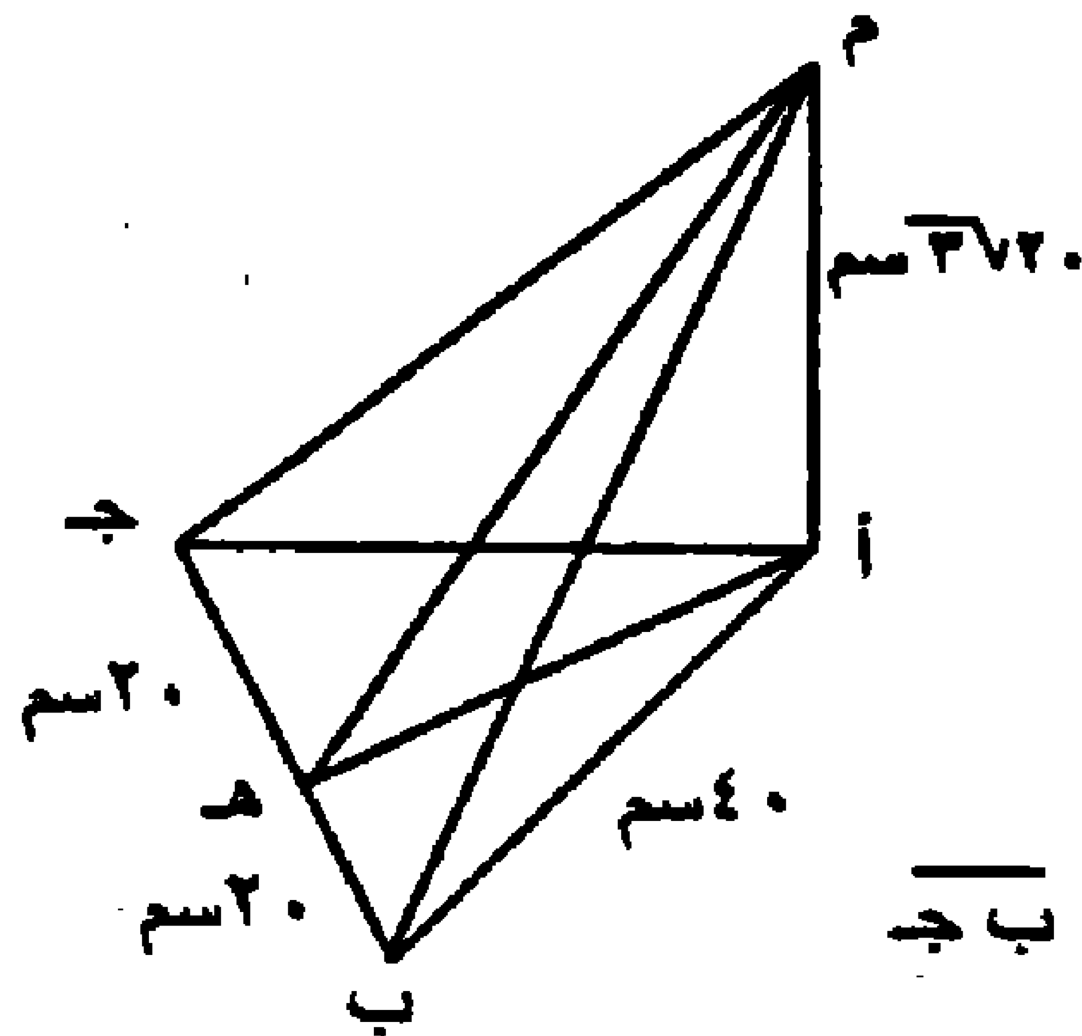
∵ ب جـ ⊥ كلا من أ ء ، م ء ∴ ب جـ ⊥ المستوى م أ ء

∵ المستوى م ب جـ يحوى المستقيم ب جـ ∴ المستوى م ب جـ ⊥ المستوى م أ ء

مثال: م أ جـ هرم ثلاثي فيه أ ب جـ Δ متساوي الأضلاع . طول ضلعه ٤٠ سم ، م أ ⊥ المستوى أ ب جـ ، أ م = ٢٠ $\sqrt{٣}$ سم ، هـ في منتصف ب جـ .

برهن أن : (١) المستوى م أ هـ ⊥ المستوى أ ب جـ (٢) ق (م – ب جـ – أ)

الحـــــل



∵ أ م ⊥ المستوى أ ب جـ

∴ مستواه ⊥ المستوى أ ب جـ

∴ المستوى م أ هـ ⊥ أ ب جـ

∵ Δ أ ب جـ متساوي الأضلاع ، هـ منتصف ب جـ

∴ أ هـ ⊥ ب جـ

∵ أ هـ المسقط ، م هـ المائل ∴ م هـ ⊥ ب جـ

∴ ق (م – ب جـ – أ) الزوجية = ق (< أ هـ م) المستوية

∵ أ هـ = ٤٠ جا ٦٠ = $٢٠\sqrt{٣}$

∴ ظا (< أ هـ م) = $\frac{\text{أ م}}{\text{أ هـ}}$ = ١

∴ ق (< أ هـ م) = ٤٥°

مثال: أ ب جـ Δ فيه أ ب = أ جـ = ١٠ سم ، ب جـ = ١٢ سم ، رسم $\overline{\text{م أ}}$ ⊥ المستوى أ ب جـ بحيث م أ = ٨ سم ، ء منتصف ب جـ

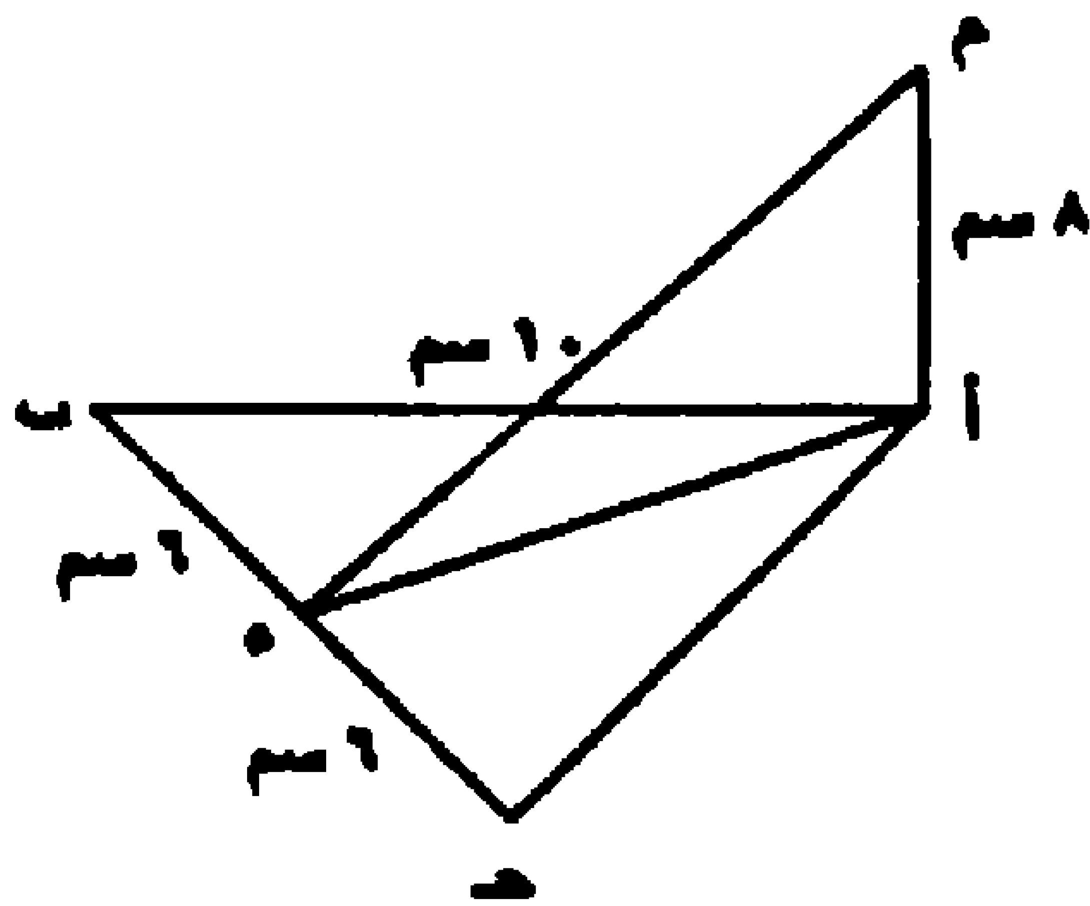
١) أحسب طول $\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overline{\text{م ء}}$

٢) أثبت أن $\overline{\text{م ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$

٣) أوجد قياس (< م – $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ – أ)

٤) أثبت أن المستوي م أ ء ⊥ المستوى أ ب جـ

الحـــــل



١) ∵ Δ متساوي الساقين ، ء منتصف ب جـ

∴ $\overline{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$

في Δ أ ء جـ ∵ ق (< ء) = ٩٠°

∴ $\overline{\text{أ ء}}^٢$ = $\overline{\text{أ جـ}}^٢$ – $\overline{\text{جـ ء}}^٢$ = ١٠٠ – ٣٦ = ٦٤

∴ أ ء = ٨ سم ، ∵ م أ ⊥ المستوى أ ب جـ

∴ $\overline{\text{م أ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ء}}$

فى Δ م أ ء ∵ $\overline{\text{م ء}}^٢$ = $\overline{\text{م أ}}^٢$ + $\overline{\text{أ ء}}^٢$ = ٦٤ + ٦٤ = ١٢٨

∴ م ء = $٨\sqrt{٢}$ سم

٢) ∵ أ ء هو مسقط المائل $\overline{\text{م ء}}$ ، ∵ $\overline{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ $\overline{\text{م ء}}$ ⊥ ب جـ

٣) < م ء أ هى زاوية مستوية للزاوية الزوجية (< م – $\overleftrightarrow{\text{جـ ب}}$ – أ)

ظا < م ء أ = $\frac{\text{م أ}}{\text{أ ء}}$ = ١ ∴ ق (< م – $\overleftrightarrow{\text{جـ ب}}$ – أ) = ٤٥°

٤) $\overline{\text{م أ}}$ ⊥ المستوى أ ب جـ ∴ المستوى م أ ء ⊥ المستوى أ ب جـ .

مثال: س ، ص مستويان متعامدان متقاطعان في $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$. رسم Δ أ ب جـ في المستوي س بحيث

كان ق (< ب أ جـ) = ٩٠° . رسم Δ أ ب ء في المستوى ص بحيث كان ق (< ء ب أ) = ٩٠° فإذا كانت هـ في منتصف أ ب ، و في منتصف جـ ء – برهن أن هـ و ⊥ أ ب .

الحـــــل

∵ المستويين س ، ص متعامدين ، أ جـ ⊥ خط تقاطعهما أ ب

∴ أ جـ ⊥ المستوى ص

، ∵ أ جـ ⊥ أ ء ∴ Δ جـ أ ء قائم في أ

∵ أ و متوسط ∴ أ و = $\frac{١}{٢}$ جـ ء ---- (١)

بالمثل المستويين متعامدين ، ء ب ⊥ خط تقاطعهما

∴ ء ب ⊥ المستو س ∴ ء ب ⊥ ب جـ

Δ جـ ب ء قائم في ب ، ∵ ب و متوسط

∴ ب و = $\frac{١}{٢}$ جـ ء ---- (٢) من (١) ، (٢) ينتج أن:

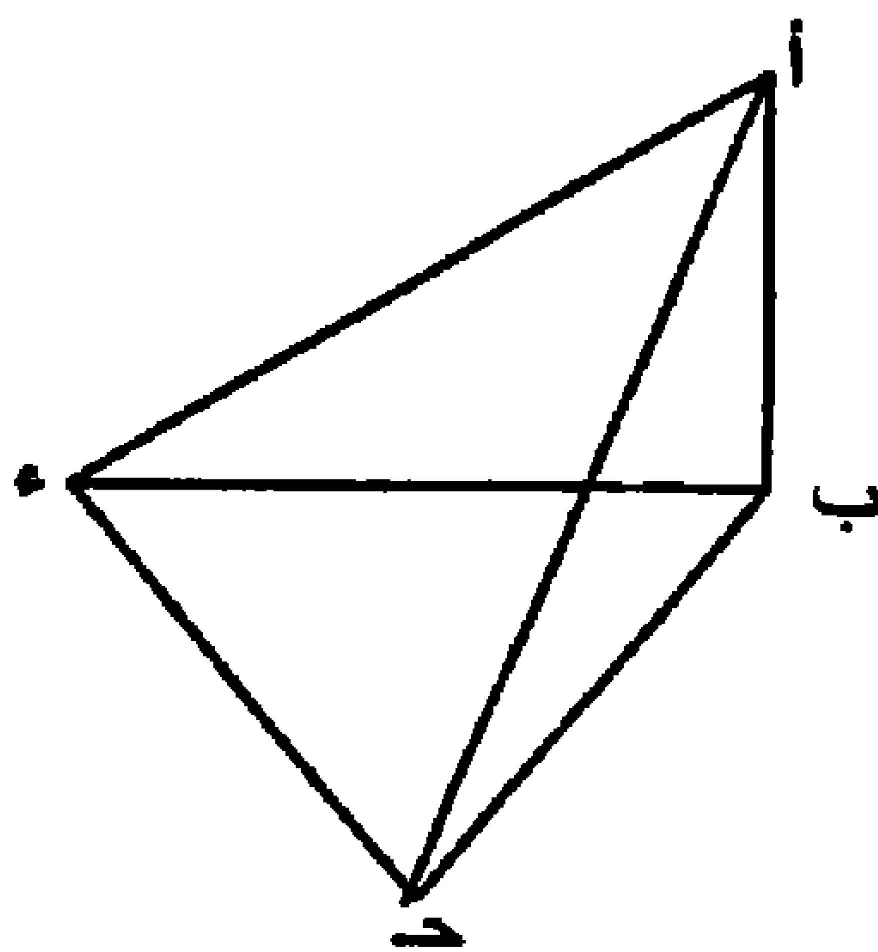
أ و = ب و ∴ Δ أ و ب متساوي الساقين

∵ هـ في منتصف أ ب ∴ و هـ ⊥ أ ب

مثال: ب جـ ء مثلث – رسم أ ب ⊥ المستوي ب جـ ء ، وكان (أ ء)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢} + (جـ ء)^{٢} – أثبت أن : ١) ء جـ ⊥ ب جـ

٢) المستو جـ ب ء ⊥ كل من المستويين ء ب أ ، جـ ب أ

الحـــــل



١) ∵ أ ب ⊥ ب ء ∴ أ ء^{٢} = أ ب^{٢} + ب ء^{٢} ----- (١)

، ∵ أ ء^{٢} = أ ب^{٢} + ب جـ^{٢} + جـ ء^{٢} ----- (٢)

من (١) ، (٢) ∴ ب ء^{٢} = ب جـ^{٢} + جـ ء^{٢}

∴ ء جـ ⊥ ب جـ

٢) ∵ أ ب ⊥ المستوى ب جـ ء ، أ ب ⊂ المستوى أ ب جـ

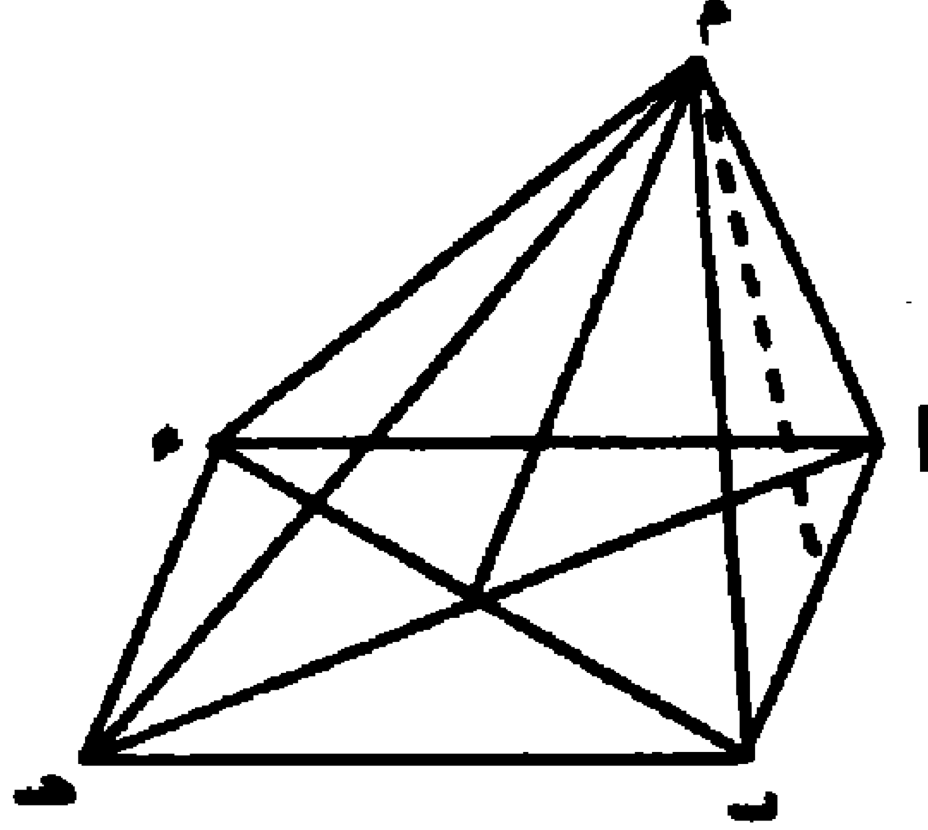
، أ ب ⊂ المستوى أ ب ء

∴ المستوى جـ ب ء ⊥ كل من المستويين ء ب أ ، جـ ب أ

تطبيقات على الهـرم

الهرم القائم :

هو هرم قاعدته مضلع منتظم (مثلث متساوي الأضلاع أو مربع أو ـــــ) مركزه موقع العمود المرسوم من رأس الهرم عليه .



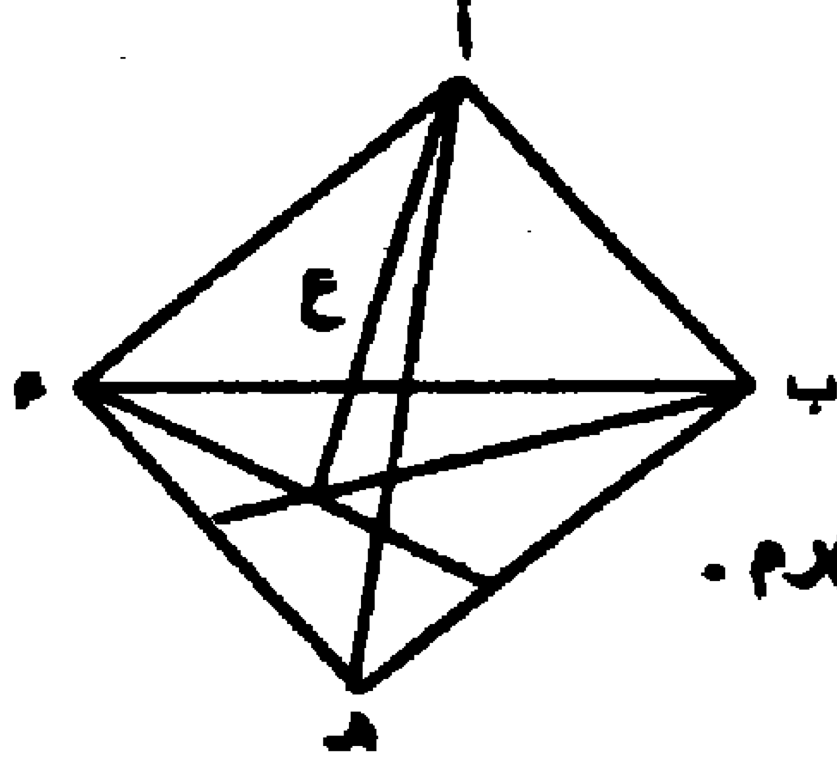
ويلاحظ أن :

(١) أوجه الجانبية مثلثات متساوية الساقين ومتطابقة .

(٢) أحرفة الجانبية متساوية في الطول .

(٣) ارتفاعه الجانبية (ارتفاعات أوجه الجانبية) متساوية .

الهرم الثلاثي المنتظم :-



هو هرم ثلاثي أوجه الأربعة مثلثات متساوية الأضلاع .

ارتفاعه ع يمر برأسه وبنقطة تلاقي متوسطاته قاعدته .

أحرفه الستة متساوية وكل وجه من أوجه الأربعة تعتبر قاعدة للهرم .

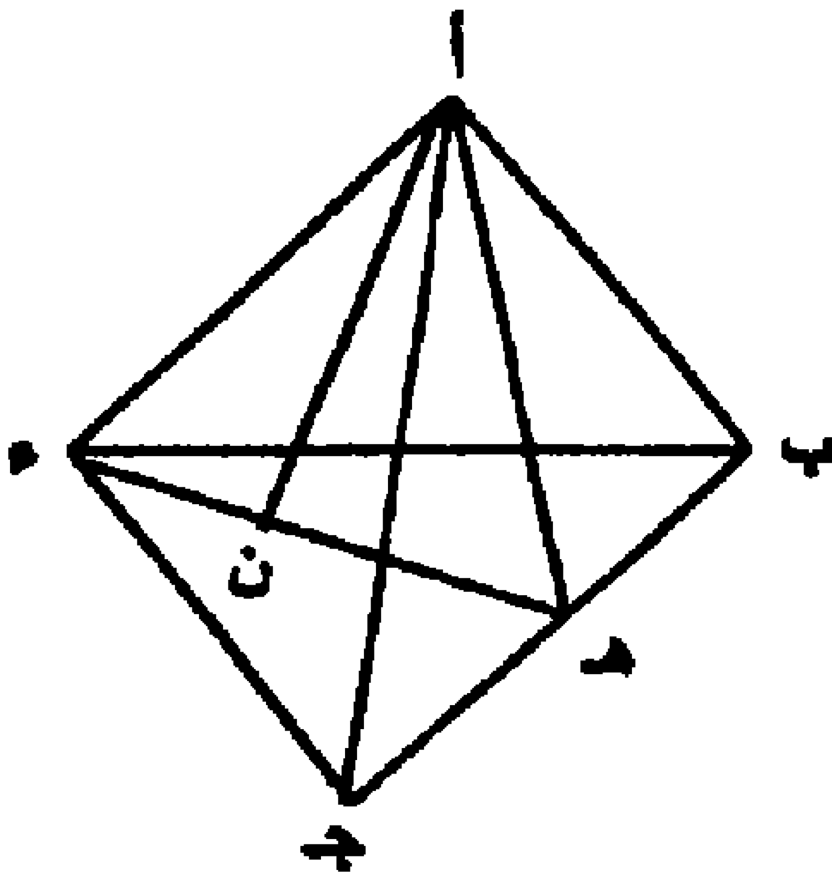
مثال: أ ب جـ ء هرم ثلاثي منتظم طول حرفه = ٦ سم . هـ في منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ثم رسم $\overline{\text{هـ أ}}$ ، $\overline{\text{هـ ء}}$

برهن أن: (١) $\overline{\text{ب جـ}}$ ⊥ المستوي أ ء هـ .

(٢) المستوى ب جـ ء ⊥ المستوي أ ء هـ .

(٣) وإذا رسم $\overline{\text{أ ن}}$ ⊥ $\overline{\text{ء هـ}}$ أن هو $\overline{\text{أ ن}}$ ارتفاع الهرم ثم أوجد ق (أ – $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ – ء)

الحـــــل



∵ Δ أ ب جـ متساوى الساقين ، هـ فى منتصف ب جـ

∴ $\overline{\text{أ هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{ء هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ $\overline{\text{ب جـ}}$ ⊥ كلا من $\overline{\text{أ هـ}}$ ، $\overline{\text{ء هـ}}$

∴ مستواهما ⊥ المستوى أ هـ ء

∴ المستوى ب جـ ء ⊥ المستوى أ هـ ء

∴ $\overline{\text{ب جـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ن}}$

∴ $\overline{\text{أن}}$ ⊥ $\overline{\text{ءهـ}}$

∴ $\overline{\text{أن}}$ ⊥ كلا من $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{ء هـ}}$

∴ $\overline{\text{أن}}$ ⊥ المستوى ب جـ ء

∴ $\overline{\text{أن}}$ هو ارتفاع الهرم .

∵ $\overline{\text{أهـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{ءهـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ ق (أ – $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ – ء) الزوجية = ق (< أ هـ ء) المستوية

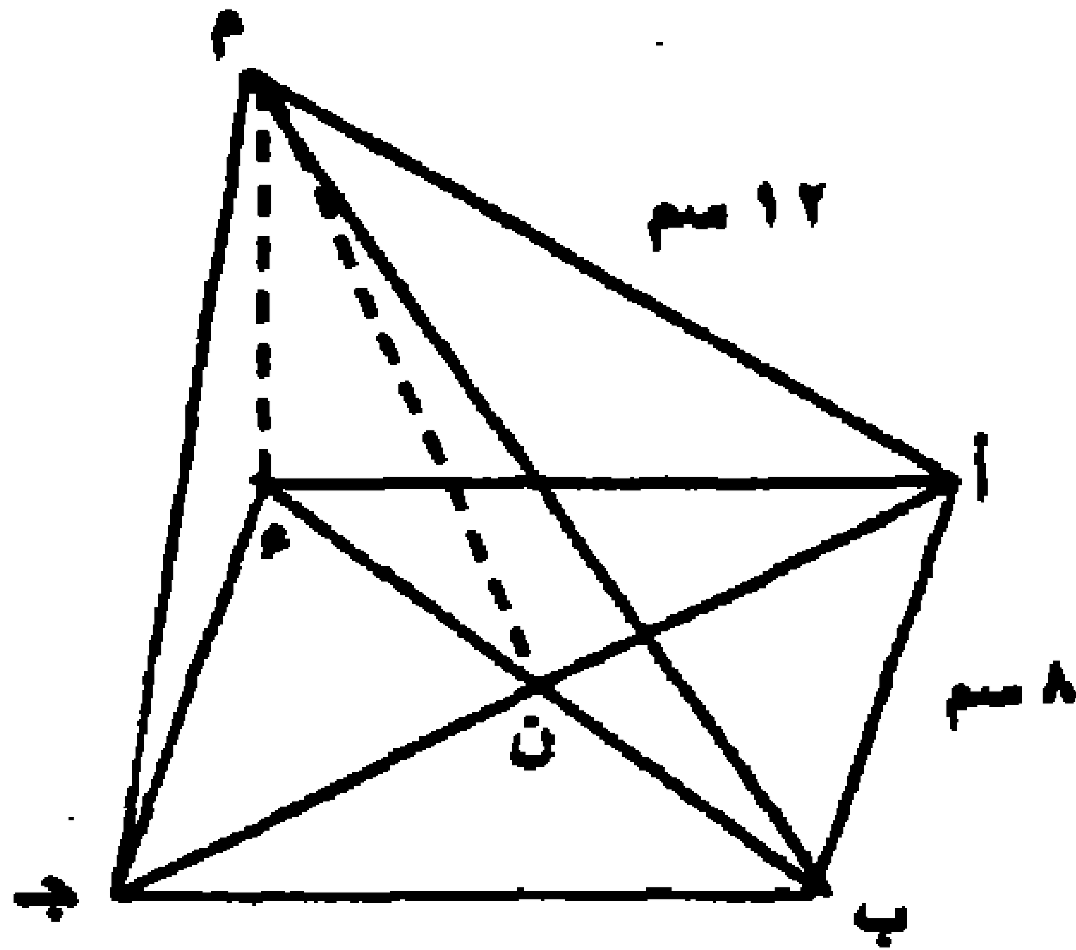
∵ جتا أ هـ ء = $\frac{\text{ن هـ}}{\text{أ هـ}}$ = $\frac{\frac{1}{3} \times 3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}$ = $\frac{1}{3}$

∴ ق (< أ هـ ن) = ...

مثال : م أ ب جـ ء هرم رباعي قائم طول حرفه الجانبي ١٢ سم و طول ضلع قاعدته ٨ سم ـ أوجد قياس زاوية ميل الحرف $\overline{\text{م أ}}$ علي المستوى أ ب جـ ء .

الحـــــــل

زاوية ميل الحرف $\overline{\text{م أ}}$ علي المستوى أ ب جـ ء هي المحصورة بينه وبين مسقطه علي المستوى هي زاوية (< م أ ن)



∵ أ ب جـ ء مربع طول ضلعه ٨ سم

∴ طول قطره $8\sqrt{2}$

∴ أ ن = $4\sqrt{2}$

في Δ م أ ن قائم الزاوية في ن (لماذا) ؟

∴ جتا (< م أ ن) = $\frac{4\sqrt{2}}{12}$ = $\frac{\sqrt{2}}{3}$

∴ ق (< م أ ن) = ٦١° ٥٢´

مثال: أ ب جـ ء مربع ضلعه ١٢ يم تقاطع قطراه في ن ، رسم $\overline{\text{ن م}}$ ⊥ المستوى أ ب جـ ء ، وكان م ن = ٦ سم ، هـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$.

(أولاً) أثبت أن المستوى م أ جـ ⊥ المستوى ب جـ ء

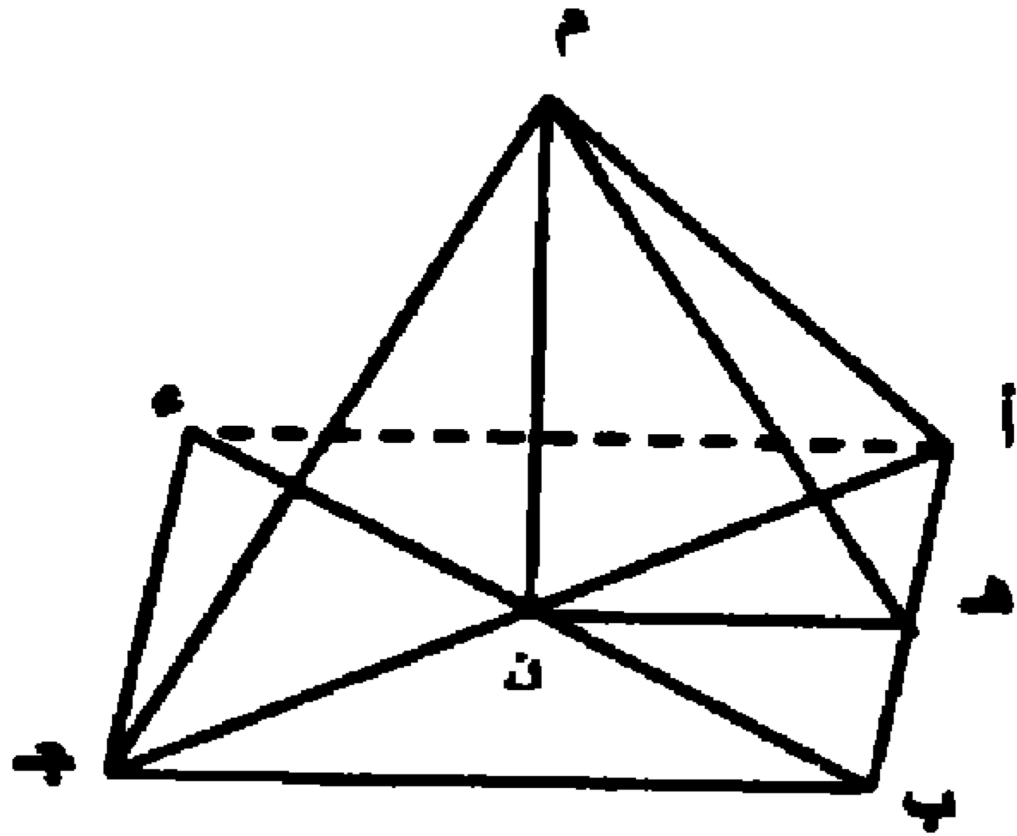
(ثانيا) أثبت أن المستوى $\overline{\text{أ ب}}$ ⊥ المستوى أ ب جـ ء

(ثالثا) أوجد قياس (م – $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ – ء)

الحـــــــل

(أولا) ∵ $\overline{\text{م ن}}$ ⊥ المستوى أ ب جـ ء ، $\overline{\text{م ن}}$ ⊂ في المستوى م أ جـ

∴ المستوى م أ جـ ⊥ المستوى أ ب جـ ء



(ثانيا) في Δ ن أ ب : ن أ = ن ب ، هـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

∴ $\overline{\text{ن هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ --- (١)

، ∵ $\overline{\text{م ن}}$ ⊥ المستوى أ ب جـ ء

∴ $\overline{\text{م ن}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ ---- (٢)

من (١) ، (٢)

∴ $\overline{\text{أ ب}}$ ⊥ كل من $\overline{\text{هـ ن}}$ ، $\overline{\text{م ن}}$

∴ $\overline{\text{أ ب}}$ ⊥ المستوى م ن هـ

(ثالثا) ∵ $\overline{\text{ن هـ}}$ هو مسقط المائل $\overline{\text{م هـ}}$ ، $\overline{\text{ن هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$

∴ $\overline{\text{م هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$

∴ ∠ م هـ ن هي زاوية مستوية للزاوية الزوجية (م – $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ – ء)

في Δ أ ب جـ : ·

∴ هـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، ن منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$

∴ هـ ن = $\frac{١}{٢}$ ب جـ = ٦ سم

∴ ظا (∠ م هـ ن) = $\frac{\text{ن م}}{\text{هـ ن}}$ = $\frac{٦}{٦}$ = ١

∴ ق (∠ م هـ ن) = ٤٥° ∴ (م – $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ – ء) = ٤٥°

مثال:

(أولا) أ ب جـ ء مربع طول ضلعه ٨ سم – رسمت أ م عمودية على مستوى المربع حيث أ م = ٨ $\sqrt{٣}$ سم .

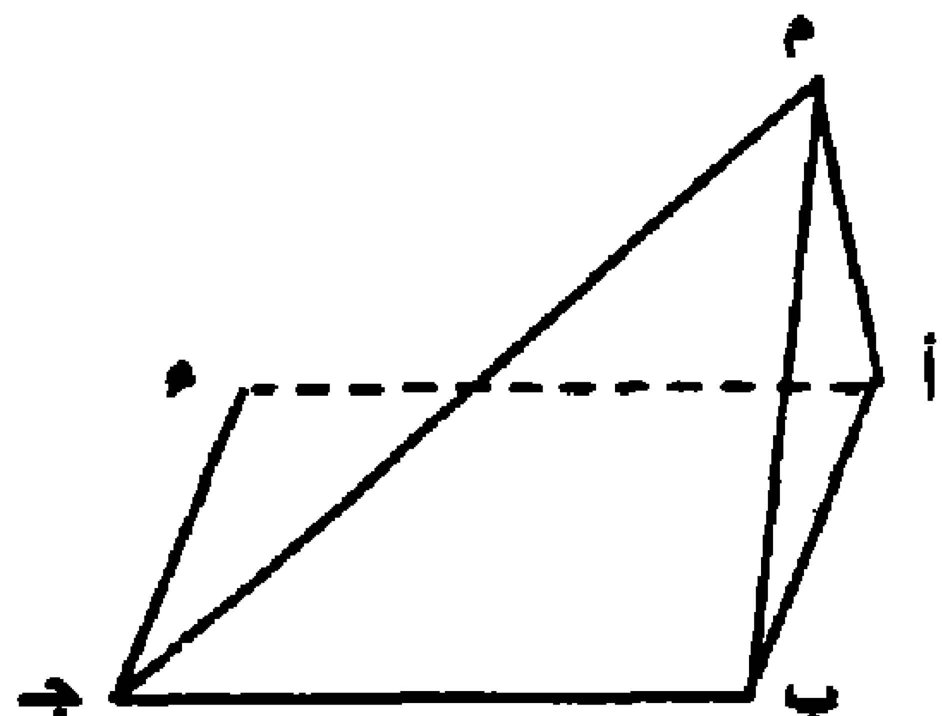
[أ] أثبت أن : $\overline{\text{م ب}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$

[ب] احسب قياس الزاوية الزوجية بين المستويين م ب جـ ، أ ب جـ ء

(ثانياً) م س ص ع هرم ثلاثي فيه س ص = س ع ، م ص = م ع ، ن منتصف $\overline{ص ع}$ - اثبت أن:

المستوى م ن س ⊥ س ص ع

الحـــــــل



(أولاً)

[أ] ∵ $\overline{م أ}$ ⊥ المستوى أ ب جـ ء

∵ $\overline{أ ب}$ هو مسقط المائل $\overline{م ب}$ علي هذا المستوى

، ∵ $\overline{أ ب}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$

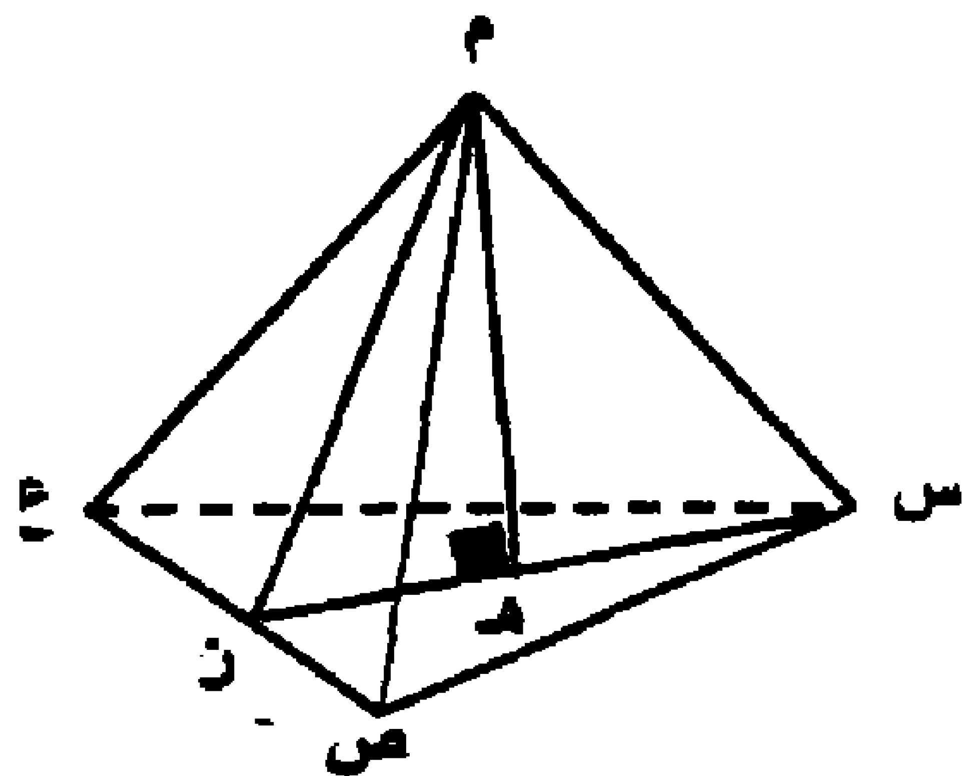
∴ $\overline{م ب}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$

[ب] ∴ < م ب أ هي زاوية مستوية للزاوية الزوجية (م - $\overleftrightarrow{ب جـ}$ - أ)

∴ طا (< م ب أ) = $\frac{أ م}{أ ب}$ = $\frac{٨\sqrt{٣}}{٨}$ = $\sqrt{٣}$

∴ ق (< م ب أ) = ٦٠° ∴ (م – $\overleftrightarrow{ب جـ}$ - أ) = ٦٠°

(ثانياً)



في Δ س ص ع

∵ $\overline{س ص}$ = $\overline{س ع}$ ، ن منتصف $\overline{ص ع}$

$\overline{س ن}$ ⊥ $\overline{ص ع}$ ---- (١)

في Δ م ص ع :

∴ $\overline{م ص}$ = $\overline{م ع}$ ، ن منتصف $\overline{ص ع}$

∴ $\overline{م ن}$ ⊥ $\overline{ص ع}$ ---- (٢)

من (١) ، (٢) ∵ $\overline{ص ع}$ ⊥ كل من $\overline{س ن}$ ، $\overline{م ن}$

∴ $\overline{ص ع}$ ⊥ المستوى م س ن ، ∵ $\overline{م هـ}$ ⊂ في المستوى م س ن

، $\overline{ص ع}$ ⊥ $\overline{م هـ}$ ---- (٣) ، $\overline{س ن}$ ⊥ $\overline{م هـ}$ ---- (٤)

من (٣) ، (٤) ∴ $\overline{م هـ}$ ⊥ كل من $\overline{ص ع}$ ، $\overline{س ن}$

∴ $\overline{م هـ}$ ⊥ المستوى س ص ع ∴ المستوى م س ن ⊥ المستوى س ص ع

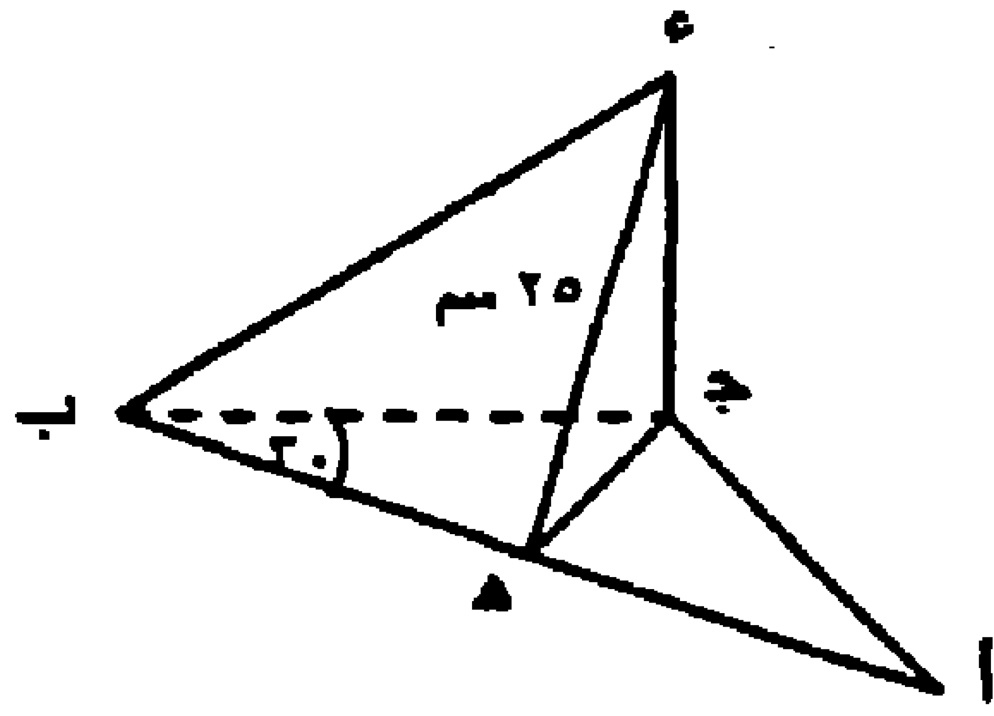
مثال:

(أولاً) أ ب جـ مثلث فيه ق (< ب) = ٣٠° ، ب جـ = ١٤ سم. رسم $\overline{جـ ء}$ ⊥ المستوى أ ب جـ

، ثم رسم رسم $\overline{ء هـ}$ ⊥ $\overline{أ ب}$ فقطعها في النقطة هـ . فإذا كان ء هـ = ٢٥ سم . فأوجد :

[أ] طول $\overline{جـ ء}$. [ب] ظل زاوية ميل $\overleftrightarrow{ب ء}$ علي المستوى جـ ء هـ

الحـــــل



[أ] ∵ $\overline{جـ ء}$ ⊥ المستوى أ ب جـ

∵ $\overline{جـ هـ}$ هو مسقط المائل ء هـ علي المستوى أ ب جـ

، ∵ $\overline{ء هـ}$ ⊥ $\overline{أ ب}$

∴ $\overline{جـ هـ}$ ⊥ $\overline{أ ن}$

في Δ ب هـ جـ ∵ ق (< هـ) = ٩٠°

∴ جـ هـ = ب جـ جا ٣٠° = ٧ سم

فى Δ ء جـ هـ ∵ ق (< جـ) = ٩٠°

∴ (جـ ء)^{٢} = (ء هـ)^{٢} – (جـ هـ)^{٢} = (٢٥)^{٢} – (٧)^{٢} = ٥٧٦

∴ جـ ء = $\sqrt{٥٧٦}$ = ٢٤ سم

[ب] ∵ $\overline{ب هـ}$ ⊥ المستوى جـ ء هـ ، $\overline{ء هـ}$ هو مسقط المائل $\overline{ء ب}$ علي المستوى جـ ء هـ .

∴ (< ب ء هـ)هي زاوية ميل $\overline{ء ب}$ علي المستوى جـ ء هـ .

في Δ جـ هـ ب ∴ ق (< هـ) = ٩٠°

∴ ب هـ = ب جـ جتا ٣٠° = $٧\sqrt{٣}$ سم

طا (< ب ء هـ) = $\frac{ب هـ}{ء هـ}$ = $\frac{٧\sqrt{٣}}{٢٥}$

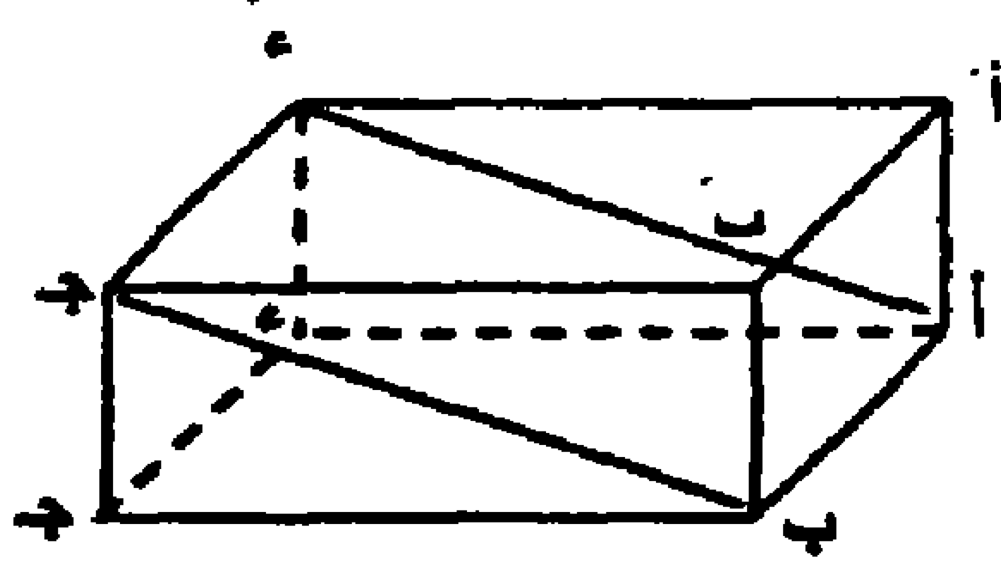
(ثانيا) أ ب جـ ء أَ بَ جَ ءَ متوازي مستطيلات، فيه أ ب= ١٠سم، ب جـ= ٢٠ سم ، ب بَ= ١٥ سم.

[أ] اثبت أن الشكل أ ب جَ ءَ مستطيل ، واحسب مساحة سطحه .

[ب] احسب قياس الزاوية الزوجية بين المستوى أ ب جَ ءَ والمستوى أ ب جـ ء .

الحـــــل

[أ] $\overline{أ ب}$ ⊥ المستوى ب جـ جَ بَ ، $\overline{ب جَ}$ ⊂ المستوى ب جـ جَ بَ



∴ $\overline{أب} \perp \overline{بجـ}$ ---- (١)

، $\overline{أب} // \overline{ءجـ}$ ويساويه ---- (٢)

من (١) ، (٢) ∴ الشكل أ ب جـَ ءَ مستطيل

، في Δ ب جـ جـَ ∵ ق (< حـ) = ٩٠°

$(ب جـَ)^٢ = (ب جـ)^٢ + (جـ جـَ)^٢ = (٢٠)^٢ + (١٥)^٢ = ٦٢٥$

∴ ب جـَ = $\sqrt{٦٢٥}$ = ٢٥ سم

مساحة المستطيل أ ب جـَ ءَ = أ ب × ب جـَ = ١٠ × ٢٥ = ٢٥٠ سم^٢

[ب] ∵ $\overline{جـَب}$ ، $\overline{جـب} \perp \overline{أب}$

∴ جـَ ب جـ هي زاوية مستوية للزاوية الزوجية (جـَ – $\overleftrightarrow{أب}$ – جـ)

ظا (< جـَ ب جـ) = $\frac{جـ جـَ}{جـ ب} = \frac{١٥}{٢٠} = \frac{٣}{٤}$

∴ ق (جـَ – $\overleftrightarrow{أب}$ – جـ) = ٣٦ ً ٥٢ َ °

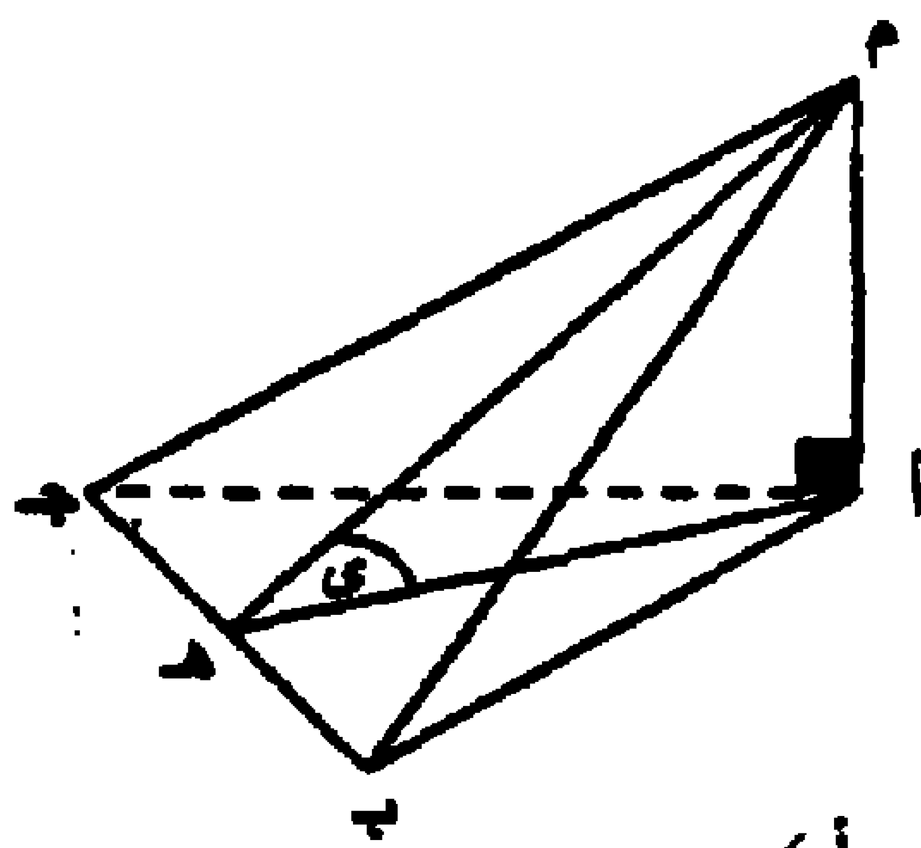
مثال: م أ ب جـ هرم ثلاثي فيه أ ب جـ مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ٤٠ سم ، أ م ⊥ المستوى أ ب جـ ، أ م = $٢٠\sqrt{٣}$ سم ، هـ منتصف $\overline{جـب}$.

(أولاً) أثبت أن المستوى م أ هـ ⊥ المستوى أ ب جـ . (ثانياً) احسب قياس (< م – $\overleftrightarrow{بجـ}$ – أ)

الحـــــل

(أولاً) $\overline{مأ}$ ⊥ المستوى أ ب جـ ، $\overline{مأ}$ ⊂ المستوى م أ هـ

∴ المستوى م أ هـ ⊥ المستوى أ ب جـ



(ثانياً) ∵ Δ أ ب جـ متساوى الأضلاع ، هـ منتصف $\overline{بجـ}$

∴ $\overline{أهـ} \perp \overline{بجـ}$ ---- (١)

، ∵ $\overline{أهـ}$ هو مسقط المائل $\overline{مهـ}$ على المستوى أ ب جـ

∴ $\overline{مهـ} \perp \overline{بجـ}$ --- (٢) من (١) ، (٢)

∴ < أ هـ م هى زاوية مستوية للزاوية الزوجية (< م – $\overleftrightarrow{بجـ}$ – أ)

، ∵ أ هـ = أ ب جـا ٦٠° ∴ أ هـ = $٢٠\sqrt{٣}$ سم

∴ ظا ى = $\frac{٢٠\sqrt{٣}}{٢٠\sqrt{٣}} = ١$ ∴ ى = ٤٥°

مثال: أ ب جـ مثلث فيه ق(< أ) = ٦٠° و أ ب = سم . رسم ب ن ⊥ أ جـ ويقطعها في ن ، ب هـ ⊥ المستوى أ ب جـ ، وكان ب هـ = سم .

(أولاً) أثبت أن : ن هـ ⊥ أ جـ (ثانيا) أوجد ق(ب – أ جـ – هـ)

الحـــــل

(أولاً) ∵ ب هـ ⊥ المستوى أ ب جـ ، ن ب هو مسقط

المائل ن هـ علي المستوى ب أ جـ

، ∵ ب ن ⊥ أ جـ ∴ هـ ن ⊥ أ جـ

(ثانيا) في Δ أ ن ب ∵ ق (< ن) = ٩٠°

∴ ن ب = أ ب جا ٦٠° = ٦ √٣ سم

، ∵ كلا من ن ب ، ن هـ ⊥ أ جـ

∴ < هـ ن ب هي زاوية مستوية للزاوية الزوجية (< ب – أ جـ – هـ)

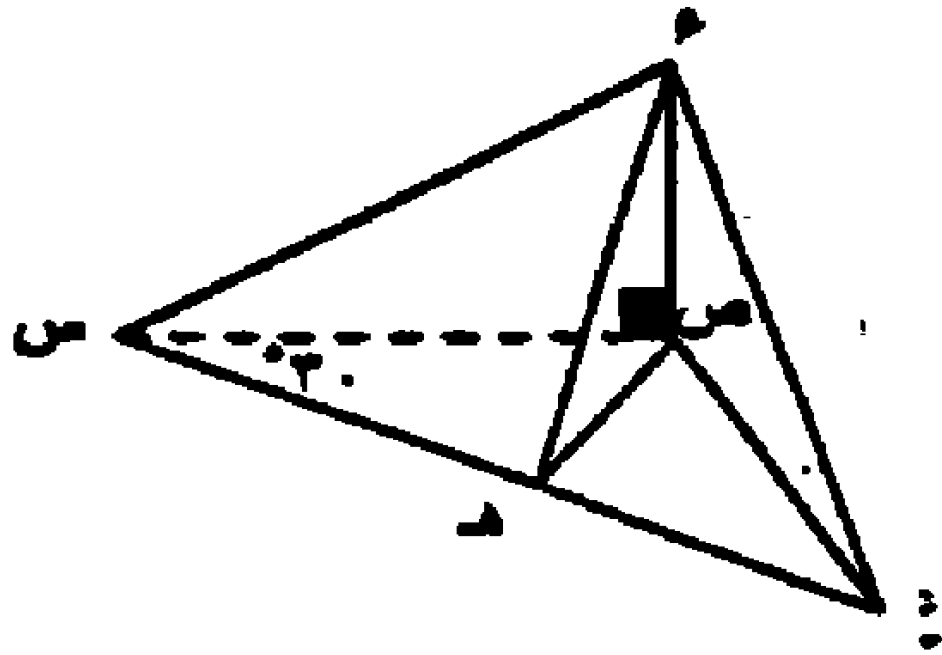
ظا (< هـ ن ب) = ب هـ / ن ب = ٦ / ٦ √٣ = ١ / √٣

∴ ق (< هـ ن ب) = ٣٠° ∴ ق(ب – أ جـ – هـ) = ٣٠°

مثال: س ص ع مثلث فيه ق(< س) = ٣٠° ، س ص = ٢٠ سم . ص ء ⊥ مستوى المثلث س ص ع بحيث ص ء = ١٠ √٣ سم . رسمت ص هـ ⊥ س ع تقطعها في هـ . أثبت ن:

ء هـ ⊥ س ع ، ومن ذلك احسب قياس الزاوية الزوجية بين المستويين ء س ع ، س ص ع

الحـــــل



∵ ء ص ⊥ المستوى س ص ع

∴ ء ص ⊥ ص هـ

، ∵ ص هـ هو مسقط المائل ء هـ

، ص هـ ⊥ س ع ∴ ء هـ ⊥ س ع

< ء هـ ص هي زاوية مستوية للزاوية الزوجية (ء – ع س – ص)

في Δ س هـ ص : ص هـ = س ص جا ٣٠° = ٢٠ × ١/٢ = ١٠ سم

في Δ ء هـ ص : ق (< ء ص هـ) = ٩٠°

$\therefore$ ظا (< ء هـ ص) = $\frac{\text{ص ء}}{\text{هـ ص}}$ = $\frac{10\sqrt{3}}{10}$ = $\sqrt{3}$

$\therefore$ ق (< ء هـ ص) = ٦٠° $\qquad$ $\therefore$ ق (< ء – $\overleftrightarrow{\text{ع س}}$ – ص) = ٦٠°

مثال:

(أولاً) أ ب ج ء هرم ثلاثي فيه أ ب ⊥ المستوى ب جـ ء ، ء ب = ١٠ سم ، أ ب = ٥ سم ، ق (< ب ء جـ) = ٣٠° . رسم أ هـ ⊥ جـ ء قطعها في النقطة هـ . أوجد :

[أ] طول ب هـ $\qquad$ [ب] قياس الزاوية بين أ هـ والمستوى ب جـ ء

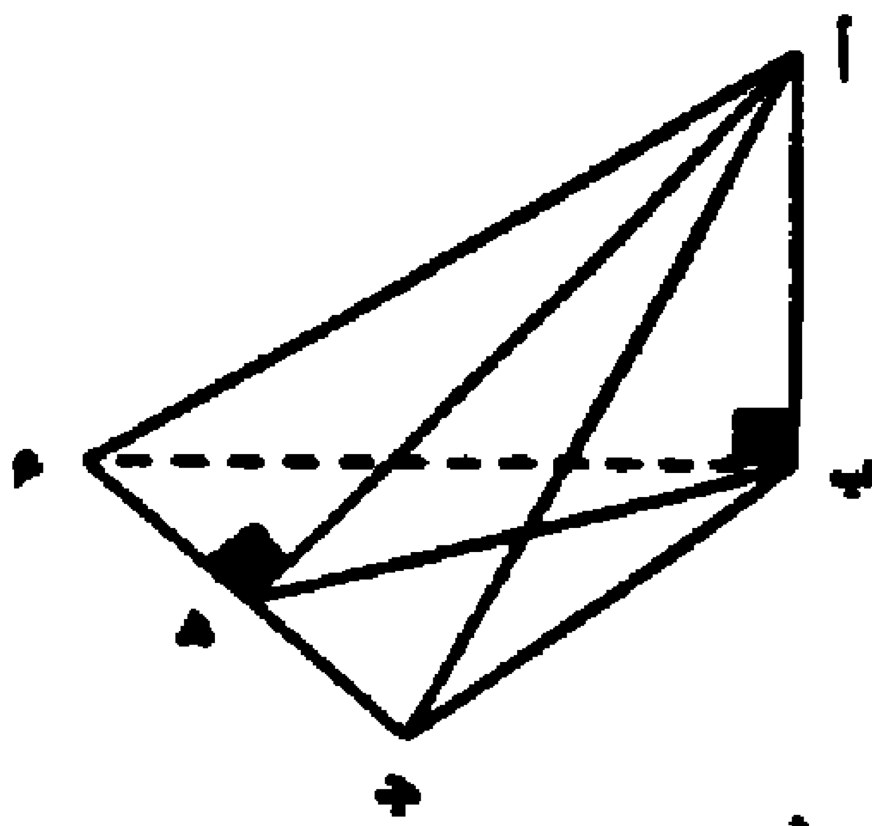
(ثانيا) أ ب جـ ء مربع رسمت أم عمودية علي كل من أ ب ، أ ء . اثبت أن :

[أ] ء جـ ⊥ المستوى أ م ء $\qquad$ [ب] المستويان م أ ب ، م أ ء متعامدان

[ج] إذا كان أ م = أ ء ، فأوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين م ء جـ ، أ ب جـ ء

الحــــــل

(أولاً)



[أ] $\because$ $\overline{\text{ب هـ}}$ هو مسقط المائل أ هـ علي المستوى ب جـ ء

، $\because$ $\overline{\text{أ هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{جـ ء}}$

$\therefore$ $\overline{\text{ب هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{جـ ء}}$

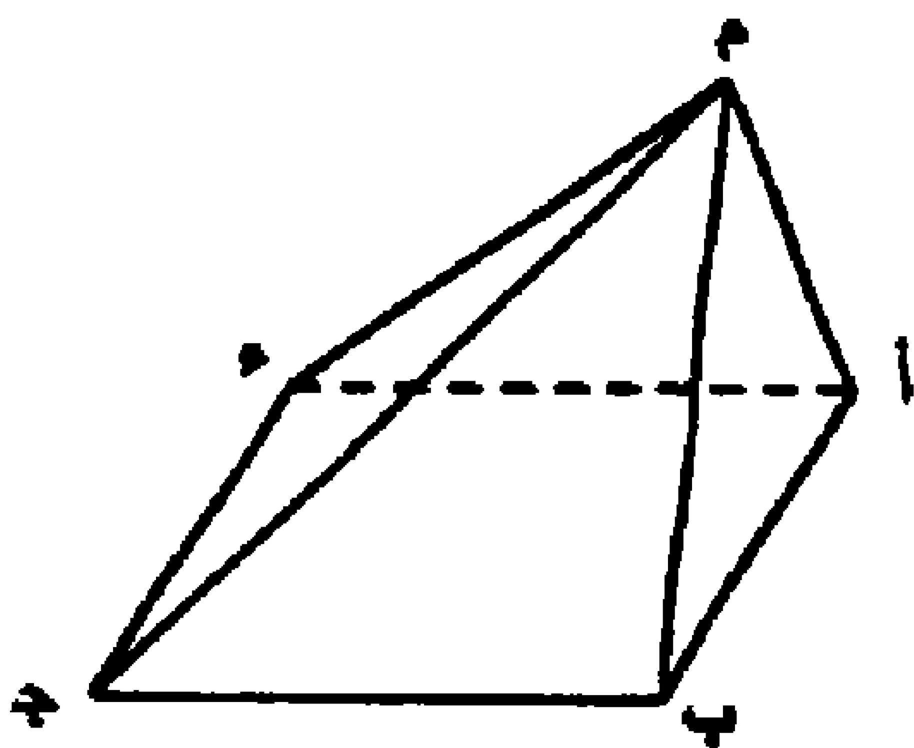
في Δ ب ء هـ: $\because$ ب هـ = ب ء جا ٣٠° = ٥ سم

[ب] < أ هـ ب هي زاوية ميل $\overline{\text{أ هـ}}$ علي المستوى ب جـ ء

في Δ أ ب هـ: $\because$ ظا (< أ هـ ب) = $\frac{\text{ص ء}}{\text{هـ ص}}$ = $\frac{5}{5}$ = ١

ق (أ هـ ب) = ٤٥°

(ثانيا)



[أ] $\because$ $\overline{\text{أ م}}$ ⊥ كل من $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ ء}}$

$\therefore$ $\overline{\text{أ م}}$ ⊥ المستوى أ ب جـ ء

، $\because$ $\overline{\text{جـ ء}}$ محتوى في المستوى أ ب جـ ء

$\therefore$ $\overline{\text{م أ}}$ ⊥ $\overline{\text{جـ ء}}$ $\qquad$ —— (١)

، ∵ $\overline{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{جـ ء}}$ ---- (٢)

من (١) ، (٢) ∵ $\overline{\text{جـ ء}}$ ⊥ كل $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{م أ}}$

$\overline{\text{جـ ء}}$ ⊥ المستوى أ م ء

[ب] ∵ $\overline{\text{أ ب}} \parallel \overline{\text{ء جـ}}$ ، $\overline{\text{أ ب}}$ ⊥ المستوى أ م ء

، ∵ $\overline{\text{أ ب}}$ ⊂ في المستوى أ م ب

∴ المستوى أ م ب ⊥ المستوى أ م ء

[جـ] ∵ $\overline{\text{جـ ء}}$ ⊥ المستوى أ م ء ∴ $\overline{\text{جـ ء}} \perp \overline{\text{م ء}}$

، $\overline{\text{جـ ء}} \perp \overline{\text{أ ء}}$

∴ < أ ء م هي زاوية مستوية للزاوية الزوجية (أ – $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ – م)

∴ ظا (< أ ء م) = $\frac{\text{أ م}}{\text{أ ء}}$ = ١ ∴ ق (< أ ء م) = ٤٥°

∴ ق (< أ – $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ – م) = ٤°

مثال:

[أ] أ ب جـ أَ بَ جَـ منشور مائل فيه الوجه ب جـ جَـ بَ مستطيل رسم الشعاع $\overleftarrow{\text{ب ء}}$ ⊥ $\overline{\text{أ أَ}}$ فقطعها في ء . أثبت أن $\overline{\text{أ أَ}}$ ⊥ المستوى ء ب جـ ، وإذا كان أ ب = ٥ سم ، ب ء = ٣ سم . أوجد قياس الزاوية بين $\overline{\text{أ ب}}$ و المستوى ء ب جـ .

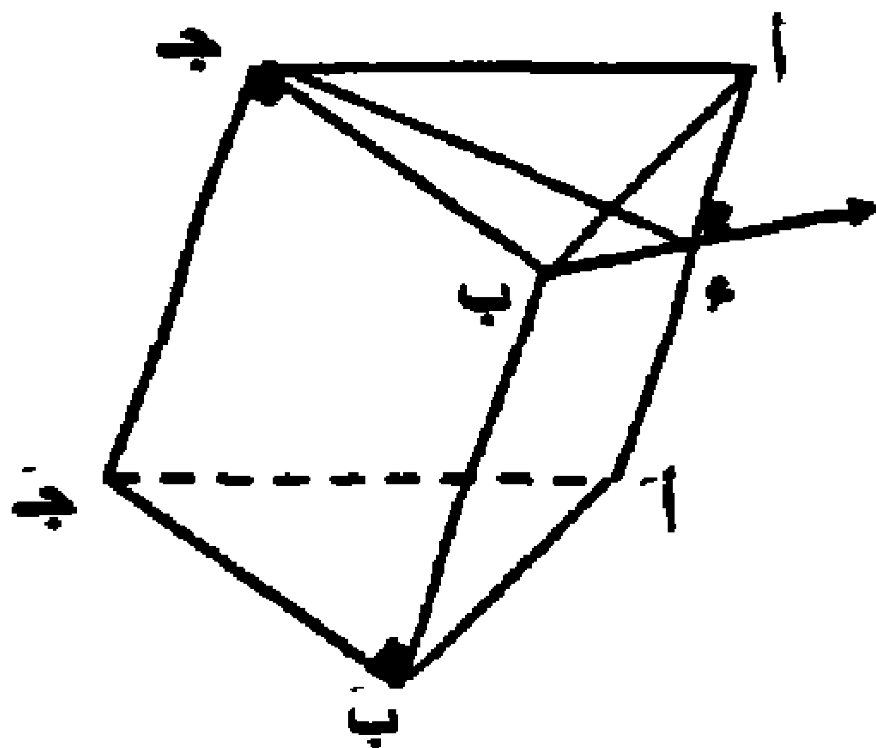
[ب] م أ ب جـ هرم ثلاثي رأسه م ، قاعدته المثلث المتساوى الأضلاع أ ب جـ الذي طول ضلعه ١٢سم ، ق(< م أ ب) = ق(< م أ جـ) = ٩٠° ، م أ = ٦ سم ، ء منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$.

(أولاً) أثبت أن : $\overline{\text{ب جـ}}$ ⊥ المستوى م أ ء .

(ثانيا) أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين م ب جـ ، أ ب جـ .

(ثالثا) أثبت أن : المستويين م أ ء ، م ب جـ متعامدان .

الحـــــــل



[أ] ∵ $\overline{\text{أ أَ}} \parallel \overline{\text{جـ جَـ}}$ ، $\overline{\text{جـ جَـ}} \perp \overline{\text{جـ ب}}$

(اولا) ∴ $\overline{\text{أ أَ}} \perp \overline{\text{جـ ب}}$ ، $\overline{\text{أ أَ}} \perp \overline{\text{ب ء}}$

، ∵ $\overline{\text{أ أَ}}$ ⊥ كل من $\overline{\text{جـ ب}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$

∴ $\overline{\text{أ أَ}}$ ⊥ المستوى ء ب جـ

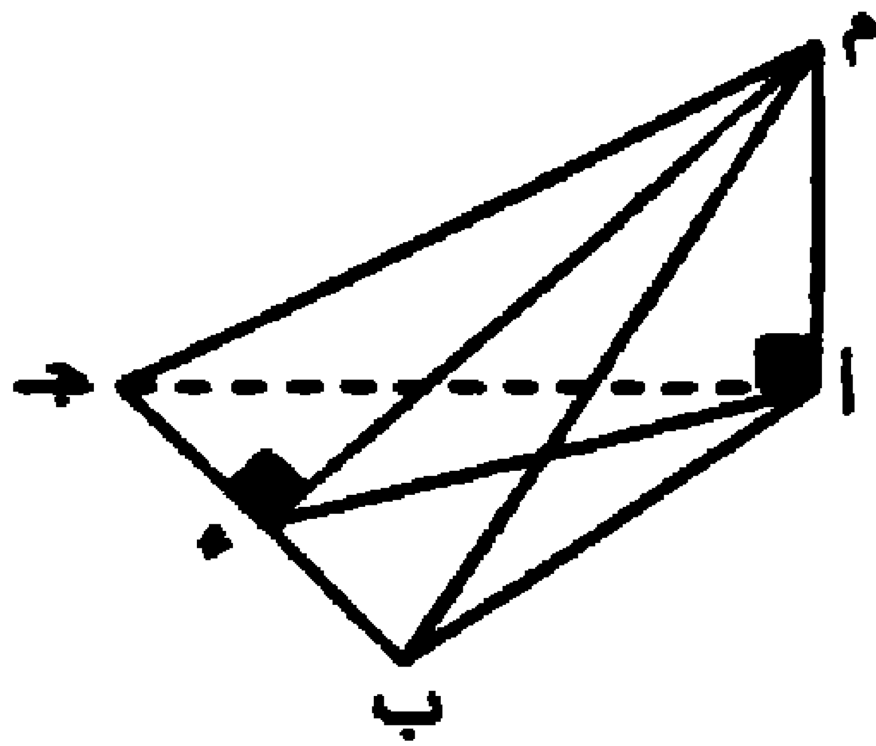
∵ $\overline{ب ء}$ هو مسقط المائل $\overline{أ ب}$ على المستوى ب ء جـ

∴ < أ ب ء هي زاوية ميل $\overline{أ ب}$ على المستوى ء ب جـ

جتا (< أ ب ء) = $\frac{ب ء}{ب أ}$ = $\frac{٣}{٥}$

∴ ق (< أ ب ء) = ٨َ ٥٣ °

[ب]



(أولاً) ∵ $\overline{م أ}$ ⊥ $\overline{أ جـ}$ ، $\overline{م أ}$ ⊥ $\overline{أ ب}$

∴ $\overline{م أ}$ ⊥ المستوى ـــــ

∴ $\overline{م أ}$ ⊥ أى مستقيم في المستوى أ ب جـ

∴ $\overline{م أ}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ ---- (١)

، ∵ المثلث أ ب جـ متساوى الأضلاع

، ء منتصف $\overline{ب جـ}$ ∴ $\overline{أ ء}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ ---- (٢)

من (١) ، (٢) ∴ $\overline{ب جـ}$ ⊥ كل من $\overline{م أ}$ ، $\overline{أ ء}$

∴ $\overline{ب جـ}$ ⊥ المستوى أ م ء .

(ثانياً) ∵ $\overline{أ ء}$ هو مسقط المائل م ء على المستوى أ ب جـ

، $\overline{أ ء}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ ∴ $\overline{م ء}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$

< أ ء م هي زاوية مستوية للزاوية الزوجية (أ ــ $\overleftrightarrow{ب جـ}$ ـ م)

في Δ أ ء ب : أ ء = أ ب جا ٦٠ ° = ٦ $\sqrt{٣}$

، طا (< م ء أ) = $\frac{أ م}{ء أ}$ = $\frac{٦}{٦\sqrt{٣}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

∴ ق (< أ ء م) = ٦٠°

(ثالثاً) ∵ $\overline{ب جـ}$ ⊥ المستوى م ء أ ، $\overline{ب جـ}$ ⊂ في المستوى أ ب جـ

∴ المستوى م ب جـ ⊥ المستوى أ م ء

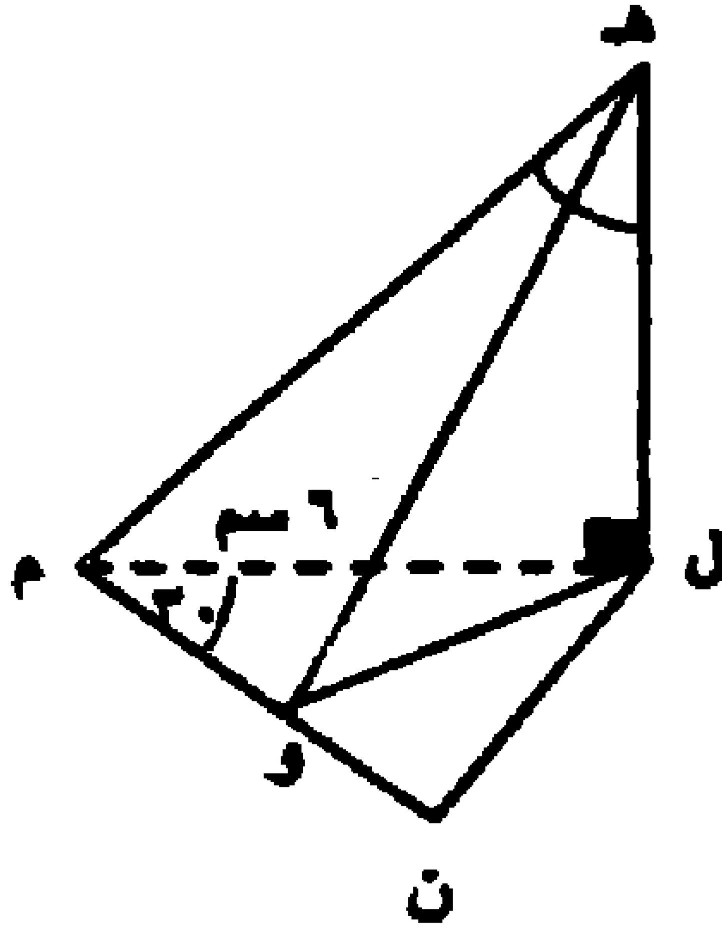
مثال:

[أ] ل م ن مثلث فيه ل م = ٦ سم ، ق (< ل م ن) = ٣٠° ، رسم ل و ⊥ م ن ويقطعها في و ، رسم ل هـ ⊥ المستوى ل م ن بحيث ق(< م هـ ل) = ٣٠° ، أوجد طول ل هـ ، وظل الزاوية بين هـ و والمستوى ل م ن .

[ب] أ ب جـ ء مربع طول ضلعه = ٨ سم تقاطع قطراه في هـ ، رسمت هـ م عمودية على المستوى أ ب جـ ء حيث هـ م = ٤ سم . أوجد قياس الزاوية الزوجية ق (< م – $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ – هـ) ، وإذا مر مستو بالضلع أ ب وقطع م ء في و ، وقطع م جـ في ل .

أثبت أن : الشكل أ ب ل و شبه منحرف .

الحـــــــل



[أ] ∵ ل هـ ⊥ المستوى ل م ن

∴ ل هـ ⊥ ل م

∵ Δ هـ ل م ثلاثيني ستيني

∴ ل هـ = ٦ $\sqrt{٣}$ سم .

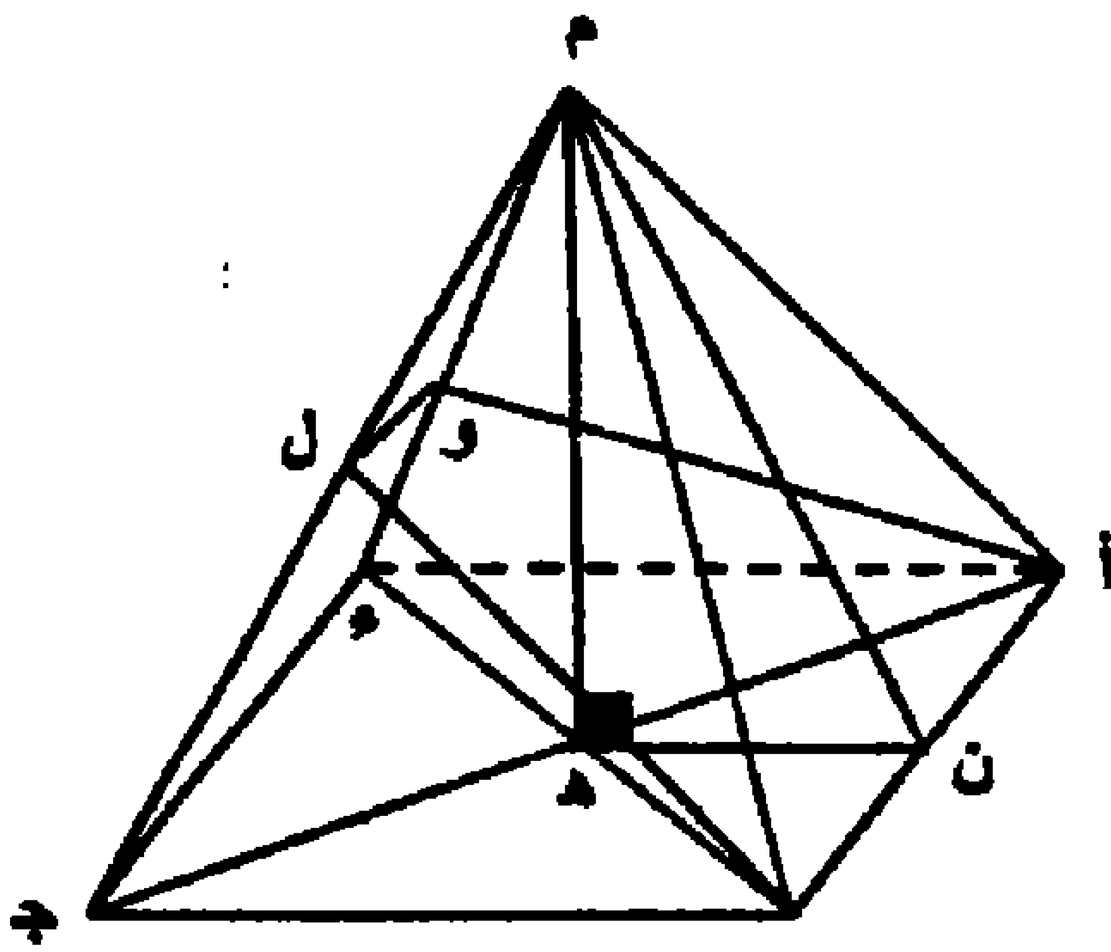
∵ ل و هو مسقط المائل هـ و

، ل و ⊥ ن م ∴ هـ و ⊥ ن م

Δ ل و م قائم الزاوية في و

، ق (< م) = ٣٠° ∴ ل و = $\frac{١}{٢}$ ل م = ٣ سم

∴ طا (< هـ و ل) = $\frac{\text{هـ ل}}{\text{ل و}}$ = $\frac{٦\sqrt{٣}}{٣}$ = ٢ $\sqrt{٣}$



[ب] نرسم هـ ن ⊥ أ ب ، ∵ هـ منتصف أ جـ

∴ ن منتصف أ ب

∵ ن هـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ = ٤ سم

ثم نرسم م ن فيكون م ن ⊥ أ ب

∴ (< م ن هـ) هي زاوية مستوية للزاوية الزوجية (< م – $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ – هـ)

∴ ظا (< م – $\overleftrightarrow{أ ب}$ – هـ) = $\frac{م هـ}{ن هـ}$ = $\frac{٤}{٤}$

∴ ق (< م – $\overleftrightarrow{أ ب}$ – هـ) = ٤٥°

∵ م جـ ، م ء يكونان مستويا يحتوي جـ ء ، أ ب // جـ ء

∴ أ ب // المستوي م جـ ء

، ∵ المستوى أ ب ل و يقطع المستوى م جـ ء في ل و

∴ أ ب // جـ ء —— (١)

، ∵ أ ب // جـ ء ∴ ل و // جـ ء

∴ Δ م ل و ≈ Δ م جـ ء

∴ $\frac{ل و}{جـ ء}$ = $\frac{م ل}{م جـ}$ ، ∵ م ل < م جـ ∴ ل و < جـ ء

، ∵ جـ ء = أ ب ∴ ل و < أ ب —— (٢)

من (١) ، (٢) ∴ الشكل أ ب ل و شبه منحرف

تمرين (٧)

(١) س ، ص مستويان متقاطعان في أ ب ، م نقطة لا تنتمي لأي منهما . رسم م جـ ، م ء عمودين عليهما ليقطعا س في جـ ، ص في ء ثم رسم جـ هـ ⊥ أ ب أثبت أن ء هـ ⊥ أ ب .

(٢) أ ب جـ قائم الزاوية في أ فيه أ ب = ٢ أ جـ ، رسم أ م عموديا علي مستوي المثلث ثم رسم العمود م هـ علي ب جـ فقطعه في ء – أثبت أن ب ء = ٤ ء جـ .

(٣) س ، ص مستويان متقاطعان في أ ب ، النقطة م ∈ أ ب ، م ن ⊂ ص ويصنع زاوية حادة مع أ ب ، رسم ن جـ ⊥ س ليقطعه في جـ كما رسم جـ ل ⊥ أ ب ليقطعه في ل – أثبت أن حا(< ن م حـ) = حا (< ن م ل × حا < ن ل حـ)

(٤) م س ، م ص محتويان في نفس المستوى ومتعامدان ، ط نقطة لا تنتمي إلي رسم ط ع عمودى على م س ويقطعه في ع ، ط ك ⊥ م ص ويقطعه فى ك كما رسم ط ى ⊥ المستوى م س ص ويقطعه فى ى – أثبت أن :

[١] م ك ى ع مربع [٢] ط م يميل بزاوية قياسها ٤٥° مع المستوى م س ص

(٥) س ، ص مستويان متقاطعان فى أ ب رسم المستوى ع يوازى أ ب ويقطع المستوى س في جـ ء ، المستوى ص في هـ ء – أثبت أن مجموع قياسات الزوايا الزوجية أ ب ، جـ ء ، هـ و = ١٨٠°

(٦) أ ب جـ أَ بَ جَ منشور ثلاثى قائم قاعدته مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ١٠ سم فإذا كان أ أَ = $١٠\sqrt{٣}$ سم – أوجد

[١] قياس زاوية ميل أَ جـ علي القاعدة .

[٢] ظل قياس الزاوية الزوجية (أ – جـ ب – أَ)

(٧) أ ب جـ ء مستطيل رسم عمودان جـ هـ ، ء و علي مستوى هذا المستطيل بحيث كان جـ ء = ١٥ سم ، و ب = $٢٠\sqrt{٣}$ سم ، و ب يميل علي القاعدة بزاوية قياسها ٣٠° – احسب مساحة سطح ∆ ب ء و ، ق(< ب – ء و – جـ)

(٨) أ ب جـ ء مستوى أفقي يقطع مستوى متوازى الأضلاع أ ب وهـ في $\overleftrightarrow{أب}$ وقياس الزاوية الزوجية بينهما = ٦٠° فإذا كان ق(< أ ب هـ) = ٣٠° ، وهـ = ٤٠ سم – احسب طول العمود هـ ن المرسوم من هـ علي المستوى أ ب جـ ء ليقطعه في ن .

(٩) م أ ب جـ هرم ثلاثي فيه م أ = ٨ سم ، م ب = ١٠ سم ، م جـ = ١٧ سم ، أ ب = ٦ سم ، أ جـ = ١٥ سم. أثبت أن المستوى أ ب جـ عمودياً علي كل من المستويين م أ ب ، م أ جـ

(١٠) أ ب قطر في دائرة ، رسم $\overline{أجـ}$ عموديا علي مستوى الدائرة فإذا كانت النقطة ء تنتمي إلي هذه الدائرة . أثبت أن المستوى جـ أ ء عمودي علي المستوى جـ ء ب .

(١١) مستوي المستطيل أ ب جـ د عمودي علي مستوي المستطيل أ ب هـ و و المستطيلان متطابقان. م منتصف أ و ، ن منتصف $\overline{ب هـ}$. اثبت ان جـ د م ن مستطيل و ان ظل الزاوية الزوجية بينه وبين المستطيل أ ب جـ د يساوي $\frac{١}{٢}$

(١٢) س،ص مستويان متقاطعان في $\overleftrightarrow{أب}$ و قياس الزاوية الزوجية بينهما ٦٠° و المربع أب جـ د محتوي في المستوي س ، هـ منتصف $\overline{جـ د}$ ، رسم $\overline{هـ و}$ ⊥ المستوي ص اثبت ان المستويين هـ و أ ، هـ و ب متعامدان .

(١٣) الشعاعان $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{أجـ}$ يميلان علي المستوي س بزاويتين قياسهما ٤٥° ، ٣٠° علي الترتيب ، رسم $\overleftrightarrow{أد}$ ⊥ المستوي س ليقطعه في د فإ ذا علم أن أجـ = ب جـ ، أثبت أن المستويين أ د ب ، أ د جـ متعمدان .

(١٤) أ ب جـ د هرم ثلاثي فيه كل المستويات أ ب جـ ، أ ب د عموديان علي المستوي ب جـ د اثبت أن : (أ جـ)^{٢}- (أ د)^{٢} = (جـ ب)^{٢}- (ب د)^{٢} .

(١٥) دائرة مركزها م رسم مماس لهذه الدائرة عند أ $\overline{و}$ كانت كل من ب ، جـ تنتمي إلي هذا المماس علي جانبي أ ثم رسم م ن عموديا علي مستوي الدائرة . اثبت أن :

[١] المستقيم $\overleftrightarrow{جـ أ}$ ⊥ المستوي ن أ م

[٢] المستوي م ن أ عمودي علي المستوي ن جـ ب .

ثالثا: التفاضل والتكامل

الباب الأول

النهايـــات

نهاية الدوال المعرفة بأكثر من قاعدة

لدراسة مفهوم النهايات ندرس المنحنى المعرف بالمعادلة ص = $\frac{س^{٢} - ١}{س - ١}$ نجد أن المقدار غير معرف عندما س = ١ ولمحاولة رسم هذا المنحنى نأخذ قيم تقترب من ١

جهة اليمين ←   → جهة اليسار

س	١,١	١,٠١	١,٠٠١	⇐	١	⇒	٠,٩٩٩	٠,٩٩	٠,٩
د(س)	٢,١	٢,٠١	٢,٠٠١	⇐	٢	⇒	١,٩٩٩	١,٩٩	١,٩

من الجدول نجد أن كلما تقترب س من العدد (١) أكثر وأكثر يقترب المقدار $\frac{س^{٢} - ١}{س - ١}$ من العدد (٢) أكثر وأكثر ويعبر عن ذلك جبرياً بالأتي :

نها $_{س \leftarrow ١}$ $\frac{س^{٢} - ١}{س - ١}$ = ٢ ويقرأ نهاية المقدار $\frac{س^{٢} - ١}{س - ١}$ عندما س تؤول إلى ١ هو ٢

ملاحظات :

١) نهاية دالة عند نقطة لا يعني قيمة الدالة عند هذه النقطة

مثلا : $د_{١}$ (س) = س + ٣ ، $د_{٢}$ (س) = $\frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣}$

$$د_{٢}(س) = \begin{cases} \frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣} & ، س \neq ٣ \\ ٧ & عندما\ س = ٣ \end{cases}$$

∴ نها $د_{١}$ (س) = نها $_{س \leftarrow ٣}$ (س + ٣) = ٦ ، $د_{١}$ (س) = ٣ + ٣ = ٦

نها $_{س \leftarrow ٣}$ $د_{٢}$ (س) = ٦ ، $د_{٢}$ (٣) = كمية غير معروفة

نها $_{س \leftarrow ٣}$ $د_{٣}$(س) = ٦ ، $د_{٣}$ (٣) = ٧

∴ نهاية $د_{٢}$ (س) ، $د_{٣}$ (س) عندما س ← ٣ لا تساوى $د_{٢}$ (٣) ، $د_{٣}$ (٣) .

٢) نهاية الدالة لها وجود عند نقطة ما إذا كان الاقتراب من اليمين واليسار يؤول إلي قيمة واحدة .

مثلا : د (س) = { س+ ٣ عندما س ≤ ٣ ، ٢س - ١ عندما س ≥ ٣ }

نلاحظ : كلما أقتربت س من العدد ٣ من جهة اليسار أقتربت الدالة من العدد ٥ وكلما أقتربت من العدد ٣ من جهة اليمين كلما أقتربت من العدد ٦ .

∴ كلما تقترب س حول العدد ٣ تقترب الدلة من قيمتين مختلفتين هما ٥، ٦

∴ نهاية الدالة عندما س تؤول إلي ٣ ليس لها وجود .

الخلاصة : إذا كان

د (س) = { ق(س) عندما س > ١ ، ق(س) عندما س < ١ }

فإن : نهاية الدالة التي علي يمين أ تكتب د (أ)$^{+}$ ∴ د(أ)$^{+}$ = نها $_{س \leftarrow أ}$ ق(س)

، نهاية الدالة التي علي يسار أ تكتب د(أ)$^{-}$ ∴ د(أ)$^{-}$ = نها $_{س \leftarrow أ}$ ك(س)

وإذا كان د(أ)$^{+}$ = د(أ)$^{-}$ = ل فإن الدالة لها نهاية عند س = أ

∴ نها $_{س \leftarrow أ}$ د(س) = ل

مثال: أبحث وجود نهاية د(س) = { س^{٢}-٢ عندما س< ٢ ، ٥س - ٤ عندما س >٢ } عندما س = ٢

الحـــــــل

النهاية اليمني د(٢) $^{+}$ = نها $_{س \leftarrow ٢}$ ٥ س- ٤ = ١٠ – ٤ = ٦

النهاية اليسري د (٢)$^{-}$ = نها $_{س \leftarrow ٢}$ س^{٢}-٢ = ٨ – ٢ = ٦

∴ د(٢)$^{+}$ = د (٢)$^{-}$ = ٦

∴ نها $_{س \leftarrow ٢}$ د(س) = ٦

مثال: إذا كان د (س) = $\begin{cases} \dfrac{س^2 + 2س - 2}{س^2 - 1} & \text{عندما س} < 2 \\ 2س - 1 & \text{عندما س} > 2 \end{cases}$ - أوجد نها $_{س \leftarrow 1}$ د(س)

الحـــــــل

د $(1)^+$ = نها $_{س \leftarrow 1}$ $\dfrac{س^2 + 2س - 2}{س^2 - 1}$ = نها $_{س \leftarrow 2}$ $\dfrac{(س-1)(س+2)}{(س-1)(س+1)}$

= نها $_{س \leftarrow 1}$ $\dfrac{(س + 3)}{(س + 1)} = \dfrac{4}{2} = 2$

، د $(1)^-$ = نها $_{س \leftarrow 1}$ 2 س – 1 = 3 - 1 = 2

∴ د $(1)^+$ = د $(1)^-$ = 2

مثال: إذا كان د (س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{حا } 4س}{س} & \text{عندما س} > 0 \\ 2 + \text{حتا}2س & \text{عندما س} < 0 \end{cases}$ - أوجد نها $_{س \leftarrow 0}$ د(س)

الحـــــــل

د $(0)^+$ = نها $_{س \leftarrow 0}$ $\dfrac{\text{حا } 4س}{س}$ = 4

د $(0)^-$ = نها $_{س \leftarrow 0}$ 2 +حتا 3 س = 3 + حتا0 = 3 + 1 = 4

د $(0)^+$ = د $(0)^-$ = 4

∴ نها $_{س \leftarrow 0}$ د(س) = 4

مثال: إذا كان د (س) = $\begin{cases} س^2 + 1 & -1 < س < 2 \\ 2س - 1 & 2 \le س < 5 \\ س + 4 & 5 \le س < 2 \end{cases}$

أبحث وجود: 1) نها $_{س \leftarrow -1}$ د(س) 2) نها $_{س \leftarrow 2}$ د(س)

3) نها $_{س \leftarrow 5}$ د(س) 4) نها $_{س \leftarrow 7}$ د(س)

الحـــــــل

(1) نها $_{س \leftarrow -1}$ د(س) = نها س ^{2} + 1 = 1 +1 = 2

(2) د$(2)^+$ = نها $_{س \leftarrow 2}$ -1 = 6-1 = 5

د (٢)⁻ = نها س ← ٢ س² + ١ = ٤ + ١ = ٥

∴ د (٢)⁺ = د (٢)⁻ = ٥ ∴ نها س ← ٢ د(س) = ٥

(٣) د(٥)⁺ = نها س ← ٥ س + ٤ = ٥ + ٤ = ٩

د(٥)⁻ = نها س ← ٥ ٣س - ١ = ١٥ - ١ = ١٤

∵ د (٥)⁺ ≠ د(٥)⁻

∴ نها س ← ٥ د(س) ليس لها وجود

(٤) نها س ← ٧ د(س) = نها س ← ٧ س + ٤ = ٧ + ٤ = ١١

مثال: إذا كان د(س) = { (٩س - جا٥س) / س عندما س < ٠ ، ٣ + جتا٢س عندما س > ٠ } عند س = ٠

الحـــــل

د(٠)⁻ = نها س ← ٠ (٩س / س) - ٥ نها س ← ٠ (جا ٥ س / ٥ س) = ٩ - ٥×١ = ٤

د(٠)⁺ = نها ٣ + جتا ٢س = ٣ + ١ = ٤ = د(٠)⁻

∴ نها س ← ٠ د(س) = ٤

مثال : د(س) = { ٣ - ٢جاس عندما س < ط/٢ ، جتا س / (ط/٢ - س) عندما س > ط/٢ } عند س = ط/٢

الحـــــل

د(ط/٢)⁻ = نها س ← ط/٢ ٣ - ٢ جا س = ٣ - ٢ × ١

، د(ط/٢)⁺ = نها س ← ط/٢ جا(ط/٢ - س) / (ط/٢ - س) = ١ = د(ط/٢)⁻

∴ نها س ← ط/٢ د(س) = ١

تمرين (١)

(١) إذا كان: د(س) = { س+٢ عندما س< ١ ، ٣ عندما س > ١ } فأوجد نها $_{س \leftarrow ١}$ د(س)

(٢) إذا كان: د(س) = { س^{٢}+٢ عندما س< -٢ ، ٢س+ ٣ عندما س > -٢ } فأوجد نها $_{س \leftarrow -٢}$ د(س)

(٣) إذا كان: د(س) = { ٤س-١ عندما س> ١ ، ٣ عندما س < ١ } فأوجد نها $_{س \leftarrow ١}$ د(س)

(٤) إذا كان: د(س) = { س^{٢}-٣ عندما س ≥ ٢ ، ٣ عندما س > ٢ } فأوجد نها $_{س \leftarrow ٢}$ د(س)

(٥) إذا كان: د(س) = { ٤س-١ عندما س ≠ ١ ، ٣ عندما س = ١ }

(٦) إذا كان: د(س) = { -١ س < صفر ، صفر س= ٠ ، ١ س > ٠ }

(٧) ناقش نهاية الدالة الحقيقية عند أي نقطة في نطاقها

د(س) = {
س^{٢} -١ ≥ س ≥ ٢
٢س+١ ٢> س < ٣
٣ س = ٣
٧ ٣> س> ٥
١٢-س ٥ ≥ س ≥ ٧
}

(٨) إذا كان : د(س) = $\frac{\text{حا(س - ٣)}^{٢}}{|\text{س - ٣}|}$ عند س =٣

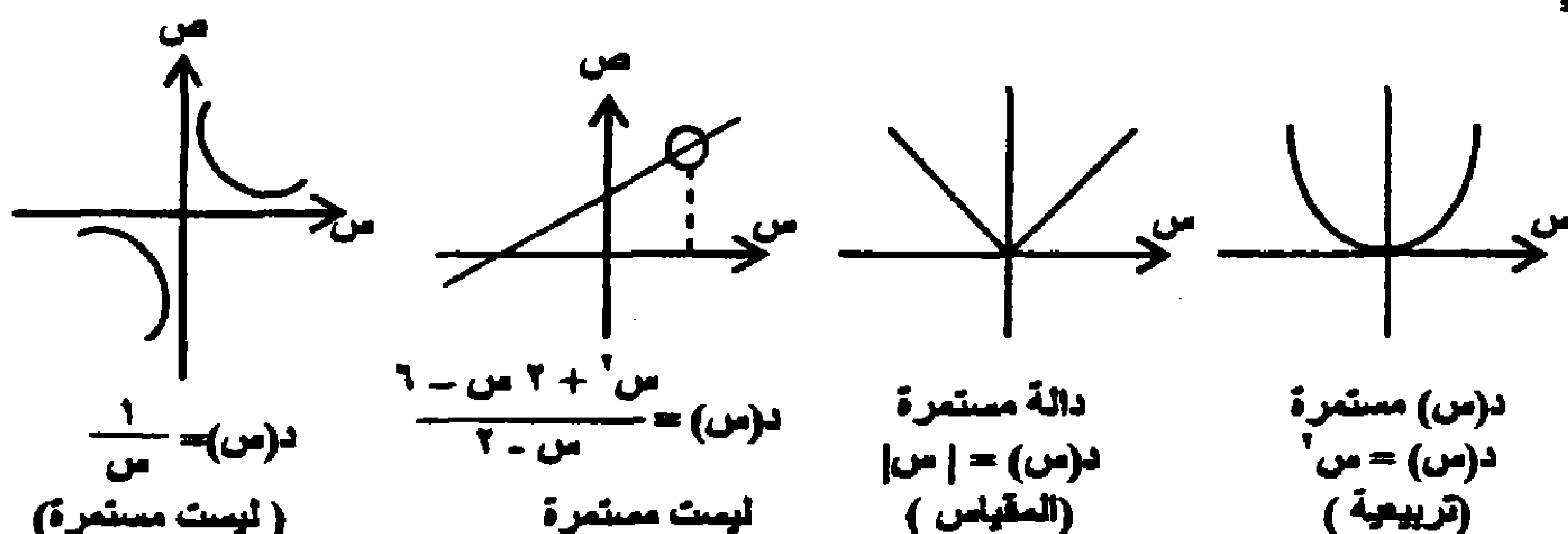
(٩) إذا كان : د(س) = { $\frac{\text{طاس- ٥ س}}{\text{٣س+ حا س}}$ عندما س<٠ ، ٣س- ١ عندما س>٠ } عند س = ٠

(١٠) إذا كان : د(س) = { ٥- ٢س عندما -١< س< ٢ ، $\frac{١٣}{\text{٣س - ٧}}$ عندما ٢ ≥ س ≥ ٥ }

الدوال المتصلة (المستمرة)

الدوال المستمرة أو المتصلة : هي التي شكلها البياني ليس به قفزات أو فراغات.

مثلاً:



مثال توضيحي :

إذا كانت د(س) = $س^3 - ٣س^2 + ٥ س + ٤$ إبحث اتصال هذه الدالة عندما س = ٢

الحـــــــل

١- نوجد د(٢) = ٨ – ١٢ + ١٠ + ٤ = ١٠

٢- نوجد نهاس←٢ د(س) = $(٢)^3 - ٣ (٢)^2 + ٥ \times ٢ + ٤ = ١٠$

نلاحظ أن نهاس←٢ د(س) = د(٢)   ∴ الدالة المتصلة عند س = ٢

❖ شروط اتصال الدالة :

١- د(س) معرفة عند س = أ

بمعنى أن أ ∈ نطاق الدالة أو د (أ) لها وجود .

٢- د(س) لها نهاية محدودة عند س = أ

أي نهاس←أ$^+$ د(س) = نهاس←أ$^-$ د(س)

٣- نهاس←أ د(س) = د (أ)

❖ خطوات بحث استمرارية (اتصال) الدالة :-

١- نوجد د (أ) .

٢- نوجد النهاية اليمنى للدالة نهاس←أ$^+$ د(س) .

٣- نوجد النهاية اليسرى للدالة نهاس←أ$^-$ د(س)

إذا كانت نها$_{س \leftarrow أ^+}$ د(س) = نها$_{س \leftarrow أ^-}$ د(س) = د (أ)

فإن الدالة تكون متصلة عند س = أ

<u>مثال</u>: ابحث اتصال كل من الدوال الآتية عند النقطة المبينة:-

أ) د(س) = ١٥ عندما س = أ

ب) د(س) = س^٢ – ٣ س + ٥ عندما س = ١

ج) د(س) = جتا س عندما س = أ

د) د(س) = $\sqrt{س - ٢}$ عندما س = ١

الحـــــــــل

(أ) د(س) = ١٠ عند س = أ ∴ د (أ) = ١٠

∴ نها$_{س \leftarrow أ}$ د(س) = ١٠

∴ د (أ) = نها$_{س \leftarrow أ}$ د(س) = ١٠ ∴ الدالة متصلة.

(ب) د (س) = س^٢ – ٣ س + ٥ عند س = ١

د (١) = ١ – ٣ + ٥ = ٣

نها$_{س \leftarrow ١}$ د(س) = ١ – ٣ + ٥ = ٣

∴ د (١) = نها$_{س \leftarrow ١}$ د(س) = ٣ ∴ الدالة متصلة

(ج) د(س) = جتا س

د (أ) = جتا أ

، نها$_{س \leftarrow أ}$ د(س) = جتا أ

∴ د (أ) = نها$_{س \leftarrow أ}$ د(س) = جتا أ ∴ الدالة متصلة

(ء) د (س) = $\sqrt{س - ٣}$ عند س = ٥

د(٥) = $\sqrt{٥ - ٣}$ = $\sqrt{٢}$

، نها$_{س \leftarrow ٥}$ $\sqrt{س - ٣}$ = $\sqrt{٢}$

∴ د (أ) = نها$_{س \leftarrow ٥}$ د (س) = $\sqrt{٢}$ ∴ الدالة متصلة

❖ **<u>ملاحظة : من الدوال المتصلة</u> :-**

د(س) = $\sqrt{\text{س}}$ متصل لكل س ٠ ، د (س) = ظا س متصل لكل س - T + ن T ، س ن

متصل في ح ، المقادير التي تحتوى علي بسط ومقام يكون متصلاً في ح عدا عند أصفار المقام .

□ <u>متى تكون الدالة غير متصلة ؟</u>

(١) إذا كانت / ح فإن الدالة غير معرفة .

مثلا : د(س) = $\sqrt{\text{س} - ٥}$ عندما س = ٢

د (٢) = $\sqrt{٢ - ٥}$ = $\sqrt{-٣}$ / ح غير معرفة .

(٢) إذا كانت الدالة ليس لها نهاية عندما س = أ

مثلا : نهاس ٢ $\frac{٣}{\text{س} - ٢}$ = $\frac{٣}{٠}$ ليس لها وجود الدالة غير متصلة .

(٣) إذا كانت د (أ) نهاس أ د (س)

(٤) إذا كانت نهاس أ$^{+}$ د (س) نهاس أ$^{-}$ د (س)

(٥) إذا كان للدالة نهاية يمنى فقط أو يسرى فقط .

<u>مثال</u> : ناقش اتصال الدالة عند س = ٠ حيث د (س) = { س^{٢} + ٢ س ٠ ، ٥ س = ٠ }

الحـــــــل

نهاس ٠$^{+}$ د(س) = (٠)^{٢} + ٢ = ٢ ، نهاس ٠$^{-}$ د (س) = س$^{٢+٢}$ = ٠ + ٢ = ٢

ولكن د (٠) = ٥ من الفرض الدالة غير متصلة لأن نهاس ٠ د(س) د(٠)

<u>مثال</u> : ناقش اتصال الدالة عند س = -١ حيث د(س) = { س^{٢} + س +٢ س< -١ ، ٣ س }

الحـــــــل

نهاس -١$^{-}$ د (س) = نهاس -١$^{-}$ س^{٢} + س + ٢ = (-١)^{٢} + (-١) + ٢ = ٢

نهاس -١$^{+}$ د (س) = نهاس -١$^{+}$ ٣ س = ٣ × -١

نهاس أ$^{+}$ د(س) نهاس أ$^{-}$ د(س) الدالة ليست متصلة .

<u>مثال</u> : ابحث اتصال الدالة عند س = $\frac{١}{٢}$ د (س) = { - س + $\frac{٣}{٢}$ حيث س < $\frac{١}{٢}$ ، ٣ س $\frac{١}{٢}$ }

مثال : ابحث اتصال الدالة عند س = $\frac{1}{2}$ د (س) = { - س + $\frac{3}{2}$ حيث س < $\frac{1}{2}$ ، ٣ س س ≥ $\frac{1}{2}$ }

الحـــــل

$د_1(س) = - س + \frac{3}{2}$ | $د_2(س) = \frac{1}{س}$

$د_1(\frac{1}{2}) = - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$ | $د_2(\frac{1}{2}) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

$نها_{س \leftarrow \frac{1}{2}^-} د_1(س) = - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$ | $نها_{س \leftarrow \frac{1}{2}^+} د_2(س) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

∴ $نها_{س \leftarrow (\frac{1}{2})^-} د_1(س) \neq نها_{س \leftarrow (\frac{1}{2})^+} د_2(س)$

∴ الدالة ليست متصلة (مستمرة)

مثال: ابحث اتصال الدالة عند س = ٣ د (س) = { $\frac{2س^2 + س - 21}{س^2 - 9}$ س ≠ ٣ ، $\frac{13}{6}$ س = ٣ }

الحـــــل

$نها_{س \leftarrow 3} د(س) = \frac{2س^2 + س - 21}{س^2 - 9}$

$= \frac{(س-3)(2س+7)}{(س-3)(س+3)} = \frac{7+6}{3+3} = \frac{13}{6}$ ---- (١)

، ∵ د (٣) = $\frac{13}{6}$ ------ (٢)

∴ $نها_{س \leftarrow 3} د(س) \neq د(3)$ ∴ الدالة ليست مستمرة .

مثال: ابحث اتصال الدالة د (س) = { ٢س + $\frac{3}{2}$ عندما س ≤ ١ ، $\frac{3}{س-1}$ ١ < س < ٣ ، $س^2 - 5$ عندما س ≥ ٣ }

الحـــــل

عند س = ١ : $د_1(س) = 2س + \frac{3}{2}$

$د_1(1) = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{4}$

نها $د_1$(س) = نها $_{س \leftarrow (1)^-}$ ٢س + $\frac{٣}{٢}$ = $\frac{٧}{٤}$

نها $د_1$(س) = نها $_{س \leftarrow (1)^+}$ $\frac{٣}{س - ١}$ = $\frac{٣}{٠}$ = ∞

∴ لا يوجد للدالة نهاية عند س = $(١)^+$ ∴ الدالة غير مستمرة

عند س = ٣ $د_2$ (س) = $\frac{٣}{س - ١}$

$د_2$(٣) = $\frac{٣}{٣ - ١}$ = $\frac{٣}{٢}$

نها $_{س \leftarrow (٣)^-}$ $د_2$ (س) = $\frac{٣}{٣ - ١}$ = $\frac{٣}{٢}$ ، ∵ $د_3$ (س) = $س^٢$ – ٥

، نها $_{س \leftarrow (٣)^+}$ $د_3$ (س) = ٩ – ٥ = ٤

∴ نها $_{س \leftarrow (٣)^-}$ $د_2$ (س) ≠ نها $_{س \leftarrow (٣)^+}$ د (س) ∴ الدالة ليست مستمرة .

❖ كيفية إزالة عدم اتصال الدالة عند نقطة معينة :-

مثلاً : د(س) = $\frac{س^٢ - ٤}{س^٢ - ٥س + ٦}$ س ≠ ٢

١) نزيل العامل المسبب للصفر من البسط والمقام .

د(س) = $\frac{(س-٢)\ (س+٢)}{(س-٢)\ (س+٣)}$ = $\frac{س+ ٢}{س+ ٣}$ --- (١)

٢) نعوض في الناتج من الخطوة السابقة س = ٢

∴ د (٢) = $\frac{٢ + ٢}{٢ + ٣}$ = $\frac{٤}{٥}$

٣) نضع الدالة ع (س) معرفة بأكثر من قاعدة

∴ ع (س) = $\begin{cases} \frac{س^٢ - ٤}{س^٢ - ٥س + ٦} & س \neq ٢ \\ \frac{٤}{٥} & س = ٢ \end{cases}$

مثال : أعد تعريف الدالة الآتية عند النقطة المعينة حتى تكون متصلة

$$د(س) = \frac{٢س^٢ + س -١}{س + ١} \qquad س = -١$$

الحـــــــل

$$د(س) = \frac{٢س^٢ + س -١}{س + ١} \qquad س = -١$$

$$= \frac{(س+١)(٢س-١)}{س+١} = ٢س -١$$

بوضع س = -١ $\qquad$ ∴ د(س) = ٢ × -١ -١ = -٣

$$∴ ع(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ + س -١}{س+١} & س \neq -١ \\ -٣ & س = -١ \end{cases}$$

مثال: إذا كانت $ع(س) = \begin{cases} \frac{\sqrt{٤ + س} -٢}{س} & س \neq -١ \\ -٣ & س = -١ \end{cases}$

الحـــــــل

$د(س) = \frac{\sqrt{٤ + س} -٢}{س}$ بضرب البسط والمقام في مرافق البسط

$$∴ د(س) = \frac{\sqrt{٤ + س} -٢}{س} \times \frac{\sqrt{٤ + س} + ٢}{\sqrt{٤ + س} + ٢} = \frac{(٤ + س) - ٤}{(س)(\sqrt{٤ + س} + ٢)}$$

$$= \frac{س}{س\ [\sqrt{٤ + س} + ٢]} \qquad \text{بوضع س = ٠}$$

$$∴ د(٠) = \frac{١}{\sqrt{٤ + ٠} + ٢} = \frac{١}{٤} = أ$$

$$∴ ع(س) = \begin{cases} \frac{\sqrt{٤ + س} -٢}{س} & \text{عند س} \neq ٠ \\ \frac{١}{٤} & س = ٠ \end{cases}$$

مثال: إذا كانت الدالة د حيث د (س) = $\begin{cases} ١ - \frac{١}{٤} س & \text{عندما } س \geq ٢ \\ \frac{أ}{س} & \text{عندما } س < ٢ \end{cases}$ متصلة عند س= ٢

فأوجد قيمة الثابت أ

الحـــــل

∵ الدالة متصلة

∴ نهاس ← (٢)$^-$ د(س) = نهاس ← (٢)$^+$ د(س)

، ∵ نها د٢(س) = نهاس ← (٢)$^+$ $\frac{أ}{س}$ = ٢

، نها د١ (س) = نهاس ← (٢)$^-$ ١- $\frac{١}{٤}$ س = ١- $\frac{١}{٤}$ × ٢ = $\frac{١}{٢}$

∴ $\frac{أ}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ ∴ أ = ١

مثال: إذا كان د(س) = $\begin{cases} \frac{١}{س} \left(٢ جتا^٢ \frac{٢ط - ٦ س}{٤} - ١ \right) & س \neq ٠ \\ ك + ٢ & س = ٠ \end{cases}$

أوجد قيمة ك لتكوين الدالة متصلة عند س = ٠

الحـــــل

نهاس ← ٠ د(س) = نهاس ← ٠ $\frac{٢ جتا^٢ \frac{ط - ٦ س}{٤} - ١}{س}$

∵ ٢ جتا^٢ أ – ١ = جتا ٢ أ

∴ ٢ جتا^٢ $\frac{ط - ٦ س}{٤}$ - ١ = جتا ٢ × $\frac{ط - ٦ س}{٤}$ = جتا $\frac{ط - ٦ س}{٢}$

∴ نهاس ← ٠ $\frac{جتا \frac{ط - ٦ س}{٢}}{س}$ = نهاس ← ٠ $\frac{جتا \frac{ط}{٢} - \frac{٦ س}{٢}}{س}$

∴ نهاس ← ٠ $\frac{جتا (٩٠-٣س)}{س}$ = نهاس ← ٠ $\frac{جا ٣س}{س}$ = ٣

∴ لكي تكون الدالة متصلة عند س = صفر

فإن د(٠) = نها د(س) ∴ ك + ٢ = ٣ ∴ ك = ١

تمرين (٢)

(١) إذا كان: د(س) = $\begin{cases} س^٢ - س + ٢ & س \geq ١ \\ ٢ س & س < ١ \end{cases}$ ابحث اتصال الدالة د(س) عندما س = ١

(٢) ابحث اتصال الدالة عند س = ٣ د (س) = $\begin{cases} \frac{|س^٢ - ٧س + ١٢|}{س - ٣} & س \neq ٣ \\ ١ & س = ٣ \end{cases}$

(٣) إذا كانت د(س) = $\begin{cases} \frac{س^٢ + س}{س^٢ + ١} & س \neq -١ \\ ك & س = -١ \end{cases}$

أوجد قيمة ك التي تجعل د متصلة عند س = -١

(٤) ابحث اتصال الدالة د(س) عند س = ٣ د(س) = $\begin{cases} \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣} & س \neq ٣ \\ ك & س = ٣ \end{cases}$

(٥) ابحث اتصال الدالة د(س) عند س = ٤ د(س) = $\begin{cases} \frac{\sqrt{٢س + ١} - ٣}{س - ٤} & س \neq ٤ \\ \frac{١}{٣} & س = ٤ \end{cases}$

(٦) أوجد قيمة ك بحيث تكون د متصلة عند النقطة س = ٢

د (س) = $\begin{cases} \frac{س^٢ - ٤}{٢س - ٤} & س \neq ٢ \\ ك & س = ٢ \end{cases}$

(٧) إذا كانت د(س)= $\begin{cases} س^٢ & س \leq ٢ \\ أ س + ٢ & س > ٢ \end{cases}$ أوجد قيمة أ لكي تكون د(س) متصلة عند س=٢

(٨) ابحث اتصال الدالتين د(س) = $\frac{س^٢}{|س|}$ عند س = ٠ ، د(س) = س^٢ - |س| عند س = ٠

(٩) أوجد قيمة الثوابت أ ، ب إذا علم أن الدالة :

د (س) = $\begin{cases} س^٢ + ب س + ٣ & س < ١ \\ أ س + ب & س \geq ١ \end{cases}$ متصلة عند س = ١ وكان د(١) = ٧

(١٠) ابحث اتصال الدالة:

$$د(س) = \begin{cases} س^{٢} - ٣س + ٢ & ، س \leq ٣ \\ ٢ & ، ٣ < س \leq ١ \\ ٦ - س & ، س > ٤ \end{cases}$$

(١١) أوجد قيمة الثابت م إذا علم أن الدالة :

$د(س) = \frac{س^{٧} - م^{٧}}{س^{٢} - م^{٢}}$ متصلة عند س = م ، وكانت $د(م) = \frac{٢٨}{٣}$

(١٢) ابحث اتصال الدالة:

$د(س) = \frac{س^{٢} - ٣س - ٤}{س^{٢} + ٥س + ٤}$ عند س = -١

الباب الثانى

الإشتقاق

قابلية الاشتقاق : تكون الدالة قابلة للاشتقاق عند س = أ

إذا كانت $\lim_{هـ \to ٠} \frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ}$ لها وجود

أي:

إذا كانت ($\frac{ء ص}{ء س}$) أو دَ (أ) لها وجود (عدد حقيقي وحيد)

❖ **المشتقة اليمني عند س = أ**

هي $\lim_{هـ \to ٠^+} \frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ}$ ورمزها دَ ($أ^+$) حيث هـ > ٠

❖ **المشتقة اليسري عند س = أ**

هي $\lim_{هـ \to ٠^-} \frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ}$ ورمزها دَ ($أ^-$) حيث هـ < ٠

❖ **بحث قابلية الدالة د(س) للاشتقاق عند س = أ ، أ ∋ لنطاق الدالة :-**

أولاً: نوجد المشتقة اليمنى	ثانيا: نوجد المشتقة اليسرى
(١) نوجد د(أ) ---- (١) (٢) نوجد د (أ + هـ) ----- (٢)	(١) نوجد د(أ) ---- (١) (٢) نوجد د (أ + هـ) ----- (٢)
حيث هـ كمية صغيرة جداً هـ ← ٠ عندما س ← أ	
(٣) نطرح (١) من (٢) د (أ + هـ) – د (أ)	(٣) نطرح (١) من (٢) د (أ + هـ) – د (أ)
(٤) دَ ($أ^+$) = $\lim_{هـ \to ٠} \frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ}$ = م	(٤) دَ ($أ^-$) = $\lim_{هـ \to ٠} \frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ}$ = ك

- **تكون الدالة قابلة للاشتقاق إذا كانت م = ك**

- تكون الدالة غير قابلة للاشتقاق إذا كانت م $\neq$ ك
- إذا كان نها $_{هـ \leftarrow ٠}$ $\frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ} = \frac{عدد}{٠} = \infty$

$\therefore$ الدالة غير قابلة للإشتقاق .

مثال: ابحث قابلية اشتقاق الدالة د (س) = $\begin{cases} س^٢ + س + ٣ & س < ١ \\ ٣س + ٢ & س > ١ \end{cases}$

الحـــــــــــل

أولاً : المشتقة اليمنى للدالة عندما س = ١

$د_١$ (س) = ٣س +٢ بوضع س = ١ + هـ بدلاً من س ، هـ ← ٠ عندما س ← ١

$\therefore$ د (١+ هـ) = ٣ (١+ هـ) + ٢ = ٣ + ٣ هـ + ٢ = ٥ +٣هـ

د(١) = ٣+ ٢ = ٥

$\therefore$ د(١+ هـ) – د(١) = ٥ + ٣ هـ - ٥ = ٣ هـ

$\therefore$ دَ (١)$^+$ نها $_{هـ \leftarrow ٠}$ $\frac{د_١(١ + هـ) - د١}{هـ}$ = نها $_{هـ \leftarrow ٠}$ $\frac{٣ هـ}{هـ}$ = ٣ --- (١)

ثانياً : المشتقة اليسرى للدالة عند س = ١

$د_٢$ (س) = س^٢ + س + ٣

بوضع س = ١+ هـ هـ ← ٠ عندما س ← ١

$\therefore$ د(١+ هـ) = (١+ هـ)^٢ + (١+ هـ) + ٣ = هـ^٢ + ٣ هـ + ٥

$د_٢$ (١) = ١+ ١ + ٣ = ٥

د (١+ هـ) – د(هـ) = هـ^٢ + ٣ هـ + ٥- ٥ = هـ^٢ + ٣ هـ

$\therefore$ دَ (١)$^-$ = نها $_{هـ \leftarrow ٠}$ $\frac{د_٢(١ + هـ) - د(هـ)}{هـ}$ = نها $_{هـ \leftarrow ٠}$ $\frac{هـ^٢ + ٣ هـ}{هـ}$

= نها $_{هـ \leftarrow ٠}$ $\frac{هـ(هـ + ٣)}{هـ}$ = ٣ ---- (٢)

$\therefore$ دَ (١)$^+$ = دَ (١)$^-$ $\therefore$ الدالة قابلة للاشتقاق عند س = ١

مثال: بين هل الدالة د قابلة للاشتقاق عند هـ أم لا

د(س) = $\begin{cases} ٢س^٢ + ١ & س \leq ١ \\ ٤س - ١ & س > ١ \end{cases}$ هـ = ١

الحـــــــل

أولاً : المشتقة اليمنى للدالة عندما س = ١

$د_١$ (س) = ٤ س ـ ١ ∴ $د_١$ $(١)^+$ = ٤ × ١ ـ ١ = ٣

$د_١$ (١+ هـ) حيث هـ ← ٠ عندما س ← ٠

= ٤ (١+ هـ) ـ١ = ٤+ ٤ هـ ـ١ = ٣ + ٤ هـ

∴ $د_١$ $(١)^+$ نها هـ←٠ $\frac{د(١ + هـ) - د (١)}{هـ}$

= نها هـ←٠ $\frac{٣ + ٤ هـ - ٣}{هـ}$ = $\frac{٤ هـ}{هـ}$ = ٤

ثانياً : المشتقة اليسرى للدالة عند س = ١

$د_٢$ (س) = ٢ $س^٢$ + ١ ∴ $د_١$ $(١)^-$ = ٢×١ + ١ =٣

$د_٢$ (١+ هـ) = ٢ $(١ + هـ)^٢$ + ١ = ٣ + ٤ هـ + ٢ $هـ^٢$

$دَ_٢$ $(١)^-$ = نها هـ←٠ $\frac{د(١ + هـ) - د (١)}{هـ}$ = نها هـ←٠ $\frac{٣+ ٤هـ+٢$هـ^٢$ -٣}{هـ}$

= نها هـ←٠ $\frac{هـ (٤+ ٢هـ)}{هـ}$ = ٤

∴ $دَ_٢$ $(١)^+$ = دَ $(١)^-$ ∴ الدالة قابلة للاشتقاق عند هـ = ١

مثال: أوجد قيم أ ، ب التي تجعل الدالة د حيث :

د(س) = { $س^٢$ س > ١ ، أ س + ب س ≤ ١ } قابلة للاشتقاق عند س = ١

الحـــــــل

∵ الدالة قابلة للاشتقاق عند س = ١ ∴ الدالة متصلة عند س = ١

∴ د$(١)^+$ = د$(١)^-$ ∴ نها س←١ أ س + ب = نها س←١ $س^٢$

∴ أ + ب = ١ ــــ (١)

، ∵ الدالة قابلة للاشتقاق عند س = ١ ∴ دَ $(١)^+$ = دَ $(١)^-$

∴ نها هـ←٠ $\frac{د(أ + هـ) - د (أ)}{هـ}$ = نها هـ←٠ $\frac{د(١ + هـ) - د (١)}{هـ}$

$\therefore$ نها $_{هـ \to ٠}$ $\frac{أ(١ + هـ) + ب - (أ + ب)}{هـ}$ = نها $_{هـ \to ٠}$ $\frac{(١ + هـ)^٢ - ١}{هـ}$

نها $_{هـ \to ٠}$ $\frac{أ + أ هـ + ب - أ - ب}{هـ}$ = نها $_{هـ \to ٠}$ $\frac{١ + هـ^٢ + ٢ هـ - ١}{هـ}$

$\therefore$ نها $_{هـ \to ٠}$ أ = نها $_{هـ \to ٠}$ هـ + ٢

$\therefore$ أ = ٢ بالتعويض في (١)

$\therefore$ ٢ + ب = ١ $\therefore$ ب = -١

مثال : بين هل دالة القيمة المطلقة المعرفة بالمعادلة د(س) = | س | - قابلة للاشتقاق عند س = ٠ أم لا.

الحـــــــل

د (س) = | س |

تعريف الدالة د(س) = $\begin{cases} س & س > ٠ \\ -س & س < ٠ \end{cases}$

د(٠) = ٠ ∈ ح

$\frac{د(٠ + هـ) - د(٠)}{هـ} = \frac{د(هـ)}{هـ}$

إذا كانت هـ > ٠

$\therefore$ $\frac{د(هـ)}{هـ}$ = ١ $\therefore$ دَ$(٠)^+$ = ١

$\therefore$ دَ$(٠)^-$ ≠ دَ$(٠)^+$ $\therefore$ غير قابلة للاشتقاق

العلاقة بين الاتصال والاشتقاق

(١) الدالة متصلة ⟵ قابلة للاشتقاق
⟵ غير قابلة للاشتقاق

(٢) الدالة غير متصلة ⟸ غير قابلة للاشتقاق

(٣) الدالة قابلة للاشتقاق ⟸ الدالة متصلة

(٤) الدالة غير قابلة للاشتقاق ⟵ متصلة
⟵ غير متصلة

بحث اتصال الدالة	بحث اشتقاق الدالة
(١) نوجد د (أ)	(١) نوجد د (أ)
(٢) نها $_{هـ \leftarrow (أ)^{+}}$ د(س) النهاية اليمنى = م	(٢) نوجد دَ $(أ)^{+}$ نها $_{هـ \leftarrow ٠}$ $\frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ}$ = م
(٣) نها $_{هـ \leftarrow (أ)^{-}}$ د(س)النهاية اليسرى = ن	(٣) نوجد دَ $(أ)^{-}$ نها $_{هـ \leftarrow ٠}$ $\frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ}$ = ك
إذا كانت م = ن ∴ الدالة متصلة	إذا كانت م = ك ∴ الدالة قابلة للاشتقاق
إذا كانت م ≠ ن الدالة ليست متصلة	إذا كانت م ≠ ك ∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق

ملاحظة :

إذا كانت م أ، ك = ∞ فإن الدالة غير قابلة للاشتقاق .

مثال: اثبت أن د(س) = $\begin{cases} ٣ - س & س > ٣ \\ س - ٣ & س \leq ٣ \end{cases}$ دالة متصلة عندما س = ٣ ولكنها غير قابلة للاشتقاق عندما س = ٣

الحـــــــل

نبحث اتصال الدالة:

نها $_{هـ \leftarrow ^{+}3}$ د(س) = س – ٣ = ٣ـ ٣ = ٠ ----- (١)

نها $_{هـ \leftarrow ^{-}3}$ د(س) = س- ٣ = ٣ – ٣ = ٠ ---- (٢)

من (١) ، (٢) ∴ الدالة متصلة عند س = ٣

نبحث الاشتقاق :

د$_1$ (س) = س – ٣ د$_1$ (٣) = ٣ – ٣ = ٠

د$_1$ (٣ + هـ) = ٣ + هـ ـ٣ = هـ

$$د_1^{\prime}(3^{+}) = \lim_{هـ \to 0} \frac{د(3 + هـ) - د(3)}{هـ} = \lim_{هـ \to 0} \frac{هـ - 0}{هـ} = 1$$

د$_2$ (س) = ٣ – س د$_2$ (٣) = ٣ – ٣ = ٠

د$_2$ (٣ + هـ) = ٣ – (هـ +٣) = ٣ – ٣ – هـ = - هـ

$$د_2^{\prime}(3^{-}) = \lim_{هـ \to 0} \frac{د(3 + هـ) - د(3)}{هـ} = \lim_{هـ \to 0} \frac{-هـ}{هـ} = -1$$

∴ $د_1^{\prime}(3^{+}) \neq د_2^{\prime}(3^{-})$

∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق ∴ الدالة متصلة وغير قابلة للاشتقاق

مثال : إذا كانت د(س) = { ٣ - س^2 س ≤ ٣ ، س - ٩ س > ٣ }

أثبت أن الدالة متصلة عند س = ٣ ثم ابحث قابلية اشتقاق الدالة عند س = ٣

الحـــــــل

نبحث اتصال الدالة :

د$_1$ (س) = ٣ – س^2 ، د$_1$ (٣) = ٣ – ٩ = - ٦

نها $_{س \leftarrow ^{+}3}$ د(س) = ٣ – ٩ = - ٦

، د$_2$ (س) = س -٩ ، د$_2$ (٣) = ٣ – ٩ = -٦

نها $_{س \leftarrow ^{-}3}$ د(س) = ٣ – ٩ = - ٦

∴ $\text{نها}_{س \leftarrow ٣^+}$ د(س) = $\text{نها}_{س \leftarrow ٣^-}$ د(س)

∴ الدالة متصلة عند س = ٣

- نبحث قابلية الدالة للاشتقاق :

النهاية اليمنى للدالة :

$د_١$(س) = ٣ - $س^٢$ ، $د_١$ (٣+ هـ) = ٣ − (٣+ هـ $)^٢$ = - ٦

$د_١$ (٣+ هـ) − $د_١$ (٣) = ٣ − (٩+٦ هـ + $هـ^٢$) + ٦ = - ٦ هـ - $هـ^٢$

$$دَ (٣)^+ = \text{نها}_{هـ \leftarrow ٠} \frac{د_١(٣ + هـ) - د_١ (٣)}{هـ} = \text{نها}_{هـ \leftarrow ٠} \frac{هـ (-٦ - هـ)}{هـ} = -٦$$

النهاية اليسرى للدالة :

$د_٢$ (س) = س - ٩ ∴ $د_٢$ (٣) = ٣ − ٩ = - ٦

$د_٢$ (٣+ هـ) = ٣+ هـ - ٩ = هـ - ٦

$$دَ (٣)^- = \text{نها}_{هـ \leftarrow ٠} \frac{د_٢(٣ + هـ) - د_٢ (٣)}{هـ} = \text{نها}_{هـ \leftarrow ٠} \frac{هـ}{هـ} = ١$$

∴ $دَ_١ (٣^+) \neq دَ_٢ (٣^-)$

∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق

تمرين (٣)

(١٣) إذا كانت الدالة د حيث

$$د(س) = \begin{cases} ١ - \frac{١}{٤}س & \text{عندما } س \le ٢ \\ \frac{أ}{س} & \text{عندما } س > ٢ \end{cases}$$

متصلة عند س = ٢ فأوجد قيمة الثابت أ ، ثم ابحث قابلية اشتقاق الدالة عند س = ٢

(١٤) إذا كانت الدالة د حيث

$$د(س) = \begin{cases} س^٢ + أ س - ١ & \text{عندما } س < ٢ \\ ٥ & \text{عندما } س = ٢ \\ أ + ب س & \text{عندما } س > ٢ \end{cases}$$

متصلة عند س =٢ فأوجد قيمة الثابتين أ ، ب ثم ادرس قابلية الاشتقاق للدالة د عند س = ٢

(١٥) إذا كانت الدالة د حيث

$$د(س) = \begin{cases} س + أ & \text{عندما } س > ١ \\ ٣ - س & \text{عندما } س \le ١ \end{cases}$$

متصلة عند س =١ فأوجد قيمة أ ثم ابحث قابلية الدالة د للاشتقاق عند س = ١

(١٦) أوجد قيمة كل من أ ، ب التين تجعلان الدالة د حيث :

$$د(س) = \begin{cases} س^٢ - ١ & \text{عندما } س > ١ \\ ٢ أ س + ب & \text{عندما } س \le ١ \end{cases}$$

قابلة للاشتقاق عند س = ١

(١٧) ابحث الاتصال وقابلية الاشتقاق للدالة د المعرفة كالآتي :

$$د(س) = \begin{cases} س^٢ + ١ & \text{عندما } س \le ١ \\ س + ١ & \text{عندما } س = ١ \end{cases}$$

(١٨) أثبت أن الدالة :

$$د(س) = \begin{cases} س & \text{عندما } س \le ١ \\ \frac{١}{٢}س^٢ + \frac{١}{٢} & \text{عندما } س > ١ \end{cases}$$

متصلة وقابلة للاشتقاق مرة واحدة فقط عند س = ١

(١٩) إذا كانت الدالة د المعرفة كالتالي:

$$\text{د (س)} = \begin{cases} \text{س}^{٣} & \text{عندما س} < ١ \\ \text{أ س}^{٢} + \text{ب س} + \text{جـ} & \text{عندما س} \leq ١ \end{cases}$$

قابلة للاشتقاق مرتين عند س = ١ ،

فأوجد قيم الثوابت أ ، ب ، جـ

(٢٠) إذا كانت د(س) =

$$\begin{cases} ١ - (\text{س}-١)^{٢} & \text{عندما س} \geq ١ \\ ١ + (\text{س}-١)^{٢} & \text{عندما س} < ١ \end{cases}$$

فابحث قابلية الدالة للاشتقاق عند س = ١

(٢١)إذا كانت الدالة د : ح ← ح معرفة بالقاعدة

$$\text{د (س)} = \begin{cases} ٢\,\text{س}^{٢} - ٣ & \text{عندما س} \geq ١ \\ ٤\,\text{س} - ٥ & \text{عندما س} < ١ \end{cases}$$

(٢٢) إذا كان د (س) =

$$\begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢} - ٥\,\text{س} - ٣}{\text{س} - ٣} & \text{س} \neq ٣ \\ \text{أ} & \text{س} = ٣ \end{cases}$$

فأوجد قيمة أ لتكون الدالة قابلة للاشتقاق عند س = ٣ وأوجد معادلة العمودي للمنحنى

عند هذه النقطة .

الدالة الضمنية – الاشتقاق الضمني

❖ الدوال الضمنية :

هي الدوال لتي تكون علي الصورة د (س، ص) = ٠

مثلاً : س^{٢} – ٣ س ص+ ٤ = ٠ ، س + جتا ص = (س+ص)

العلاقات الضمنية :

س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥ ، $\frac{س^{٢}}{١٦}$ - $\frac{ص^{٢}}{٩}$ = ١

ملاحظات :

بعض الدوال والعلاقات الضمنية يمكن جعلها صريحة .

مثال ذلك : س^{٢}+ ص^{٢} = ٢٥ ، ص^{٢} = ٢٥ – س^{٢} ∴ ص = ± $\sqrt{٢٥ - س^{٢}}$

والطريقة العملية لتفاضل الدوال الضمنية تتلخص في الآتي:

هو تفاضل س ، ص معاً ولكن عند تفاضل ص يلزم ضربها في $\frac{ء ص}{ء س}$ ثم استخلاص $\frac{ء ص}{ء س}$ في الطرف الأيمن .

المشتقات العليا:

المشتقة الثانية يرمز لها بالرموز : $\frac{ء^{٢}ص}{ء س^{٢}}$ أ، دَ (س) أ، صً

المشتقة الثالثة يرمز لها بالرموز : $\frac{ء^{٣}ص}{ء س^{٣}}$ أ، د$^{≡}$ (س) أ، ص$^{≡}$

مثال: أوجد المشتقة الأولى للدالة الآتية : س^{٢} – ٢ سص + ٢ ص^{٢} = ٨

الحـــــــل

٢س - (٢× ص+ $\frac{ء ص}{ء س}$× ٢ س) + ٤ ص $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٠

٢س – ٢ص – ٢س $\frac{ء ص}{ء س}$ + ٤ص $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٠ بالقسمة علي ٢

∴ س – ص – س $\frac{ء ص}{ء س}$ + ٢ $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٠

∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ (٢ص- س) = ص – س ∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{ص - س}{٢ص - س}$

مثال: أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ من المعادلة : ص^2 + ٥ س ص + ٣ س^2 ــ ٧ = ٠

الحـــــــل

ص^2 + ٥ س ص + ٣ س^2 ــ ٧ = ٠

٢ص $\frac{ءص}{ءس}$ + ٥ [س × $\frac{ءص}{ءس}$ + ص × ١] + ٦ س = ٠

٢ص $\frac{ءص}{ءس}$ + ٥ س $\frac{ءص}{ءس}$ + ٥ ص + ٦ س = ٠

٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ + ٥س $\frac{ءص}{ءس}$ = - (٥ ص + ٦ س)

$\frac{ءص}{ءس}$ (٢ص + ٥ س) = - (٥ ص+ ٦ س)

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{-(٥ ص + ٦س)}{(٢ ص + ٥ س)}$

مثال : إذا كان ص^2 + ٣ س^2 = ٢س أثبت أن ص صَ + (صَ)^2 + ٣ = ٠

الحـــــــل

٢ص صَ + ٦س = ٢ بالقسمة ÷ ٢

∴ ص صَ + ٣ س = ١ ∴ صَ × صَ + صً × ص + ٣ = ٠

∴ (صَ)^2 + ص صً + ٣ = ٠

مثال : إذا كان ٢ ص^3 = ٣ ص^2 اثبت أن : ص صً + ٢ (صَ)^2 = $\frac{١}{ص}$

الحـــــــل

٦ ص^2 = ٦ س بالقسمة ÷ ٦ ∴ ص^2 صَ = س

∴ ٢ ص صً × صَ + صً × ص^2 = ١

٢ص (صَ)^2 + ص^2 (صً)^2 = ١ بالقسمة ÷ ص

∴ ٢(صَ)^2 + ص صً = $\frac{١}{ص}$

مثال: إذا كان $س^2 + ص^2 = 9$ أثبت أن : $ص^3 صً + 9 = صفر$

الحـــــل

$2س + 2ص صَ = 0$ بالقسمة ÷ 2 ∴ $ص^2 صً = س$

∴ $2 ص صَ × صَ + صً × ص^2 = 0$ ∴ $1 + (صَ)^2 + ص صً = 0$

$1 + (\frac{-س}{ص})^2 + ص صً = 0$ ∴ $1 + \frac{س^2}{ص^2} + ص صً = 0$ بالضرب في $ص^2$

∴ $ص^2 + س^2 + ص^3 صً = صفر$ ∴ $9 + ص^3 صً = صفر$

مثال: أوجد معادلتي المماس والعمودي : $س^2 + ص^2 - 4س + 6ص - 24 = 0$ عند (1،3)

الحـــــل

$2س + 2ص\frac{ءص}{ءس} - 4 + 6\frac{ءص}{ءس} = 0$

∴ $2 ص \frac{ءص}{ءس} + 6 \frac{ءص}{ءس} = 4 - 2س$

∴ $\frac{ءص}{ءس} (2ص+6) = 4 - 2 س$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{4 - 2س}{2ص + 6}$ وعند النقطة (1،3)

المماس	العمودى
$م_1 = \frac{4 - 2}{6 + 6}$ $= \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ ∴ $(ص - 3) = \frac{1}{6}(س - 1)$	$م_2 = -6$ $(ص - 3) = -6 (س-1)$

مثال: إذا كان س ص = (س + ص) ٢ فاثبت أن س صَ = ص

الحـــــــل

س ص = س٢ + ٢ س ص + ص٢ = س٢ + س ص + ص٢ = ٠

(س - ص) (س٢+س ص + ص٢) = ٠ ∴ (س- ص) = ٠

∴ س٣ = ص٣ ∴ ٣ س٢ = ٣ ص٢ $\frac{ء ص}{ء س}$ بالضرب × س

س٣ = س ص٢ ∴ ص٣ = س ص٢ $\frac{ء ص}{ء س}$

∴ ص = س $\frac{ء ص}{ء س}$ ∴ س $\frac{ء ص}{ء س}$ = ص

مثال : إذا كانت ص = ٢ جا س – س جتا س – أثبت أن صً + ص = ٢ جا س

الحـــــــل

ص= ٢جا س – س جتا س

$\frac{ء ص}{ء س}$ = ٢ جتا س – [(١) (جتا س) + (- جا س) (س)]

= ٢ جتا س – جتا س + س حا س = جتا س + س حا س

∴ صً = - حا س + [١× حا س + جتا س × س]

= - حا س + حا س + س حتا س = س حتا س

∴ صً + ص = س حتا س + ٢ حا س – س حتا س = ٢ حا س

مثال: إذا كانت ص = $\frac{جتا س}{س}$ أثبت أن : س صً + ٢ صَ + س ص = ٠

الحـــــــل

ص = $\frac{جتا س}{س}$ ، ∵ س ص = جتا س

∴ ١× ص + $\frac{ء ص}{ء س}$ × س = - حا س ∴ ص + س $\frac{ء ص}{ء س}$ + جا س = ٠

∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ + [١× $\frac{ء ص}{ء س}$ + صً × س] + جتا س = صفر

∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ + $\frac{ء ص}{ء س}$ + س صً + حتا س = ٠ ∴ ٢ صَ + س صً + س ص = ٠

تمرين (٤)

(١) إذا كان $س^٢ + ص^٢ - ٥ س + ٣ ص = ١٥$ - أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$

(٢) إذا كان $س^٢ + س ص - ص^٢ = ٦$ - أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ عند النقطة (٢،٣).

(٣) إذا كان $ص = \frac{١}{٥} س^٥ + \frac{١}{٥} س^٤ - ٢س^٣ + ٧س - ٥$ - أوجد $صً$ عندما $س = -١$

(٤) إذا كانت $ص^٣ = \frac{٢}{س^٢ + ١}$ - أثبت أن : $\frac{٣ ص^٢}{س} \times صَ + ص^٦ =$ صفر (حيث $س \neq ٠$)

(٥) إذا كانت $ص = جـ (س - حـ)^٢$ حيث حـ مقدار ثابت فاثبت أن :

$صَ^{\equiv} - ٣س ص صَ + ٨ ص^٢ =$ صفر

(٦) إذا كان $س ص = أ س^٢ + ب$ حيث أ ، ب ثابتان - أثبت أن : $س صً + ٢ صَ = ٢ أ$

(٧) إذا كانت $٢ ص^٣ = ٣ س$ - اثبت أن : $س صً + ٢ (صَ)^٢ = \frac{١}{ص}$

(٨) إذا كان $ص \sqrt{١ + س^٢} = ١$ - أثبت أن: $(١+س^٢) صً + ٣ س صَ + ص = ٠$

(٩) أوجد إذا عرفت ص بالمعادلة :

$٣ ص حا س + ٥ ص^٢ جتا س - س^٣ =$ صفر

(١٠) أوجد معادلتي المماس والعمودي للمنحنى :

$س^٢ + ٤ ص^٢ = ٢٠$ عند النقطة ق (٢،٣)

البــاب الثالث

تطبيقات علي المشتقة الأولى

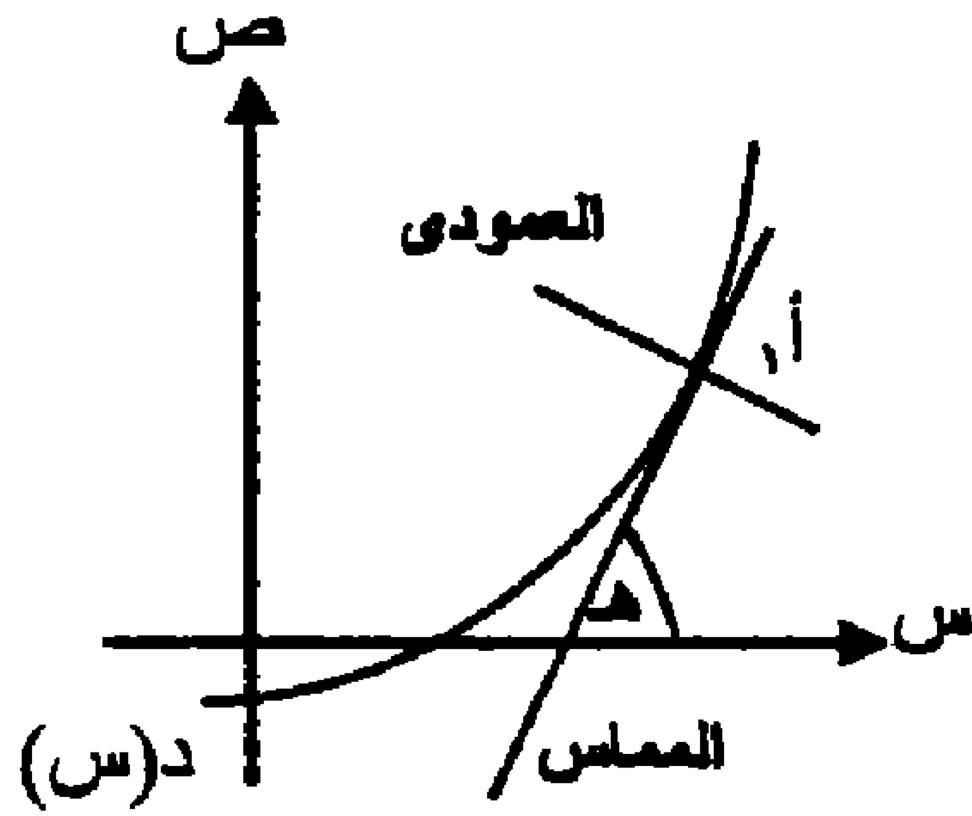
أولاً: التطبيق الهندسي

إذا كانت ص = د(س) دالة فإن **ميل المماس** عند النقطة (س١ ، ص١) والتي تقع علي بيان الدالة هو م١ = $\frac{د ص}{د س}$ وتكون **معادلة المماس** عند هذه النقطة هي :

ص - ص١ = م١(س – س١)

ويكون **ميل العمودي** هو $\frac{-١}{م١}$ و**معادلة العمودي** هي :

ص – ص١ = $\frac{-١}{م١}$ (س - س١) عند (س١، ص١)



ملاحظات :

١- ميل المماس م = ظا هـ حيث هـ هي الزاوية التى يصنعها المماس مع الإتجاه الموجب لمحور السينات .

٢- إذا كان المماس // المحور س فإن م = ظا هـ = ٠ ، ∴ هـ = صفر .

٣- إذا كان المماس ⊥ المحور س فإن م = ظا هـ = ∞ ، هـ = ٩٠°

٤- عندما م = موجب ∴ هـ تكون زاوية حادة .

٥- عندما م = سالب ∴ هـ تكون زاوية منفرجة .

٦- إذا تقاطع منحنى د١ مع منحنى د٢ فإن الزاوية بينهما = الزاوية هـ بين مماسيهما عند نقطة التقاطع حيث نعين هـ من ظا هـ = | $\frac{م١ - م٢}{س^٢ + ١}$ | حيث م١ هو ميل المماس الأول ، م٢ هو ميل المماس الثاني .

٧- عند تعامد مستقيمان ميل الأول = م١ وميل الثانى م٢ فإن م١ × م٢ = -١

٨- عند توازي المستقيمان فإن م١ = م٢

أمثلة :

مثال: أوجد معادلتى المماس والعمودى للدالة ص = $\frac{٢ س}{س^٢ + ١}$ عند النقطة (-١ ، -١)

الحــــــل

$\because$ ص = $\frac{٢ س}{س^٢ + ١}$ $\therefore$ م = $\frac{(س^٢+١) \times ٢ - ٢س(س^٢+١)}{(س^٢ + ١)^٢}$

$\therefore$ عند س = -١ $\Leftarrow$ م = $\frac{(١+١) ٢ - ٢ \times (-١) (١+١)}{(١ + ١)^٢}$ = $\frac{٤+٤}{٤}$ = ٢

$\therefore$ معادلة المماس ص - ص$_١$ = م (س - س$_١$) $\Leftarrow$ ص+ ١ = ٢(س+١) $\Leftarrow$ ص = ٢س+١

معادلة العمودى هي : ص+ ١ = $\frac{-١}{٢}$ (س+١) $\Leftarrow$ ٢ص + س+ ٣ = ٠

<u>مثال</u> : أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة ص = س + جا س عند النقطة (٠،٠) وكذا معادلة العمودى عند نفس النقطة .

الحــــــل

ميل المماس = $\frac{د س}{د ص}$

= ١+ جتا س عند النقطة (٠،٠)

ميل المماس = ١+ جتا ٠ = ١+١ = ٢

معادلة المماس هي $\frac{ص - ٠}{س - ٠}$ = ٢

ص = ٢س ، ص - ٢ س = صفر

معادلة العمودى هي $\frac{ص - ٠}{س - ٠}$ = $\frac{-١}{٢}$

٢ص = - س ، ٢ص + س = صفر

<u>مثال</u>: أثبت أن المنحنى س ص = $\sqrt{٣}$ يتقاطع علي التعامد مع المنحنى ص٢ – س٢ = ٢ أوجد نقط التقاطع .

الحــــــل

$\because$ س ص = $\sqrt{٣}$ ---- (١) $\therefore$ س $\frac{ء ص}{ء س}$+ ص = ٠ $\therefore$ م$_١$ = $\frac{- ص}{س}$

، $\because$ ص^٢ – س^٢ = ٢ --- (٢) $\therefore$ ٢ ص $\frac{ء ص}{ء س}$ - ٢ س = ٠

$\therefore$ م٢ = $\frac{س}{ص}$ $\qquad$ $\therefore$ م١× م٢ = -١

$\therefore$ المنحنيان يتقاطعان متعامدين

لكي نوجد نقط التقاطع من (١) $\qquad$ $\therefore$ س = $\frac{\sqrt{٣}}{ص}$ نعوض في (٢)

$\therefore$ ص٢ − $\frac{٣}{ص}$ = ٢ $\qquad$ $\therefore$ ص٢ - ٢ ص٢ - ٣ = ٠

$\therefore$ (ص٢-١) (ص٢+ ١) = ٠ $\qquad$ $\therefore$ ص٢ = -١ مرفوض $\qquad$ $\therefore$ ص٢ = ٣

$\therefore$ ص = ± $\sqrt{٣}$ $\qquad$ $\therefore$ من (١) $\therefore$ عند ص = ± $\sqrt{٣}$ $\qquad$ $\therefore$ س = ± ١

$\therefore$ نقط التقاطع هى (± ١ ، ± $\sqrt{٣}$) أى (١، $\sqrt{٣}$) ، (-١ ، - $\sqrt{٣}$)

مثال: أثبت أن المنحنيين ص = $\frac{س}{٢-٣ س}$ ، ص = [س - ٢]٨ (١ – ٢ س)٣ متماسان عند النقطة (١، -١) - ثم أوجد معادلة المماس المشترك عند تلك النقطة .

الحــــل

$\because$ ص = $\frac{س}{٢-٣ س}$ $\qquad$ $\therefore$ م١ = $\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{(٢-٣ س) × ١ – س× -٣}{(٢-٣ س)^٢}$

$\therefore$ (م١)س = ١ = ٢

، $\because$ ص = (س- ٢)٨ (١-٢ س)٣

$\therefore$ م٢ = $\frac{ء ص}{ء س}$ = (س-٢)٨ × ٣(١-٢ س)٢ × -٢+ [١-٢ س]٣ × ٨ [س-٢]٧

$\therefore$ (م٢)س = ١ = -٦ + ٨ = ٢

$\because$ م١ = م٢ $\qquad$ $\therefore$ المنحنيين متماسين

معادلة المماس المشترك : ص - ص١ = م (س- س١) $\qquad$ $\therefore$ ص+ ١ = ٢ (س -١)

$\therefore$ ٢ س – ص – ٣= ٠ معادلة المماس المشترك.

مثال: أوجد النقطة التى عندها المماس يوازى المحور س للمنحنى ص = جا٢ س ، ط> س > ٠

الحــــل

ص = جا ٢ س ⇐ (١) $\qquad$ $\therefore$ $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٢ جتا ٢ س

، ∵ المماس // المحور س ∴ م = ٠ ∴ جتا ٢ س = ٠

∴ ٢س = $\frac{ط}{٢}$ ⇐ س = $\frac{ط}{٤}$ حيث ط > س > ٠

∴ من (١) ⇐ ص = جا ٢ × $\frac{ط}{٤}$ = ١

∴ النقطة هي ($\frac{ط}{٤}$ ، ١)

<u>مثال</u>: إذا كان المماس للمنحنى ص = س (ب – $س^٢$) عند النقطة س =٢ يصنع زاوية هـ حيث ظا هـ حيث ظا هـ = ٢ – أوجد قيمة ب .

الحـــــل

∵ ص = ب س – $س^٣$ ⇐ (١) ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ب – ٣ $س^٢$

ولكن م = ٢ عند النقطة س = ٢

∴ ب – ٣ × ٤ = ٢ ∴ ب = ١٤

<u>مثال</u> : إذا كان المنحنى د(س) = $أس^٣$ + ب $س^٢$ + جـ س يمس محور السينات عند النقطة (١،٠) وأن ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة (٠،٠) يساوى ٢ فأوجد قيم كل من أ ، ب ، جـ

الحـــــل

∵ ص = $أس^٣$ + ب $س^٢$ + جـ س ⇐ (١)

، $\frac{ءص}{ءس}$ = م = ٣ أ $س^٢$ + ٢ ب س + جـ ⇐ (٢)

عند (٠،٠) ← م = ٢ ∴ ٠ + ٠ + جـ = ٢ ∴ جـ = ٢

عند (١،٠) المنحنى يمس المحور س ∴ م = صفر

∴ من (٢) : ٣ أ + ٢ ب + ٢ = ٠ ⇐ (٣)

النقطة (١،٠) تحقق معادلة المنحنى

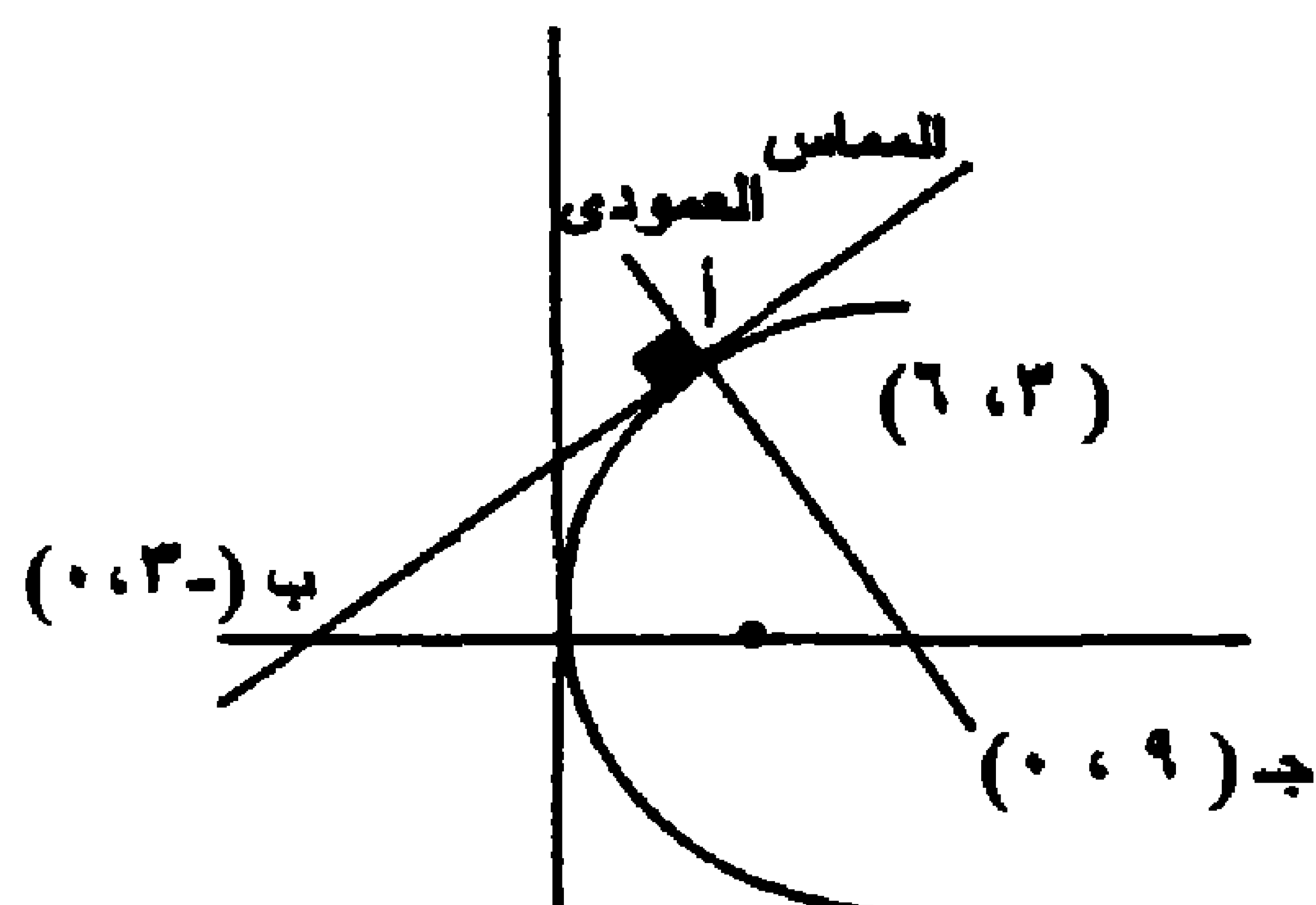
∴ أ + ب + ٢ = ٠ ⇐ (٤) بالضرب × (-٢) والجمع مع (٣)

∴ أ – ٢ = ٠ ∴ أ = ٢

من (٤): ب = -٤

مثال : أوجد رؤوس المثلث الذي أضلاعه هى كل من المحور س ، والمماس والعمود لمنحنى $ص^2 = ١٢ س$ عند النقطة (٣ ، ٦)

الحـــــــــل



∵ $ص^2 = ١٢$ س --- (١)

∴ حيث أن أ = (٣،٦) هى نقطة التماس

∴ ٢ ص . $\frac{ء ص}{ء س} = ١٢$

∴ م = $\frac{٦}{ص}$ عند ص = ٦

∴ م = ١

ص- ٦ = ١× (س-٣) ⟸ ص = س + ٣ ---- (٢)

معادلة العمودى هى ص- ٦ = -١ × (س - ٣) ⟸ ص + س = ٩ ---- (٣)

∴ تقاطع المماس مع المحور س نضع ص = ٠ ∴ س = -٣

∴ الرأس ب = (-٣، ٠)

تقاطع العمودى مع المحور س يعطى الرأس جـ وهى (٩، ٠) وهى رؤوس المثلث أ، ب، جـ

مثال : أثبت أن معادلة المماس لمنحنى الدالة التي معادلتها $\frac{س^2}{أ^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = ١$ عند النقطة (س١، ص١) الواقعة عليه هى $\frac{س س_1}{أ^2} + \frac{ص ص_1}{ب^2} = ١$

الحـــــــــل

∵ $\frac{س^2}{أ^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = ١$ ∴ بالإشتقاق

∴ $\frac{١}{أ^2} \times \frac{٢ س}{ب^2} + \frac{١}{ب^2} \times ٢ ص \frac{ء ص}{ء س} = ٠$

∴ $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{- ب^2 س}{أ^2 ص} = \frac{- ب^2 س}{أ^2 ص}$

$$\therefore \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\text{س}_1 ,\, \text{ص}_1} = \frac{-\text{ب}^2}{\text{أ}^2} \; \frac{\text{س}_1}{\text{ص}_1}$$

معادلة المماس بمعلومية ميل ونقطة $\text{ص} - \text{ص}_1 = \text{م} \, (\text{س} - \text{س}_1)$

$$\therefore \text{ص} - \text{ص}_1 = \frac{-\text{ب}^2}{\text{أ}^2} \; \frac{\text{س}_1}{\text{ص}_1} \, (\text{س} - \text{س}_2)$$

$$\therefore \text{أ}^2 \, \text{ص ص}_1 + \text{ب}^2 \, \text{س س}_1 + \text{ب}^2 \, \text{س}_1^2$$

$$\therefore \text{أ}^2 \, \text{ص ص}_1 + \text{ب}^2 \, \text{س س}_1 = \text{ب}^2 \, \text{س}_1^2 + \text{أ}^2 \, \text{ص}_1^2 \quad \text{----} \; (1)$$

، $\therefore$ النقطة $(\text{س}_1 ،\, \text{ص}_1)$ واقعة علي المنحنى $\frac{\text{س}^2}{\text{أ}^2} + \frac{\text{ص}^2}{\text{ب}^2} = 1$

$$\therefore \text{أ}^2 \, \text{ص}_1^2 + \text{ب}^2 \, \text{س}_1^2 = \text{أ}^2 \, \text{ب}^2$$

بالتعويض في (١)

$\therefore \text{أ}^2 \, \text{ص ص}_1 + \text{ب}^2 \, \text{س س}_1 = \text{أ}^2 \, \text{ب}^2$ بالقسمة علي $\text{أ}^2 \, \text{ب}^2$

$\therefore \frac{\text{س س}_1}{\text{أ}^2} + \frac{\text{ص ص}_1}{\text{ب}^2} = 1$ وهو المطلوب

تمرين (٥)

❖ أوجد ميل المماس لكل من منحنيات الدوال الآتية عند النقطة المبينة أمام كل منها :

(١) ص= س^{٤} + ٣ س^{٢} ــ ٦ عند (١، -٢)

(٢) ص= $\frac{١}{\sqrt{س}}$ عند (١، ١) حيث س > ٠

(٣) س^{٢} ــ س ص+ ص ^{٢} = ٢٧ عند (٦، ٣)

(٤) ص = (س-١) (س+ ٢) (س-٣) عند نقط تقاطعة مع محور السينات ــ أوجد قياس الزاوية التى يصنعها المماس لكل من منحنيات الدوال الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة المبنة أمام كل منها .

(٥) ص= س^{٣}- س٢ + ١ عند النقطتين (١،١) ، (٠،١)

(٦) ص= $\frac{٤}{س+ ١}$ عند النقطة (١ ، ٢)

(٧) س^{٢}+ ص^{٢}- ٢ س+ ٦ ص + ٢ = ٠ عند النقطة (٣، -١)

(٨) أوجد النقط على منحنى الدالة ص = ٢ س^{٣} ــ ٣ س^{٢} ــ ١٢ س + ١ التى يكون عندها المماس موازياً لمحور السينات .

(٩) أوجد النقط علي منحنى الدالة ص = (٢س -٣) (س^{٢}- ٦س + ٣) التى يكون عندها المماس موازيا لمحور السينات .

(١٠) أوجد النقط علي منحني الدالة ص = $\frac{١-٢ س}{س- ٢}$ التي يكون عندها المماس موازياً للمستقيم ٣ س- ص = ٠

(١١) أوجد النقط علي منحنى الدالة ص = س٣- ٣س + ٥ التي يكون عندها المماس

<u>أولاً</u>: موازياً للمستقيم ٣س+ ص = ٥

<u>ثانياً</u> : عمودياً علي المستقيم س+ ٩ ص ــ ٤٨ = ٠

(١٢) إذا كان قياس الزاوية بين المماس لمنحنى الدالة ص = أ س^{٣} + ب س^{٢}- ٢ س + ٦ عند النقطة (١، ٢) الواقعة عليه والاتجاه الموجب لمحور السينات هو $\frac{٣ ط}{٤}$ فأوجد كل من أ، ب .

(١٣) أوجد قيم أ، ب،جـ حتي يكون لمنحنيي الدالتين ص= أ $س^٣$ + ب س، ص = جـ $س^٢$ س مماس مشترك عند النقطة (-١، ٢) .

(١٤) أوجد معادلة المماس ومعادلة العمودى لكل من منحنيات الدوال الآتية عند النقطة المبينة أمام كل منها : وبالصورة المطلوبة .

أ- ص = $س^٣$+ ٢ $س^٢$ – ٤س – ٣ عند النقطة (١، -٤) الاتجاهية .

ب- ص = $\frac{١+س}{١-س}$ عند النقطة (٢، -٣) الاحداثية .

ج- ص = $\frac{٨ أ^٣}{٤ أ^٢ + س^٢}$ عند النقطة التي إحداثيها السينى ٢ أ الاتجاهية .

د- $س^٢$+ $ص^٢$+ ٢ س- ٣ص + ٢ =٠ عند النقطة (-٢ ، ١) الاحداثية .

هـ- ص = $س^٣$- ٣ $س^٢$ – س -٥ عند النقطة التي احداثيها السيني ٣ الاتجاهية .

(١٥) أثبت أن العمودى علي منحنى الدالة ٣ ص = ٦س- ٥ $س^٣$ عند النقطة (١ ، $\frac{١}{٣}$) يمر بنقطة الأصل .

(١٦) أوجد معادلة المماس للمنحنى $ص^٢$ = ٢٠ س الذى يصنع مع المحور وس زاوية قياسها $\frac{ط}{٤}$.

(١٧) أوجد معادلتى المماسين للدائرة $س^٢$ + $ص^٢$ = ٥٢ الموازيين للمستقيم ر = (١،١) + ك(٣، -٢) .

(١٨) أوجد معادلة المماس للمنحنى ص= $س^٤$-٣س العمودى علي المستقيم س+٢٩ص+ جـ = ٠

(١٩) أثبت أن المنحنيين ص = ٢ $س^٢$ – ٣ س + ٨ ، ص = $س^٢$ – ٣ س+ ٩ يتقاطعان علي التعامد عند النقطة (١ ،٧)

(٢٠) أثبت أن المنحنيين ص = $س^٢$ – س + ٢ ، ص = ٣ س – $س^٢$ متماسين – ثم أوجد معادلة المماس المشترك لهما عند نقطة تماسهما .

ثانياً : المعادلات الزمنية المرتبطة

فى هذه الحالة يوجد عدد من المتغيرات التابعة مرتبطة معاً بواسطة متغير مستقل هو ن وذلك يكون في علاقة دالية واحدة ويطبق هذا فى إيجاد معدل التغير فى المساحا أو الحجوم وغيرها.

مثال: يتساقط رمل علي سطح الأرض مكوناً كومة علي شكل مخروط دائري قائم ارتفاعه = $\frac{٣}{٤}$ نصف قطر قاعدته وذلك بمعدل ٢٧ قدم^{٣} / دقيقة ـ فأوجد :

(أ) معدل الزيادة في نصف القطر في اللحظة التى يكون عندها نق = ٦ قدم .

(ب) معدل الزيادة في المساحة الجانبية .

الحـــــــل

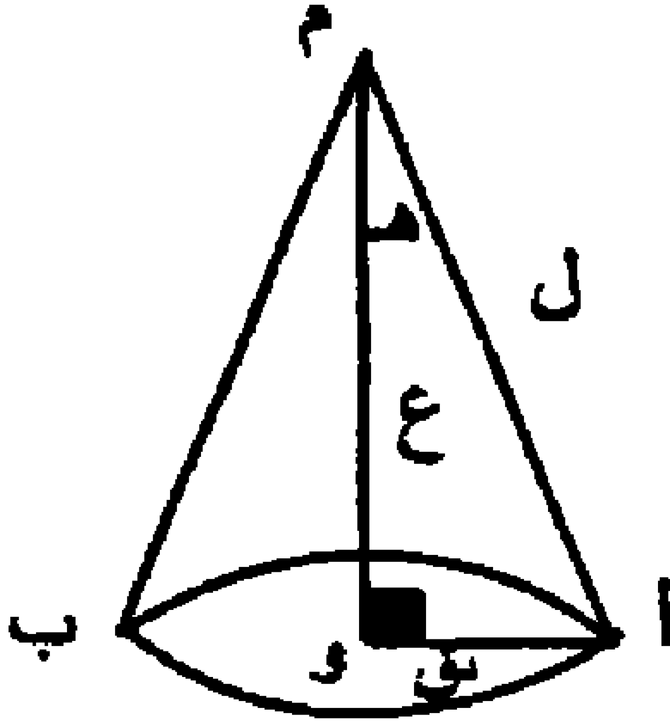
(أ) ح المخروط = $\frac{١}{٣}$ ط نق^{٢} × ع ، ∵ ع = $\frac{٣}{٤}$ نق ∴ ح = $\frac{١}{٤}$ ط نق^{٣} --- (١)

∴ $\frac{د ح}{د ن}$ = $\frac{٣}{٤}$ ط نق^{٢} . $\frac{د نق}{د ن}$

لكن نق = ٦ ، $\frac{د ح}{د ن}$ = ٢٧

∴ ٢٧ = $\frac{٣}{٤}$ ط × ٣٦ .

∴ $\frac{د نق}{د ن}$ = $\frac{١}{ط}$ قدم / ث



(ب) ∵ ع^{٢} = $\frac{٩}{١٦}$ نق^{٢} ، ل^{٢} = نق^{٢} + ع^{٢}

∴ ل^{٢} = نق^{٢} + $\frac{٩}{١٦}$ نق^{٢} = $\frac{٢٥}{١٦}$ نق^{٢} ← ل = $\frac{٥}{٤}$ نق

، ∵ م الجانبية = ط نق ل = ط × $\frac{٥}{٤}$ نق^{٢}

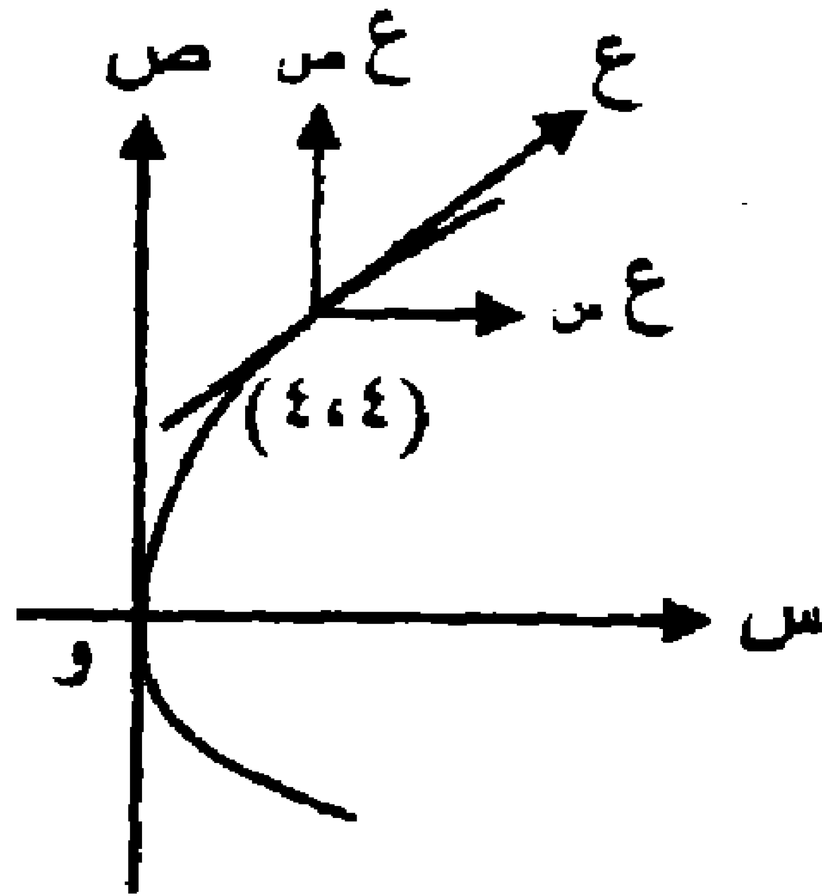
∴ $\frac{د م}{د ن}$ = $\frac{٥}{٤}$ ط × ٢ نق × $\frac{د نق}{د ن}$ = ١٥ قدم^{٢} / دقيقة

مثال: تتحرك نقطة مادية علي القطع المكافئ $ص^2=4س$ على الجزء الواقع في الربع الأول بسرعة ثابتة =5 قدم / ث ، فإذا كانت الحركة مبتداه من نقطة الأصل.

- فأوجد $ع_س$، $ع_ص$ عند النقطة (4،4)

الحـــــــل

$ص^2 = 4\,س$ $\quad \therefore\ 2\,ص \cdot \frac{دص}{دن} = 4\ \frac{دس}{دن}$ عند (4، 4)



$\therefore\ 4ع_ص = 2ع_س \qquad \therefore\ ع_س = 2ع_ص$ ---- (1)

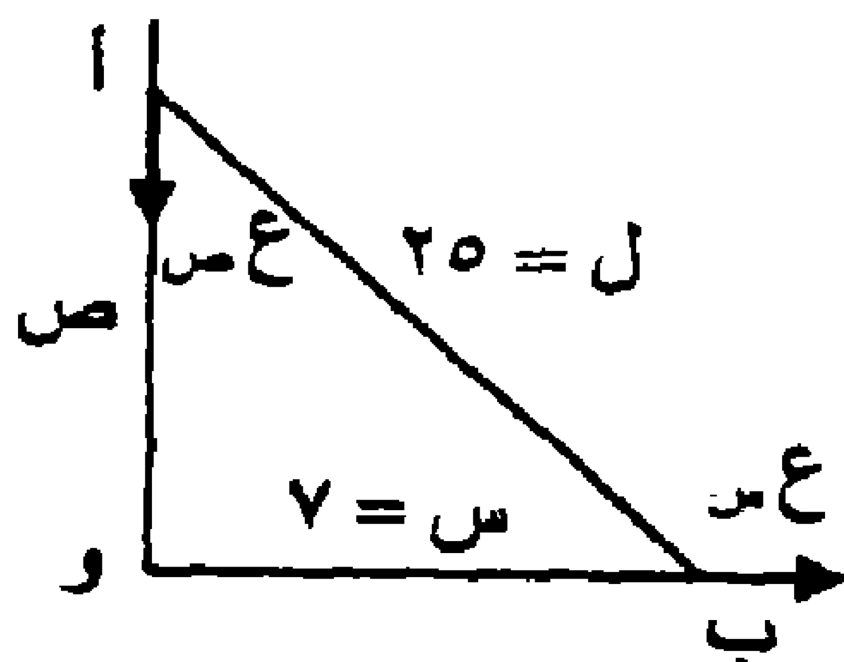
ولكن $ع = 5 = \sqrt{ع^2_س + ع^2_ص}$ بالتربيع

ومن (1) $\therefore\ 25 = 4\,ع^2_ص + ع^2_ص = 5\,ع^2_ص$

$\therefore\ ع_ص = \sqrt{5}$ ، $ع_س = 2\sqrt{5}$ وحدة سرعة

مثال : ا ب سلم طوله 25 قدم يرتكز طرفه أ علي حائط رأس وطرفه ب على أرض أفقية تحرك الطرف ب مبتعداً عن الحائط بمعدل 12 قدم/ ث ـ فأوجد سرعة انزلاق الطرف العلوي أ عندما يكون الطرف ب يبعد 7 قدم من الحائط .

الحـــــــل



بفرض $ع_س = 12$ قدم/ ث سرعة الطرف ب

، $ع_ص = ?$ سرعة انزلاق الطرف أ

$أب^2 = أو^2 + ب و^2 \qquad \therefore\ ل^2 = س^2 + ص^2$ -----(1)

عند $س = 7 \qquad \therefore\ ص^2 = (25)^2 - 7^2 = (25 - 7)\ (25 + 7)$

$\therefore\ ص^2 = 18 \times 32 = 9 \times 64 \qquad \therefore\ ص = 24$ قدم بتفاضل (1)

$\therefore$ صفر $= 2\,س \cdot \frac{دس}{دن} + 2\,ص \cdot \frac{دص}{دن}$

$\therefore\ 24 \cdot \frac{دص}{دن} = -7 \times 12 \qquad \therefore\ \frac{دص}{دن} = ع_ص = -\ 3\frac{1}{2}$ قدم / ث

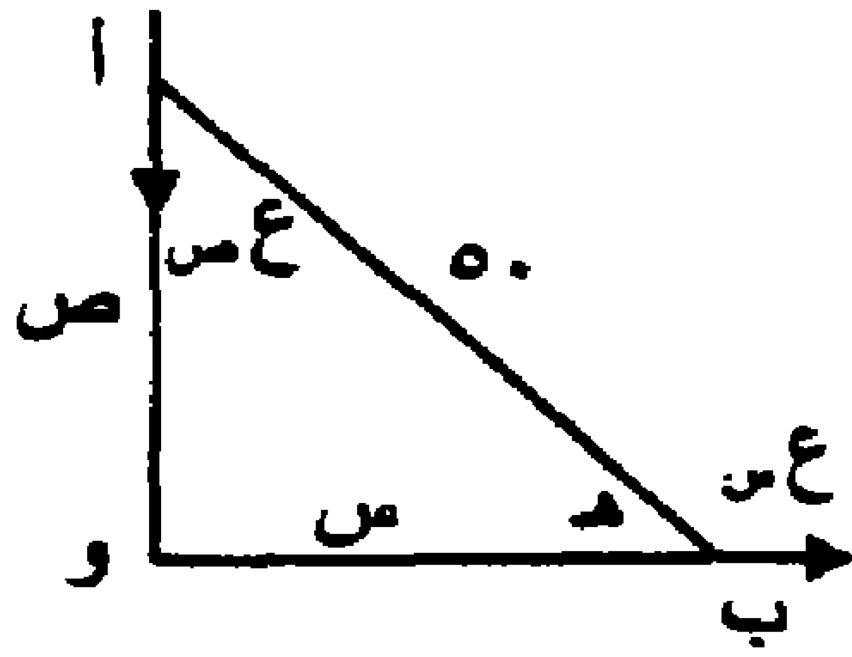
مثال: أ ب سلم طوله ٥٠ قدم يرتكز طرفه أ علي حائط رأسي وطرفه ب علي أرض أفقية فإذا تحرك الطرف ب بعيداً عن الحائط بسرعة ٣ قدم / دقيقة - فأوجد :

أ) سرعة أ عندما تكون ب علي بعد ١٤ قدم من الحائط .

ب) بعد ب عن الحائط عندما تكون | ع أ | = | ع ب | ومنه أوجد ميل السلم على الأرض.

جـ) بعد ب ن الحائط عندما تكون سرعة أ لأسفل = ٤ قدم / دقيقة .

الحـــــــــل



أ) أنظر المثال السابق.

ب) $س^2 + ص^2 = ٥٠^2$ ---- (١)

$\therefore$ ٢ س. ع س + ٢ ص . ع ص = ٠ ---- (٢)

عند | ع أ | = | ع ب |

من (٢) $\therefore$ س = - ص أي أن | س | = | ص |

$\therefore$ من (١) $\therefore$ $س^2 + ص^2 = ٥٠^2$ $\therefore$ س = $٢٥\sqrt{٢}$ قدم

$\therefore$ بعد ب عن الحائط = س = $٢٥\sqrt{٢}$ قدم ثانيا

جتا هـ = $\frac{٢٥\sqrt{٢}}{٥٠} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ← هـ = ٤٥°

ج) $\because$ ع س = ٣ قدم/ ث ع ص = ٤ قدم / ث $\therefore$ نعوض في (٢)

$\therefore$ س × ٣ + ص × ٤ =٠ $\therefore$ س = $\frac{-٣}{٤}$ س نعوض في (١)

$\therefore$ $س^2 + \frac{٩ س^2}{١٦} = ٥٠^2$ $\therefore$ $\frac{١٦س^2 + ٩ س^2}{١٦} = ٥٠^2$

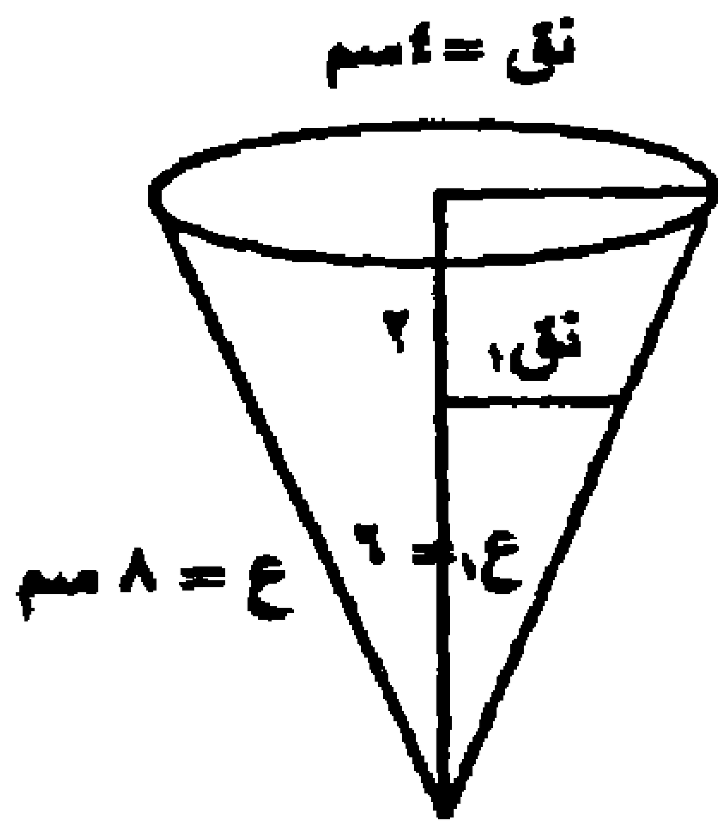
$\therefore$ $س^2$ = ١٦ × ١٠٠

$\therefore$ س = ٤٠

$\therefore$ بعد ب عن الحائط = ٤٠ قدم

مثال: وعاء مخروطي رأسه إلى أسفل ارتفاعه = ٨ سم ، نصف قطر قاعدته = ٤ سم يتسرب سائل منه بمعدل ١ سم^{٣}/ ث- أوجد معدل انخفاض سطح السائل عندما يكون علي بعد ٢ سم من قاعدة الوعاء .

الحـــــــل



من التشابه $\frac{ع_١}{٨} = \frac{نق_١}{٤}$ $\quad$ ∴ $نق_١ = \frac{١}{٢} ع_١$

∴ $نق_١^٢ = \frac{١}{٤} ع_١^٢$

∵ $ح = \frac{١}{٣} ط\ نق_١^٢\ ع_١ = \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٤}\ ط\ ع_١^٣$

∴ $\frac{د ح}{د ن} = \frac{١}{١٢}\ ط \times ٣\ ع_١^٢ \times \frac{د ع_١}{د ن}$

عندما يكون $ع_١ = ٦$سم ، $\frac{د ح}{د ن} = ١$ سم^{٣} / ث

∴ $١ = \frac{١}{٤} \times ٣٦\ ط \times \frac{د ع}{د ن}$ $\quad$ ∴ $\frac{د ع_١}{د ن} = \frac{١}{٩ ط}$ سم / ث

مثال : يتحرك جسم أفقيا حسب المعادلة $ف = \frac{٣ ن}{ن^٢ + ١}$ سم / ثانية من نقطة وأوجد :

أ) ع. عند ن = ٠ $\qquad$ ب) أين ومتى يقف الجسم لحظيا .

الحـــــــل

(أ) ∵ $ف = \frac{٣ ن}{ن^٢ + ١}$ ---- (١)

∴ $ع = \frac{د ف}{د ن} = \frac{٣(ن^٢+١) - ٣ن (٢ن)}{(ن^٢+١)^٢}$

∴ $ع = \frac{-٣ (ن^٢ - ١)}{(ن^٢ + ١)^٢}$ ---- (٢)

عند = ٠ $\qquad$ ∴ $ع. = \frac{-٣ (٠ - ١)}{(٠ + ١)^٢} = ٣$ سم / ث

(ب) نضع ع = ٠ في (٢)

∴ $\frac{٣ - ٣ ن^٢}{(ن^٢ + ١)^٢} = ٠$ $\qquad$ ∴ $ن^٢ = ١$ $\qquad$ ∴ $ن = \pm ١$

∴ عند ن = ١ث يقف الجسم لحظيا $\qquad$ نعوض في (١)

∴ $ف = \frac{٣ \times ١}{١ + ١} = \frac{١}{٢}$ ١ سم وعلي بعد $\frac{١}{٢}$ ١ سم عن النقطة

مثال : يتحرك رجل طوله ١٨٠ سم علي سطح الأرض مبتعداً عن مصباح علي ارتفاع ١٢ متر عن سطح الأرض وذلك بسرعة = ٥١ سم/ ث عن موضع مسقط المصباح علي الأرض أوجد معدل ازدياد طول ظل الرجل على سطح الأرض .

الحـــــل

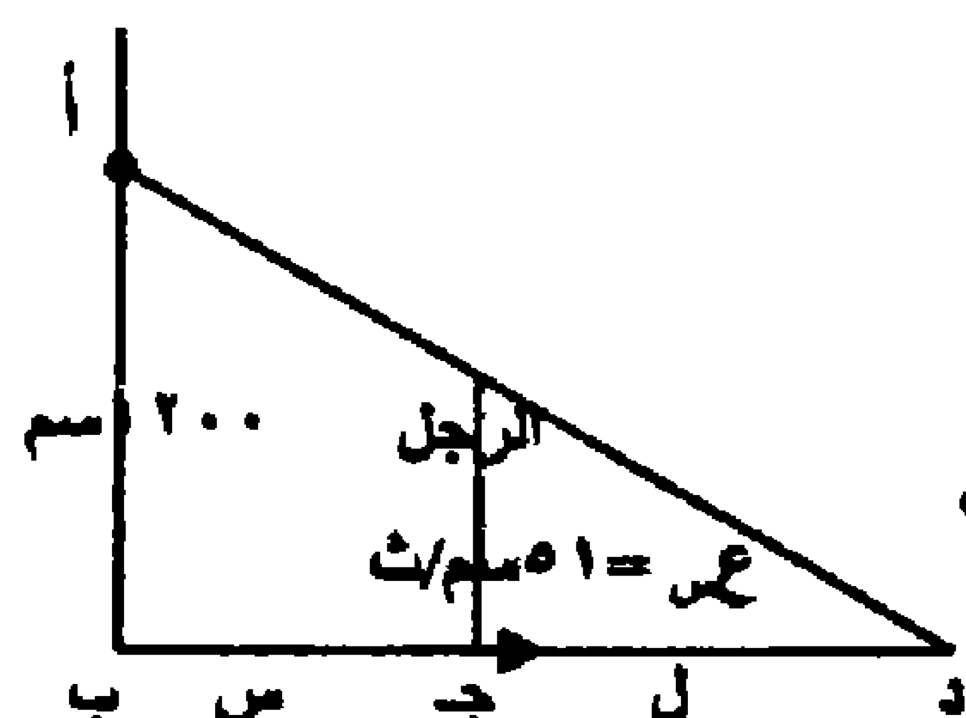
بفرض أن طول ظل الرجل = ك ، س بعد الرجل عن النقطة ب .

من التشابه ∴ $\frac{ل}{١٨٠} = \frac{ل + س}{١٢٠٠}$ حيث $\frac{ل}{ل + س} = \frac{١٨٠}{١٢٠٠}$

∴ ١٧ ل = ٣ س

∴ $\frac{د ل}{د ن} = \frac{٣}{١٧} \times \frac{د س}{د ن} = \frac{٣}{١٧} \times ٥١ = ٩$ سم / ث

حيث $\frac{د س}{د ن} = ٥١$ سم / ث



مثال : رجل طوله ٦ أقدام يتحرك بسرعة ٥ قدم / دقيقة نحو مصباح يعلو عن سطح الأرض بمقدار ١٨ قدم ـ أوجد : أ) معدل تناقص ظل الرجل .

ب) بعد الرجل عن الحائط عندما يكون طول ظل الرجل = ٨ قدم .

الحـــــل

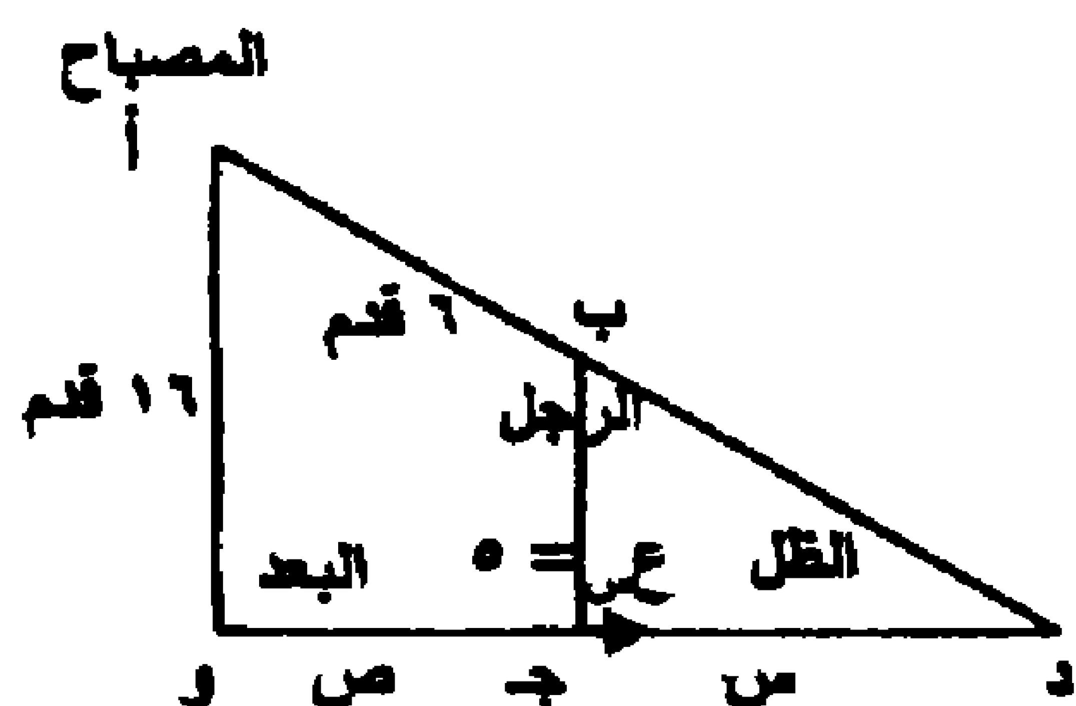
(أ) $\frac{س}{س + ص} = \frac{٦}{١٨} = \frac{١}{٣}$ ∴ ٢ س = ص ---- (١)

٢ $\frac{د ص}{د ن} = \frac{د ص}{د ن} \Leftarrow ٢ \frac{د س}{د ن} = ٥$

∴ معدل تناقص الظل = $\frac{٥}{٢}$ قدم / ث

(ب) من (١) عندما ص = ٨

∴ س = ٤ قدم



مثال: يتزايد نصف قطر كرة بمعدل ٠,٠٣ بوصة / ث ـ فأوجد معدل تزايد حجم الكرة . ثم أوجد معدل تزايد مساحة سطح الكرة عندما يكون نصف القطر = ٣ بوصات .

الحـــــــل

$\because$ ح = $\frac{٤}{٣}$ ط نق^{٣} $\Leftarrow$ $\frac{د ح}{د ن}$ = ٤ ط نق^{٢} . $\frac{د نق}{د ن}$

$\therefore$ $\frac{د ح}{د ن}$ = ٤ ط × ٩ × $\frac{٣}{١٠٠}$ ١,٠٨ بوصة^{٣} / ث

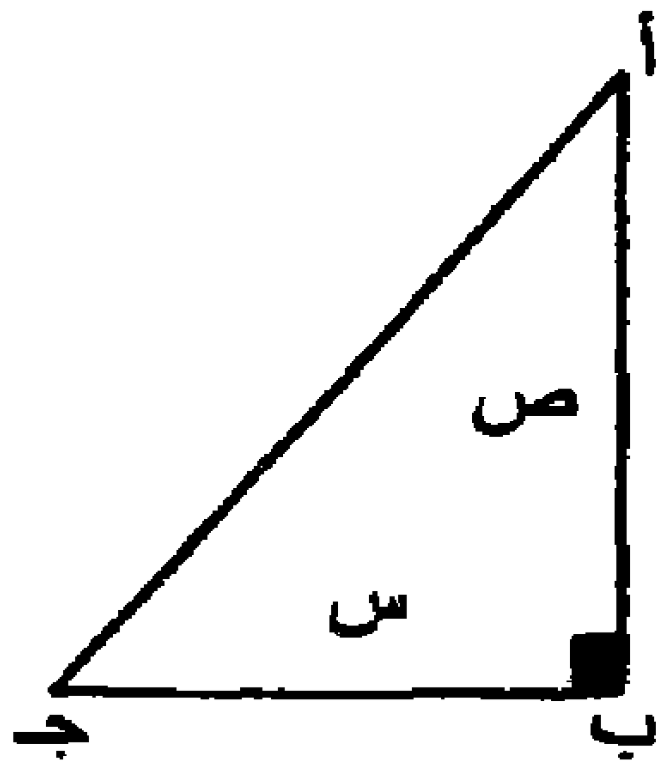
م = مساحة سطح لكرة = ٤ ط نق^{٢} $\therefore$ $\frac{د م}{د ن}$ = ٨ ط نق . $\frac{د نق}{د ن}$

، $\because$ نق = ٣ بوصة ، $\frac{د نق}{د ن}$ = ٠,٠٣ بوصة / ث

$\therefore$ $\frac{د م}{د ن}$ = ٨ ط × ٣ × $\frac{٣}{١٠٠}$ = ٧٢ و ط بوصة^{٢} / ث

مثال: أ ب ج مثلث قائم في ب ، فإذا كان طول أ ب = ١٦سم وينقص بمعدل = ٢ سم/ ث وطول ب جـ = ٩ سم ويزداد بمعدل٣سم/ث ـ فأوجد معدل التغير في مساحة المثلث بعد٢ ثانية.

الحـــــــل



بعد ٢ ثانية $\therefore$ أ ب = ص = ١٦ـ ٢ × ٢ = ١٢ سم

، ب جـ = س = ٩ + ٢ × ٣ = ١٥ سم

م = $\frac{١}{٢}$ س . ص

$\therefore$ $\frac{د م}{د ن}$ = $\frac{١}{٢}$ [س . $\frac{د ص}{د ن}$ + ص . $\frac{د س}{د ن}$]

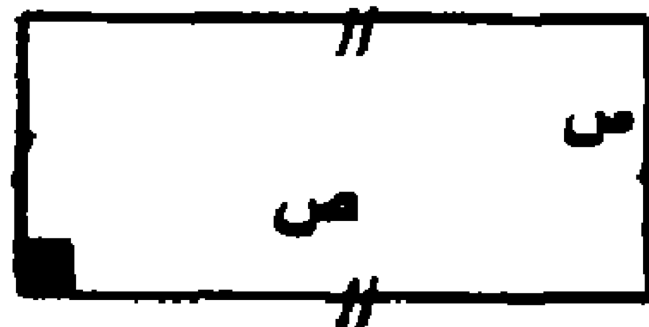
$\therefore$ $\frac{د م}{د ن}$ = $\frac{١}{٢}$ [١٥× (-٢) + ١٢ × ٣] = - ١٥ + ١٨ = ٣ سم^{٢} / ث

مثال: يتزايد ضلعان متقابلان من مستطيل بمعدل ٤ سم / ث ويتناقص الضلعان الآخران بحيث تبقي مساحة المستطيل ثابت = ٦٠ سم^{٢} ، المطلوب :

(أ) معدل تغير محيط المستطيل عندما يكون طول الضلع المتزايد = ٨ سم .

(ب) أوجد بعد المستطيل عندما يتوقف المحيط عن التناقص .

الحـــــــل



أ) نفرض أن الضلع المتزايد = س

$\therefore$ $\frac{د س}{د ن}$ = ٤ سم / ث الضلع الآخر حيث

= ؟ = معدل تناقص الضلع الآخر

$\therefore$ المساحة = س . ص = ٦٠ $\Leftarrow$ ص = $\frac{٦٠}{٨}$ = $\frac{١}{٢}$ ٧ سم

∴ بالتفاضل الضمنى ∴ س . $\frac{د ص}{د ن}$ + ص . $\frac{د س}{د ن}$ = ٠ ---- (١)

∴ ٨ × $\frac{د ص}{د ن}$ = - $\frac{١٥}{٢}$ × ٤ ∴ = - $\frac{١٥}{٢}$ سم / ث

∵ المحيط ح = ٢ (س + ص)

∴ $\frac{د ح}{د ن}$ = ٢ ($\frac{د س}{د ن}$ + $\frac{د ص}{د ن}$) = ٢ (-٤ $\frac{٣}{٤}$ ٣) ---- (٢)

= ٢ × $\frac{١}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$ سم / ث هـ . ط . ت

ب) عندما يكون التغير في المحيط = صفر ∴ $\frac{د ح}{د ن}$ = صفر ∴ من (٢)

∴ = - من (١)

∴ من (١) س = ص

لكن س× ص = ٦٠ ، ∴ س^{٢} = ص^{٢} = ٦٠

∴ س = ص = ٢ $\sqrt{١٥}$ سم وهما بعد المستطيل

<u>مثـال</u>: يتساقط رمل علي أرض أفقية بمعدل ٩٦ سم^{٣} / ق مكونا مجسم على شكل مخروط ارتفاعه = $\frac{١}{٣}$ قطر قاعدته . فأوجد :

أ- معدل التغير في ارتفاعه عندما يكون نصف قطر القاعدة = ١٢ سم

ب- معدل التغير في المساحة الجانبية للمجسم الناتج عند نق = ١٢ سم

الحــــــــل

أ) ∵ ع = $\frac{١}{٣}$ القطر = $\frac{٢}{٣}$ نق ∴ ع = $\frac{٢}{٣}$ × ١٢ = ٨ سم



، نق = $\frac{٢}{٣}$ ع ---- (١)

∵ ح = $\frac{١}{٣}$ ط نق^{٢} ع = $\frac{١}{٣}$ ط × $\frac{٩}{٤}$ ع^{٢} × ع

∴ $\frac{د ح}{د ن}$ = $\frac{٣}{٤}$ ط × ٣ ع^{٢} × $\frac{د ع}{د ن}$

ولكن $\frac{د ح}{د ن}$ = ٩٦ سم^{٣}/ق ، ع = ٨ سم

∴ ٩٦ = $\frac{٩}{٤}$ ط ٦٤ × $\frac{د ع}{د ن}$

∴ $\frac{د ع}{د ن}$ = $\frac{٢}{٣ ط}$ سم / ق

ب) $\frac{\text{د نق}}{\text{د ن}} = \frac{٣}{٢} . \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} = \frac{١}{\text{ط}}$ سم / ق

م الجانبية = ط نق . ل   ∴ $\text{ل}^{٢} = \text{ع}^{٢} + \text{نق}^{٢}$

من (١) ∴ $\text{ل}^{٢} = \frac{٤}{٩}\ \text{نق}^{٢} + \text{نق}^{٢}$

∴ $\text{ل} = \frac{\sqrt{١٣}}{٣}$ نق

∴ $\text{م} = \frac{\sqrt{١٣}}{٣}\ \text{ط نق}^{٢}$ ∴ $\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = \frac{٢\sqrt{١٣}}{٣}\ \text{ط نق} . \frac{\text{د نق}}{\text{د ن}}$

، ∵ نق = ١٢ سم ،   =   سم / ق

∴ $\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = \frac{٢\sqrt{١٣}}{٣}\ \text{ط} \times ١٢ \times \frac{١}{\text{ط}} = ٨\sqrt{١٣}$ سم^{٢} / ق

<u>مثال</u>: قطعة من الشمع أسطوانية الشكل تتصهر بمعدل ١٠٨ سم^{٣} / ق محتفظة بشكلها الأسطوانى

ـ فأوجد ما يأتى عندما يكون الارتفاع = ٤٥ سم :

أ) معدل التغير في الارتفاع ونصف القطر .

ب) معدل التغير في المساحة الجانبية مع العلم أن الارتفاع يساوى $\frac{٣}{٤}$ نصف القطر دائما.

الحـــــــل

أ) ∵ $\text{ع} = \frac{٣}{٤}$ نق   ∴ $\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} = \frac{٣}{٤} . \frac{\text{د نق}}{\text{د ن}}$ ---- (١)

∴ $\text{ح} = \text{ط نق}^{٢}\ \text{ع} = \frac{٣}{٤}\ \text{ط نق}^{٣}$

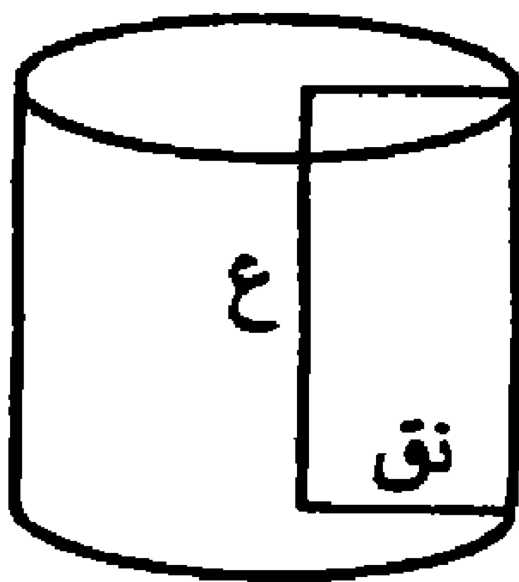
∴ $\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = \frac{٩}{٤}\ \text{ط نق}^{٢}\ \text{ع} .$ ----- (٢)

ولكن $\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = ١٠٨$ سم٣/ ق ، $\text{نق} = \frac{٤ \times \text{ع}}{٣} = \frac{٤ \times ٤٥}{٣} = ٦٠$ سم

من (٢) $١٠٨ = \frac{٩}{٤}\ \text{ط} \times ٦٠ \times ٦٠ . \frac{\text{د نق}}{\text{د ن}}$

∴ $\frac{\text{د نق}}{\text{د ن}} = \frac{١}{٧٥\ \text{ط}}$ سم / ق

∴ $\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} = \frac{٣}{٤} . \frac{١}{٧٥\ \text{ط}} = \frac{١}{١٠٠\ \text{ط}}$ سم / ق



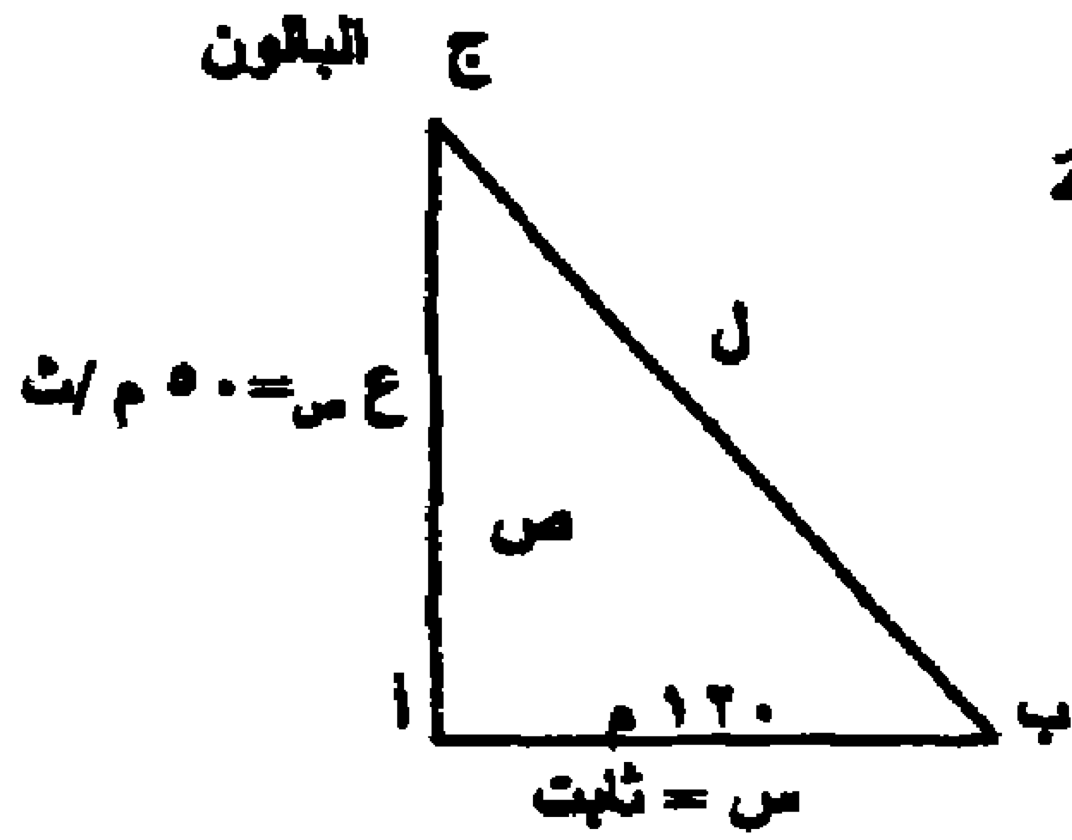
ب) ∵ م الجانبية = ٢ ط نق ع = ٢ ط نق × $\frac{٣}{٤}$ نق = $\frac{٣}{٢}\ \text{ط نق}^{٢}$

$$\therefore \frac{د م}{د ن} = \frac{٣}{٤} ط \times ٢ نق . \frac{د نق}{د ن}$$

$$\therefore \frac{د م}{د ن} = ٣ ط \times ٦٠ \times \frac{١}{٧٥ ط} = \frac{١٢}{٥} = ٢,٤ \text{ سم}^{٢} / ق$$

<u>مثال</u>: يقف رجل علي سطح أرض أفقية علي بعد ١٢٠ متر من نقطة أ تقع علي سطح الأرض أيضاً فإذا تحرك بالون رأسيا إلي أعلي من النقطة أ بسرعة ١٠ متر / ث - فأوجد معدل تباع البالون عن الرجل بعد ٥ ث من بدء الحركة .

الحـــــــل



من الرسم نجد أن ل هو بعد البالون عن الرجل عند أي لحظة

$\therefore ل^{٢} = س^{٢} + ص^{٢} = (١٢٠)^{٢} + ص^{٢}$ --- (١)

$\therefore ٢ ل . \frac{د ل}{د ن} = ٢ ص . \frac{د ص}{د ن}$ ---- (٢)

بعد ٥ ثانية $\therefore$ ص = ٥٠ م

من (١) $ل^{٢} = (١٢٠)^{٢} + (٥٠)^{٢} = ١٤٤٠٠ + ٢٥٠٠ = ١٦٩٠٠$

$\therefore ل = ١٣٠$ م

$$\therefore \frac{د ل}{د ن} = \frac{٥٠ \times ١٠}{١٣٠} = \frac{٥٠}{١٣} \text{ م / ث}$$

وهو تباعد البالون عن الرجل بعد ٥ ثانية من بدء الحركة

تمرين (٦)

(١) تتحرك نقطة علي المنحنى $س^٢ + س ص + ص = ٧$ وكان معدل تغير إحداثيها السيني بالنسبة للزمن عند النقطة (-١،٣) يساوى ٠,١ - أوجد : معدل تغير إحداثيها الصادى بالنسبة للزمن عند نفس النقطة .

(٢) تتحرك نقطة (س ، ص) علي المنحنى $ص = س^٢ + ٤ س - ٣$ عين موضع النقطة عند اللحظة التى تكون فيها سرعة إحداثيها الصادى ضعف سرعة إحداثيها السينى .

(٣) تتحرك نقطة (س،ص) على الدائرة $س^٢ + ص^٢ + ٤س - ٨ ص = ١٠٨$ عين موضع النقطة عند اللحظة التى يكون فيها معدل تغير إحداثيها السينى بالنسبة للزمن مساويا لمعدل تغير إحداثيها الصادى بالنسبة للزمن .

(٤) قطعة من المعدن مستطيلة الشكل يزيد طولها عن عرضها بمقدار ٢٠ سم تنكمش بالتبريد بحيث يظل طولها يزيد عن عرضها بمقدار ٢٠ سم ، فإذا كان الطول ينكمش بمعدل ٠,٠٢٥ سم/ ث عندما يكون العرض ٨٠سم ،أحسب معدل تغير المساحة عند هذه اللحظة.

(٥) سقط حجر في ماء ساكن فتكونت موجة دائرية يتزايد نصف قطرها بمعدل ٢سم / ث - اوجد معدل الزيادة في مساحة سطح الموجة في نهاية ١٠ ثواني .

(٦) يستند سلم طوله ٦,٥ متر بأحد طرفيه علي أرض أفقية و بطرفه الاخر علي حائط رأسي . فإذا إنزلق الطرف السفلي للسلم مبتعدا عن الحائط بمعدل ٣٠ سم / دقيقة عندما يكون علي بعد ٢,٥ متر من الحائط - أوجد : عندئذ معدل إنخفاض الطرف العلوي للسلم . ثم أوجد: بعد الطرف العلوي للسلم عن الارض عندما يتحرك الطرف العلوي و الطرف السفلي بنفس المعدل .

(٧) وضع مصباح كشاف علي ارتفاع ٨ أمتار فوق طريق يسير عليه رجل طوله ١,٦ متر مبتعداً عن الضوء بسرعة ٢ متر / دقيقة . أوجد :

أ) معدل إزدياد طول ظل الرجل . ب) سرعة تحرك نهاية ظل الرجل .

(٨) ونش رأسي طوله ٦ امتار يتحرك بسرعة ٥ أمتار / ثانية في إتجاه مصباح علي إرتفاع ١٦ متر، أوجد: أ) معدل تحرك نهاية ظل الونش . ب) معدل تغير طول ظل الونش.

ج) معدل تغير بعد نهاية الونش العليا عن المصباح عندما يكون الونش علي بعد ١٠ أمتار من قاعدة المصباح .

(٩) إذا كانت ح المساحة المحصورة بين دائرتين متحدتي المركز نصفا قطريهما $نق_1$ ، $نق_2$ حيث $نق_2 > نق_1$ ، فأوجد معدل تغير ح بالنسبة للزمن عند اللحظة التي عندها $نق_1$ = ٤سم ويتزايد بمعدل ٠,٢ سم / ث ، $نق_2$ = ٧ سم ويتناقص بمعدل ٠,١ سم/ ث .

(١٠) في لحظة ما كان طولا ضلعي القائمة في مثلث قائم الزاوية هما ٨سم ، ٦ سم – إذا كان الضلع الأول ينقص بمعدل ١ سم / دقيقة وكان الضلع الثاني يزداد بمعدل ٢ سم/ دقيقة – فاوجد معدل التغير في مساحة المثلث بعد دقيقتين.

(١١) أ جـ ، ب جـ طريقان متعامدان ، أ جـ = ٩٠متر ، ب جـ = ٧٠ متر – يسير رجلان الأول من أ نحو جـ بسرعة منتظمة ٦ أمتار/ ث والثاني من ب نحو جـ بسرعة منتظمة ٨أمتار/ ث أثبت أن البعد ف بين الرجلين بعد مضي ن ثانية من لحظة إنطلاقهما معا يعطى بالعلاقة $ف^2$ = ١٠٠($ن^2$ -٢٢ن + ١٣٠) ثم إستنتج معدل تغير ف بالنسبة إلي ن عندما ن = ٨ ثواني .

(١٢) في الساعة الثامنة صباحا كانت سفينة تقع علي بعد ٦٠ كم شرق ميناء معين وتقترب منه بسرعة ١٠ كم / ساعة وفي الساعة التاسعة صباحا خرجت من الميناء سفينة أخري متجهة نحو الجنوب بسرعة ٣٠كم / ساعة – أوجد معدل تغير البعد بين السفينتين في الساعة العاشرة صباحا وهل تقترب السفينتان أم تبتعدا حينئذ ؟

(١٣) عمود إنارة طوله ١٥ متر أعلاه مصباح قذفت كرة رأسيا إلي أعلى بسرعة ٥ أمتار / ث من مسافة قدرها ١٢ متر م قاعدة العمود – وجد معدل ابتعاد ظل الكرة على الأرض من قاعدة العمود عند منتصف الثانية الأولى .

(١٤) كرة جوفاء يزداد نصف قطرها الداخلي بمعدل ١سم / ث بحيث يبقى حجم مادة الكرة ثابتا وذلك عند اللحظة التي يكون فيها نصفي قطريها ٣ ، ٩ سم - أوجد عند هذه اللحظة :

(أ) معدل تغير نصف قطرها الخارجي . (ب) معدل تغير مساحة سطحها الخارجي .

(ج) معدل تغير سمكها .

(١٥) تتمدد قطعة من المعدن علي هيئة متوازي مستطيلات طول ضلع قاعدته يزيد عن عرضه ٢ سم وارتفاعها ثلاثة أمثال عرضه بالتسخين بحيث تظل أبعادها محتفظة بهذه النسبة فإذا كان الحجم يزداد بمعدل ٠,٦سم^3 / دقيقة عندما يزداد العرض بمعدل ٠,١سم/ دقيقة – فأوجد أبعاد قطعة المعدن .

تمارين غير محلولة

١. إذا كان طول اسطوانة مساوياً $\frac{٧}{١٢}$ من طول نصف قطر قاعدتها فأوجد معدل تغير قطر القاعدة إذا كان معدل تغير الحجم يساوى ٤٢ط قدماً^{٣} / ثانية عندما يكون القطر = ١٢ قدماً.

٢. يحتوى إناء رأسى على سائل حجمه ح ، يعطى بدلالة ع بعد سطح السائل عن المستوى المار بالحافة بالمعادلة ح = ٥ع^{٢}- ٥ع + ٣ ، فإذا كان بقاعدة الإناء ثقب يتسرب منه السائل بعشر وحدات مكعبة / ثانية وكان معدل زيادة ع يساوى ٢ وحدة/ ثانية ــ فأوجد البعد ع فى هذه اللحظة .

٣. صندوق من المعدن على شكل متوازى مستطيلات النسب بين أبعاده هى ١:٢:٣ فإذا تمدد الصندوق بالحرارة فاحسب معدل زيادة الحجم بالنسبة للزمن وكذلك معدل زيادة السطح بالنسبة للزمن فى هذه اللحظة التى يكون فيها معدل زيادة أصغر أبعاده ٠,٠٢سم/ ثانية وطول هذا البعد ١٠ سم .

٤. يتساقط رمل على الأرض مكوناً كومة على شكل مخروط دائرى قائم ارتفاعه $\frac{٣}{٤}$ نصف قطر قاعدته بمعدل ٢٧ قدماً مكعباً فى الدقيقة، فأوجد معدل الزيادة فى نصف قطر القاعدة فى اللحظة التى يكون فيها مساوياً ٦ أقدام .

٥. إذا كان الضغط ص بالأرطال على البوصة المربعة من كتلة معلومة حجمها ح بوصة مكعبة مرتبطين بالعلاقة : ص ح = ٨٠ ـ أوجد معدل نقص الضغط بالنسبة إلى الزيادة فى الحجم عندما يكون الحجم ٨٠ بوصة مكعبة .

٦. أ ب سلم طوله ٥٠ قدماً يرتكز بطرفه أ على حائط رأسى وبطرفه ب على أرض أفقية فإذا تحرك الطرف ب مبتعداً عن الحائط بسرعة مقدارها ٣ أقدام / دقيقة ــ فأوجد :

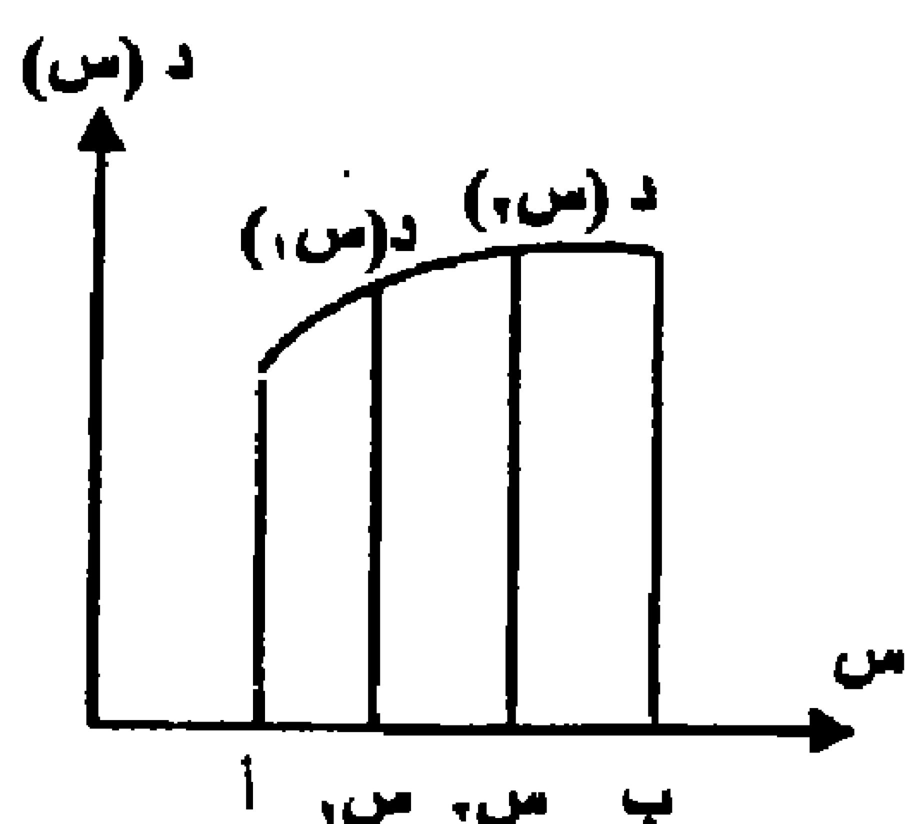
أ- سرعة أ عندما تبعد ب عن الحائط بمقدار ١٤ قدماً .

ب- بعد ب عن الحائط عندما تتساوى مقدار سرعة كل من أ ، ب .

ج- بعد ب عن الحائط عندما يتحرك الطرف أ إلى أسفل بسرعة مقدارها ٤ أقدام / دقيقة .

الباب الرابع

أولاً: تزايد الدالة وتناقصها :



تعريف :

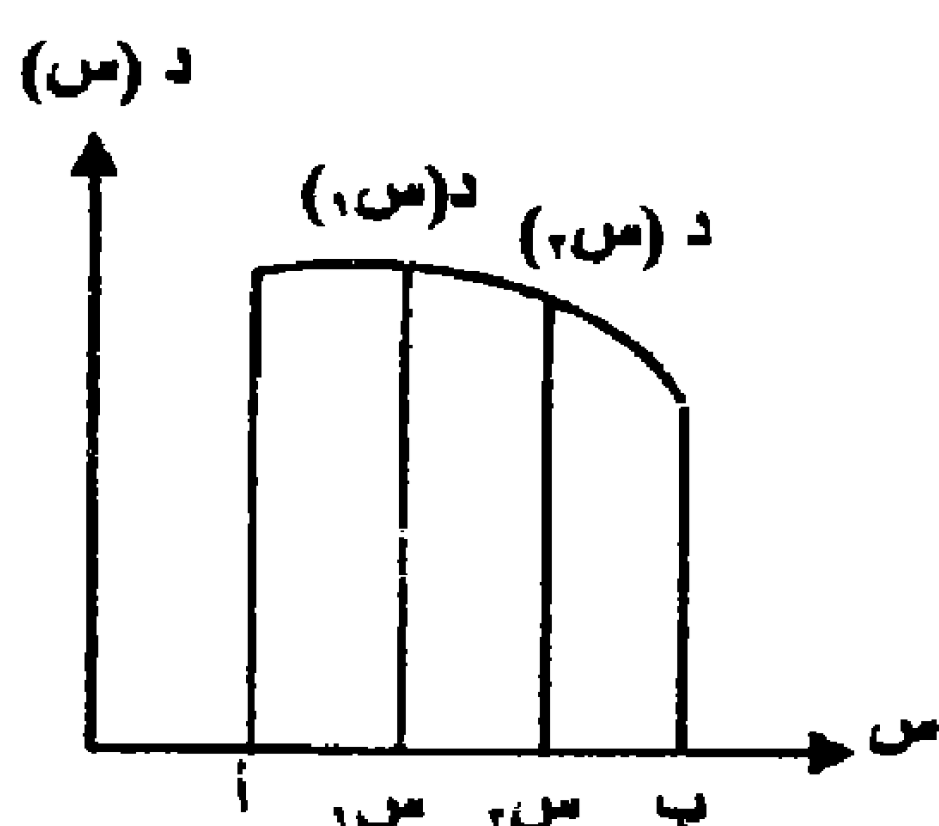
يقال أن الدالة د متزايدة في الفترة] أ ، ب [
إذا كانت معرفة فيها وكان د (س١) < د(س٢)
لكل س١ < س٢ في هذه الفترة .

∴ تكون الدالة متزايدة عندما تتزايد قيمتها مع زيادة س في الفترة .

ملاحظة :

يقال أن الدالة د مطردة التزايد إذا كان د (س١) ≤ د(س٢) لكل س١ < س٢ في هذه الفترة .

∴ الدالة مطردة التزايد إذا كانت قيمتها تتزايد أو تثبت مع زيادة س .



تعريف :

يقال أن الدالة د متناقصة في الفترة] أ ، ب [
إذا كانت معرفة فيها وكان د (س١) > د(س٢)
في هذه الفترة لكل س١ < س٢ في هذه الفترة .

∴ تكون الدالة متناقصة في فترة ما عندما تتناقص قيمتها مع زيادة س في الفترة – أي عندما دالة العدد الأقل > دالة العدد الأكبر .

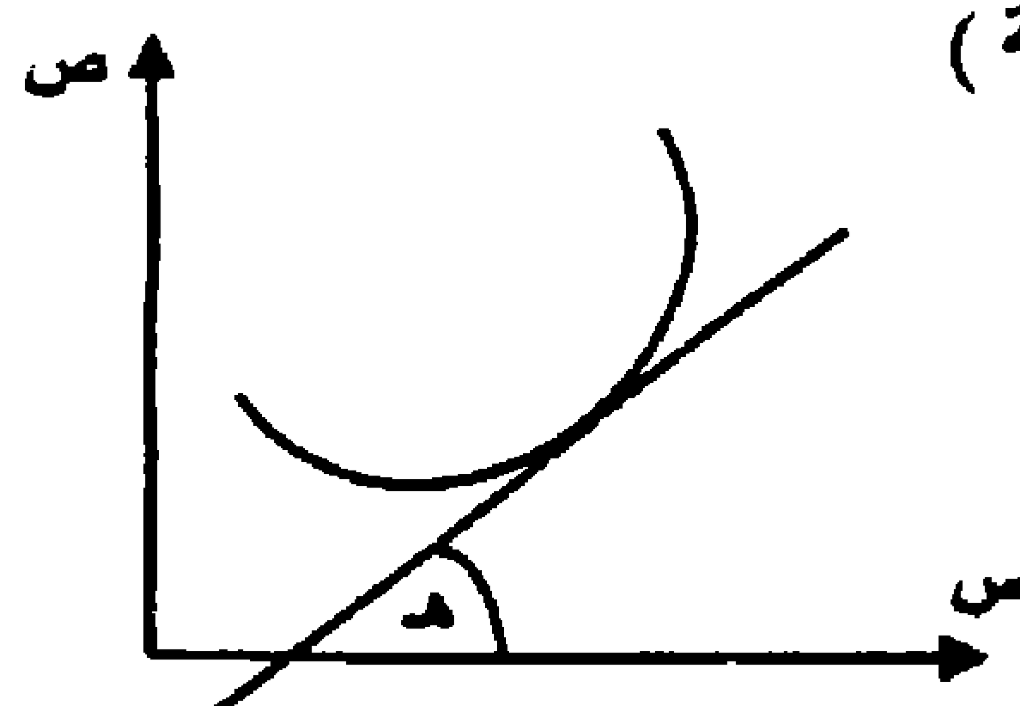
ملاحظة :

يقال أن الدالة د مطردة التناقص إذا كان د (س١) ≤ د(س٢) لكل س١ < س٢ في هذه الفترة .

∴ الدالة مطردة التناقص إذا كانت قيمتها تتناقص أو تثبت مع تزايد س .

لتحديد فترات التزايد مستخدما المشتقة :

في الفترة التي تكون فيها الدالة متزايدة ،يصنع المماس لمنحنى الدالة (زاوية حادة) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وظل الزاوية الحادة (كمية موجبة)



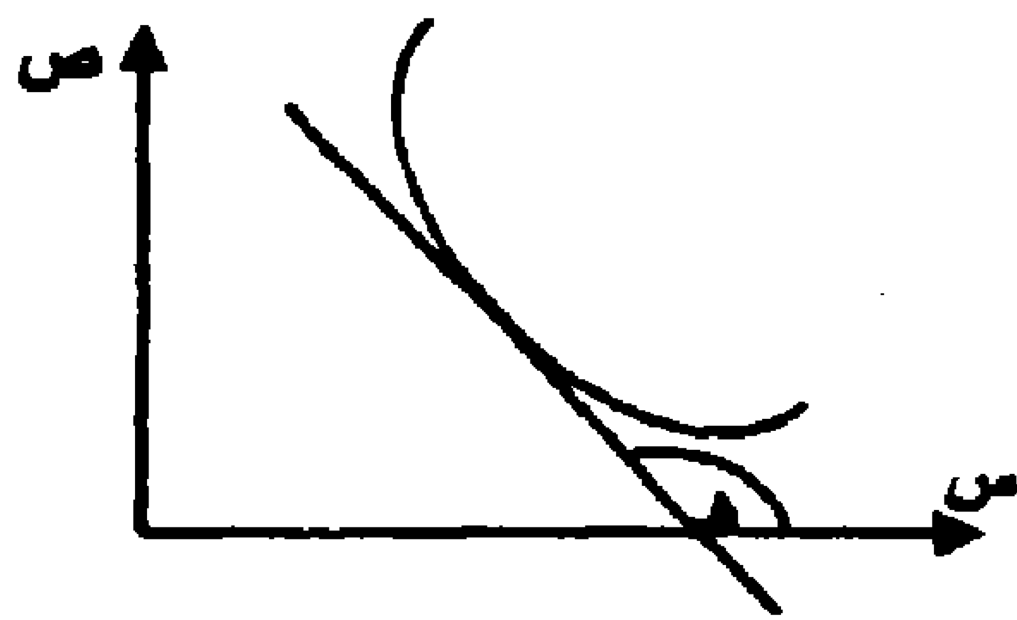
∵ م= ظا هـ = دَ (س)

∴ عند فترات التزايد دَ (س) > صفر

∴ لتحديد فترات التزايد نحل المتباينة دَ (س) > ٠

لتحديد فترات التناقص مستخدما المشتقة :

في الفترة التي تكون فيها الدالة متناقصة ، يصنع المماس لمنحنى الدالة (زاوية منفرجة) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وظل الزاوية المنفرجة (كمية سالبة)



∵ م= ظا هـ = دَ (س)

∴ عند فترات التناقص دَ (س) < صفر

∴ لتحديد فترات التناقص نحل المتباينة دَ (س) < ٠

لتحديد فترات التزايد والتناقص في د :

١- نحدد مجال الدالة

٢- نوجد دَ (س)

٣- نوجد قيم س والتى يكون عندها دَ(س) = ٠ أ، غير معرف وتسمى النقط الحرجة .

٤- نرسم خط الأعداد ونبين عليه مجال الدالة والنقط الحرجة .

٥- نعين إشارة دَ (س) في كل فترة جزئية من مجال الدالة.

فالفترة التى فيها دَ (س) موجبة هى فترة تزايد والفترة التى فيها دَ (س) سالبة هى فترة تناقص .

مثال: حدد فترات التزايد والتناقص للدالة : ص = ٣ س^{٢} - س^{٣}

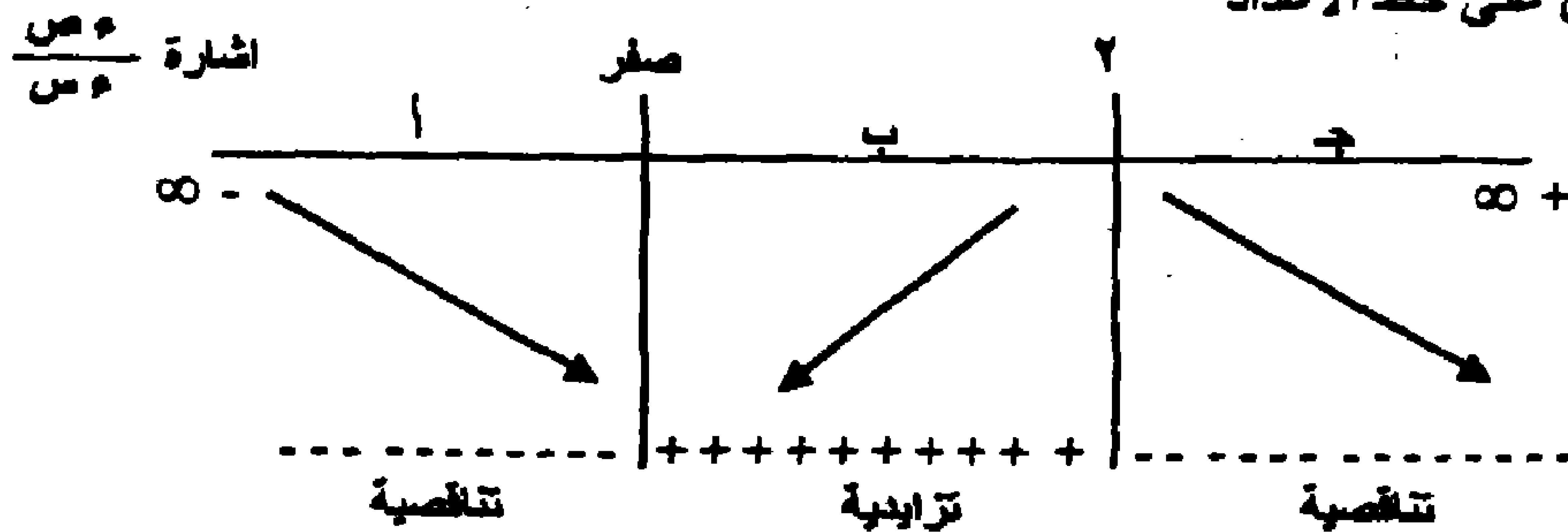
الحـــــــل

١) نوجد صَ ∴ صَ = ٦س - ٣س^{٢}

٢) نضع صَ =٠ ∴ ٦س - ٣س^{٢} = ٠ ∴ ٣س (٢ - س) = ٠

∴ س = ٠ أ، س =٢

٣) نحدد قيم س على خط الأعداد



الفترة أ [-∞ ، ٠ [

نأخذ س = -١ ثم نبحث عن اشارة صَ = ٦س -٣س^{٢}

∴ صَ = -٦-٣ = -٩ (سالب) تناقصية

الفترة ب [٠، +٢] نأخذ س =١ ∴ صَ = ٦-٣= +٣ تزايدية

الفترة جـ [٢، ∞ [نأخذ س =٣ ∴ صَ = ٦س - ٣س^{٢} = ١٨ - ٢٧ = -٩ تناقصية

مثال : أوجد فترات التزايد والتناقص للدالة : د(س) = س | س - ٢|

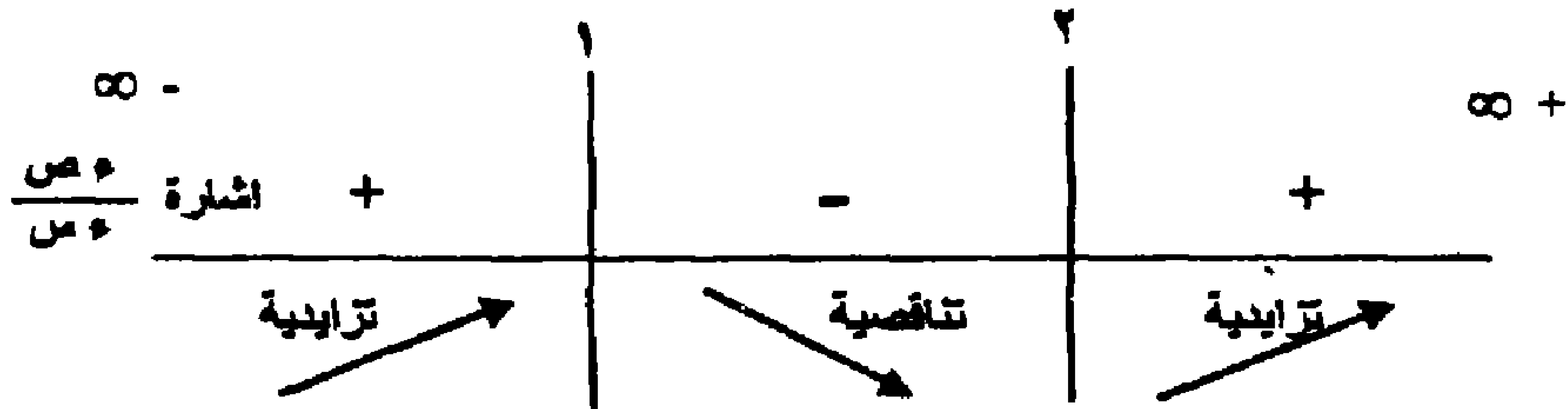
الحـــــــل

د(س) = { س^{٢}-٢س عندما س ≤ ٢ ؛ - س^{٢} +٢س عندما س > ٢ }

المجال هو ح ∴ دَ (س) = { ٢س - ٢ عندما س ≤ ٢ ؛ -٢س + ٢ عندما س > ٢ }

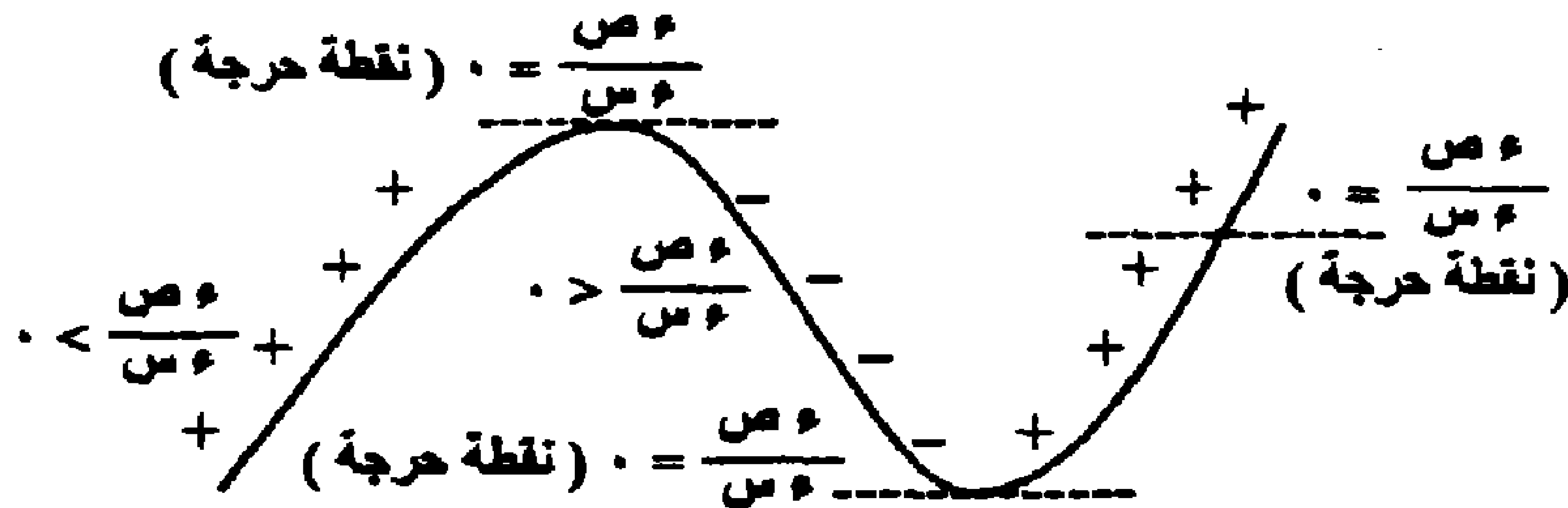
وعندما دَ (س) =٠ ∴ س = ١

∴ يوجد ثلاث فترات



النقطة الحرجة للدالة :

هى التى يكون عندها ءص/ءس = ٠ وقد تكون قيمة عظمى وقد تكون قيمة صغرى وقد تكون غير ذلك .



والقيم الحرجة هي جميع الأعداد التى يكون عندها دَ(س)= ٠ أي حلول هذه المعادلة .

ويقال أن $س_1$ نقطة حرجة للدالة د إذا تحقق أي أحد الشرطين الآتيين :

(١) $دَ(س_1)$ بها وجود وتساوى صفر .

(٢) $دَ(س_1)$ ليس لها وجود .

مثال : أوجد النقط الحرجة والقيم الحرجة للدالة : ص = $س^3 - ٦س^2 + ٩س + ١$

الحــــــــل

نوجد صَ ∴ صَ = $٣س^2 - ١٢س + ٩$

بوضع صَ = ٠ لإيجاد النقط الحرجة ∴ $٣س^2 - ١٢س + ٣ = ٠$

∴ $س^2 - ٤س + ٣ = ٠$ ∴ (س - ١) (س - ٣) = ٠

∴ س = ١ ، س = ٣ ∴ (١، ٠) ، (٣ ، ٠) نقط حرجة

لإيجاد القيم الحرجة نعوض في الدالة الأصلية بقيم س

∵ ص = $س^3 - ٦س^2 + ٩س + ١$

عندما س = ١ ∴ ص = ١ - ٦ + ٩ + ١ = ٥

، عندما س = ٣ ∴ ص = ٢٧ - ٥٤ + ٢٧ + ١ = ١

تمرين (٧)

❖ عين فترات التزايد والتناقص للدوال التالية :

(١) ص = ١ - ٤س - $س^2$

(٢) ص = $(س - ٢)^2$

(٣) د(س) = $(س + ٤)^3$

(٤) د(س) = $س^2$ (س - ٣)

(٥) ص = $\frac{س}{س - ٢}$ ، س ≠ ٢

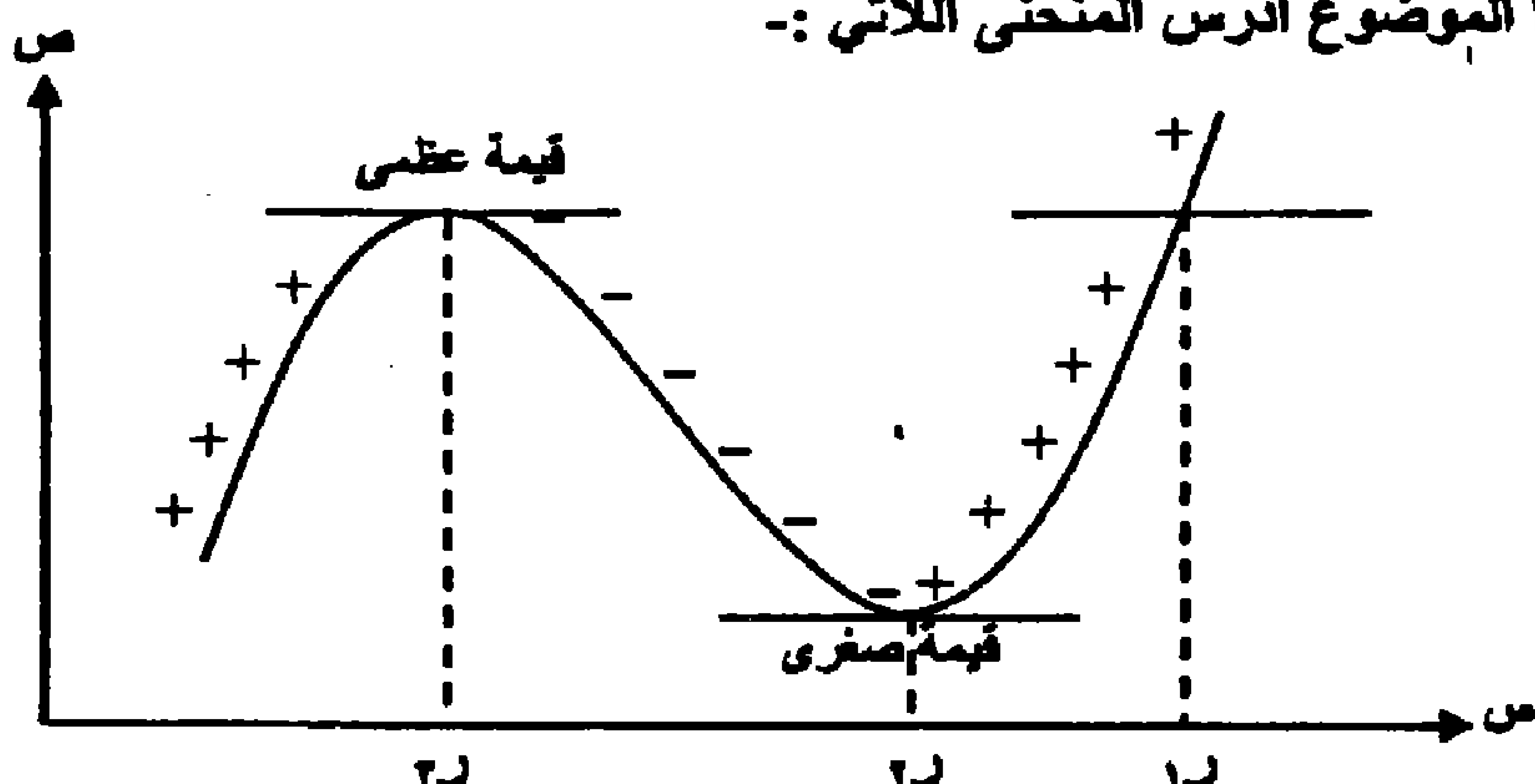
(٦) ص = $\frac{١}{٣}$ س - $\sqrt[3]{س}$

(٧) ص = س |س|

(٨) د(س) = $\begin{cases} س^2 + ٢ & \text{عندما } س \geq ١ \\ ٢س + ١ & \text{عندما } س < ١ \end{cases}$

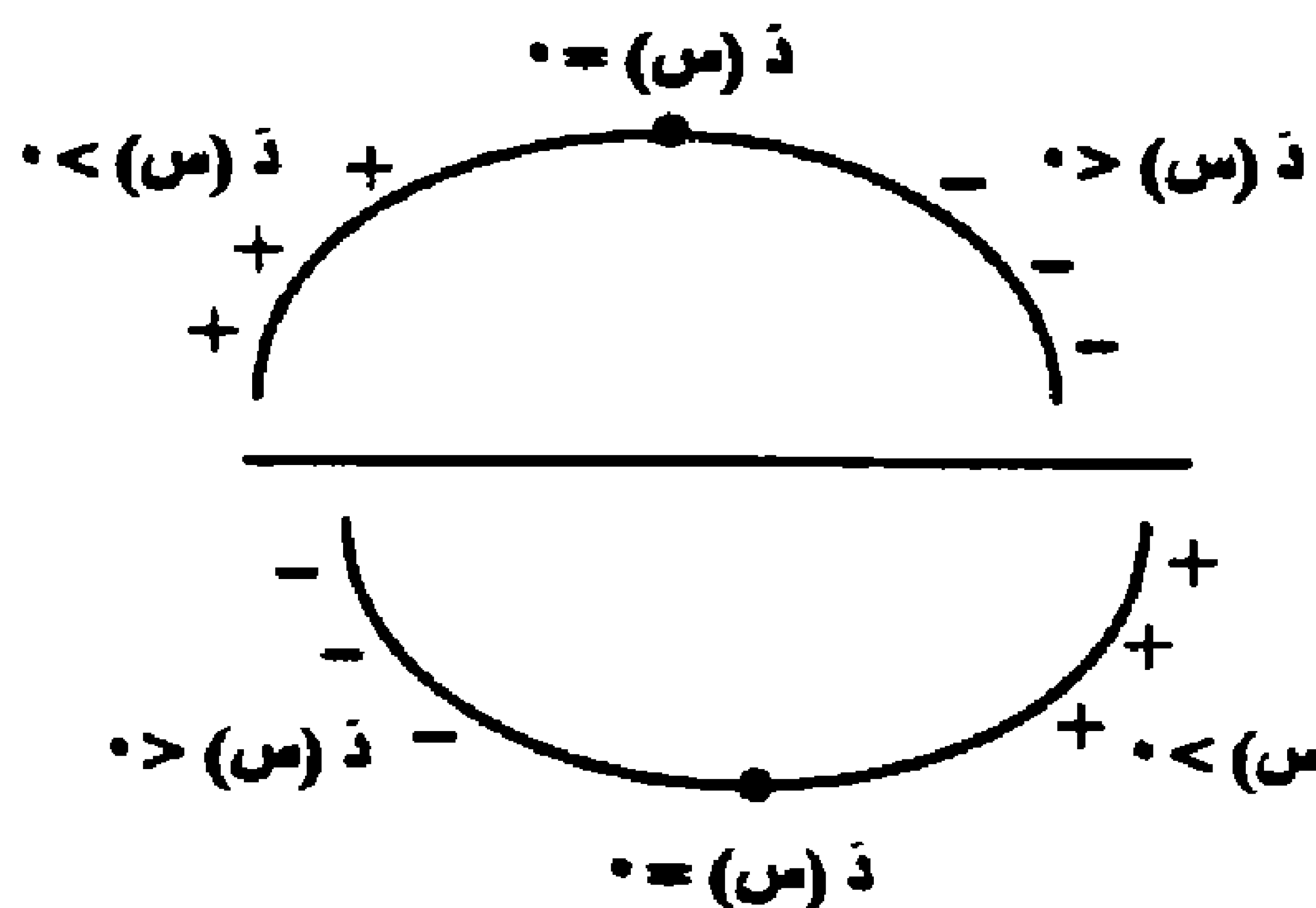
النهايات العظمى والنهايات الصغرى

لدراسة هذا الموضوع أدرس المنحنى اللآتي :-



النقطة الحرجة هى التي يكون عندها دَ (س) = ٠ أو دَ (س) غير معرفة وقد تكون نهاية عظمى و نهاية صغري أو غير ذلك حيث دَ ($ر_١$) = ٠ وهى نهاية عظمى ، دَ($ر_٢$) = ٠ وهى نهاية صغرى ، دَ ($ر_٣$) = ٠ وهى ليست عظمى ولا صغري .

لاحظ أن:

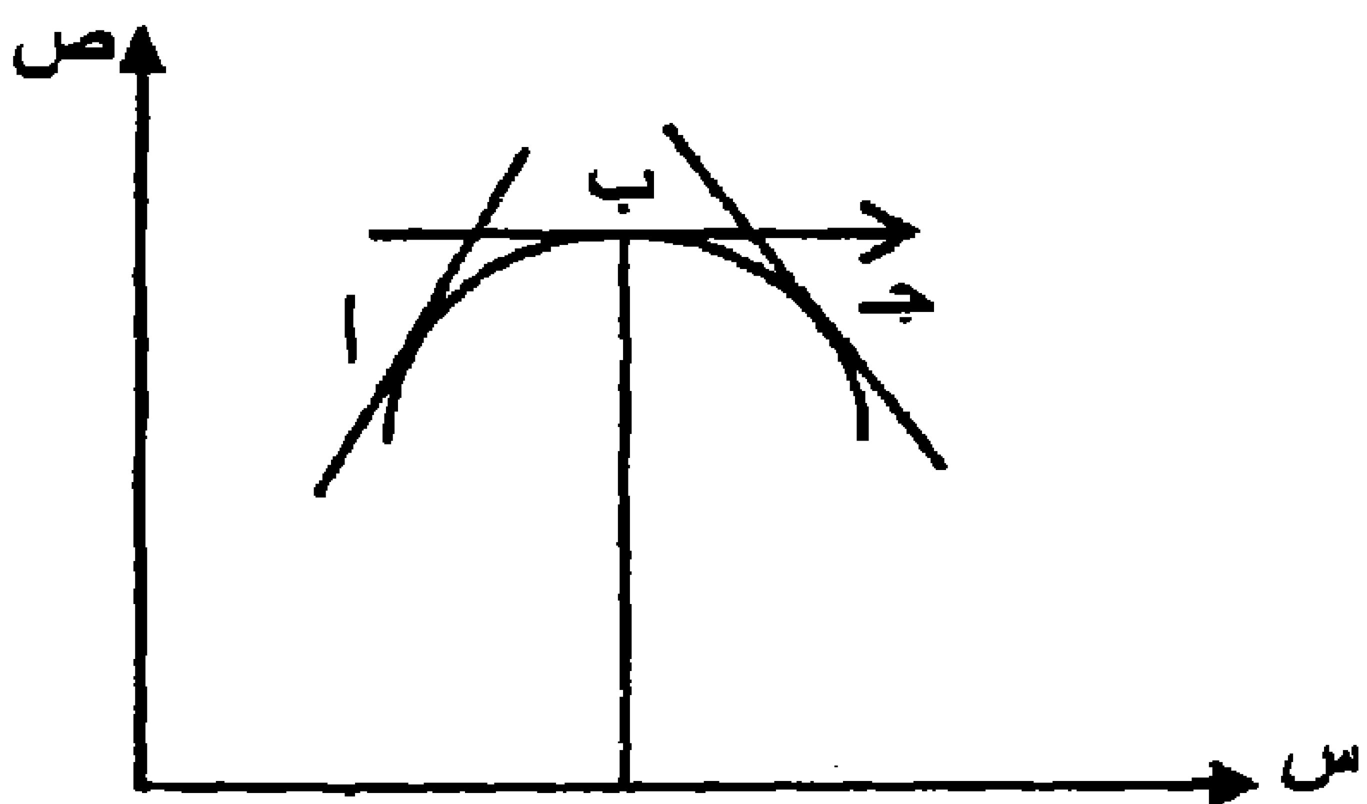


- **النهاية العظمى** هي أكبر قيمة للدالة إذا قورنت بقيمتها عند النقط الواقعة فى الجوار المباشر من كلا الجانبين . (ما قبلها وبعدها تناقص) .
- **النهاية الصغرى** هي أصغر قيمة للدالة إذا قورنت بقيمتها عند النقط الواقعة في الجوار المباشر في كلا الجانبين (ما قبلها متناقص وبعدها متزايد) .

كيفية إيجاد النهايات العظمى والصغرى للدالة :

١. نوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ للدالة .
٢. نضع $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٠ فنحصل على قيم س .
٣. نعوض بقيم س في معادلة المنحنى الأصلى فنحصل على قيم ص المناظرة فتكون $ص_١$ ، $ص_٢$ ، .... هي قيم النهايات ويكون ($س_١$ ، $ص_١$) ، ($س_٢$ ، $ص_٢$) ، .... هي موضع النهايات وتسمى النقط الحرجة .

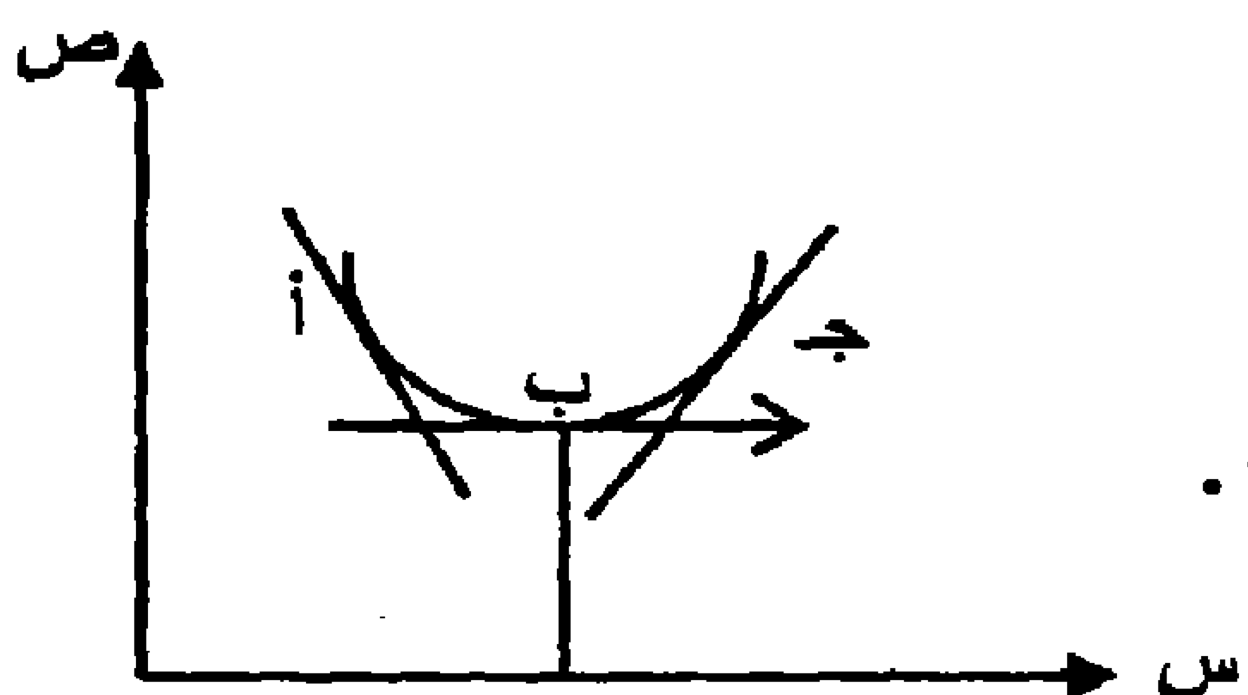
معرفة نوع النهاية :



أولاً : الاختبار الأول :-

- تأخذ قيمة أقل من س، بمقدار صغير ونعوض في صَ ونبحث إشارته .
- تأخذ قيمة أكبر من س، بمقدار صغير ونعوض في صَ ونبحث إشارته .

- فعند أ إذا كانت إشارة صَ موجبة ، عند ب إذا كانت إشارة صَ = صفر وعند جـ إذا كانت إشارة صَ سالبة .



∴ النهاية عظمى محلية .

- أما إذا كان عند أ إشارة صَ سالبة ،
عند ب إشارة صَ = صفر وعند جـ إشارة صَ موجبة .

∴ النهاية صغرى محلية .

مثال: أوجد النهايات العظمى المحلية والصغرى المحلية للدالة د(س) = س^{٣} - ٦س^{٢} +٩س +١

الحــــــل

∵ ص = س^{٣} - ٦س^{٢} +٩س +١

∴ صَ = ٣ س^{٢} - ١٢س + ٩ ∴ ٣ س^{٢} - ١٢س + ٩ = ٠ (÷ ٣)

∴ س^{٢} - ٤ س + ٣ = ٠ ∴ (س-٣) (س - ١) = ٠

∴ س = ٣ ، س = ١

اشارة $\frac{دص}{دس}$	- ∞ ← ١	١ ← ٣	٣ ← + ∞
	+ + + + + + + +	- - - - - - - - - - - -	+ + + + + + +
	دَ(٠) = + ٩	دَ(٢) = -٣	دَ(٣) = +٩

∴ عند س = ١ عظمى محلية والقيمة العظمى نعوض في الدالة الأصلية عن س = ١

∴ ص = ٥ ∴ القيمة العظمى (١ ، ٥) ، عند س = ٣ النهاية صغري محلية والقيمة الصغرى نعوض في الدالة الأصلية ∴ ص = ١ ∴ القيمة الصغرى (٣ ، ١)

استخدام المشتقة الثانية لإيجاد القيمة العظمى المطلقة والقيمة الصغرى المطلقة :

(١) نوجد صَ ثم نضع صَ = ٠ لإيجاد النقط التى تقع على المنحنى .

(٢) نوجد صً

(٣) نعوض في صً من الناتج من الخطوة (١)

فإذا كانت إشارة صً سالبة ∴ الدالة نهاية عظمى

وإذا كانت إشارة صً موجبة ∴ الدالة نهاية صغرى

مثال : أوجد النهايات العظمى والصغرى للدالة : ص = س^{٣} ـ ٦س^{٢} + ٩س + ١

الحـــــــل

∵ ص = س^{٣} ـ ٦س^{٢} + ٩س + ١

∴ صَ = ٣س^{٢} - ١٢س + ٩ ∴ ٣س^{٢} - ١٢س + ٩ = ٠ ÷ ٣

∴ س^{٢} ـ ٤ س + ٣ = ٠ ∴ (س - ١) (س - ٣) = ٠

∴ س = ١ ، س = ٣

نوجد صً : ∴ صً = ٦ س ـ ١٢

س = ١	س = ٣
صً = ٦ س- ١٢ = ٦ × ١ ـ ١٢ = - ٦ ∵ الإشارة سالبة ∴ عظمى	صً = ٦ س- ١٢ = ٦ × ٣ ـ ١٢ = + ٦ ∵ الإشارة موجبة ∴ صغرى
نعوض في الدالة الأصلية	
∴ ص = س^{٣} ـ ٦س^{٢} + ٩س + ١ = ١- ٦ + ٩ + ١ = ٥ ∴ إحداثى العظمى (١ ، ٥)	∴ ص = س^{٣} ـ ٦س^{٢} + ٩س + ١ = ٢٧- ٥٤ + ٢٧ + ١ = ١ ∴ إحداثى الصغرى (٣ ، ١)

ملاحظة :

النهايات العظمى والصغرى هي نقط الرجوع

مثال: أوجد نقط الرجوع للدالة : ص = حا س + حتا س ، س ∈ [٠ ، ٢ ط]

الحـــــل

∵ ص = حا س + حتاس ∴ صَ جتا س – جا س

بوضع صَ = ٠ ∴ حتا س – حا س = ٠

∴ حتا س = حا س ∴ طا س = ١

∴ س = ٤٥ = $\frac{ط}{٤}$ ، س = ٢٢٥ = $\frac{٥ ط}{٤}$

صً = - حا س – حتا س

س = $\frac{ط}{٤}$	س = $\frac{٥ ط}{٤}$
صً = - حا س- حتا س = - [حا $\frac{ط}{٤}$ + حتا $\frac{ط}{٤}$] = - $\frac{٢}{\sqrt{٢}}$ ∴ نهاية عظمى ($\frac{ط}{٤}$ ، $\frac{٢}{\sqrt{٢}}$)	صً = - حا س- حتا س = - [حا $\frac{٥ ط}{٤}$ + حتا $\frac{٥ ط}{٤}$] = + $\frac{٢}{\sqrt{٢}}$ ∴ نهاية صغرى ($\frac{٥ ط}{٤}$ ، $\frac{-٢}{\sqrt{٢}}$)

مثال: أوجد نقط الرجوع للدالة ص = حا س في الفترة [٠ ، ٢ط]

الحـــــل

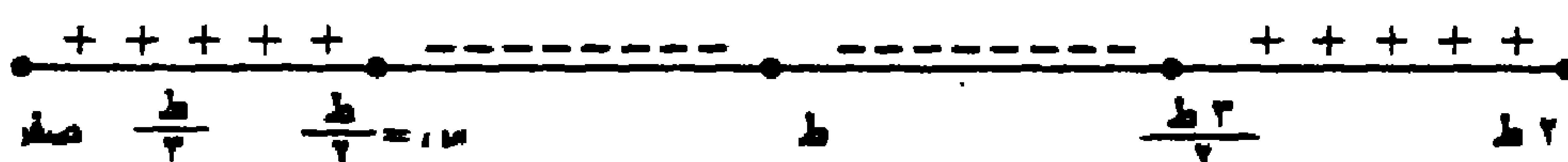
ص = حا س

∴ صَ = حتا س

بوضع صَ = ٠

∴ حتا س =٠ ∴ س = ٩٠

، س = ٢٧٠ ولتحديد ما إذا كانت عظمى أو صغرى .



∴ النهاية العظمى عندما س = $\frac{١}{٢}$ ⇐ د ($\frac{ط}{٢}$) = ١

∴ إحداثى النهاية ($\frac{ط}{٢}$ ، ١)

، النهاية الصغرى عندما س = $\frac{٣ ط}{٢}$ ⇐ د ($\frac{٣ ط}{٢}$) = -١

∴ إحداثى النهاية ($\frac{٣ ط}{٢}$ ، -١)

حل آخر باستخدام المشتقة الثانية

مثال: إذا كانت الدالة د معرفة بالمعادلة :

د(س) = ٢ حا س + حتا ٢س حيث س ∈ [٠، ٢ط] فأوجد القيمة العظمى و الصغرى للدالة د

الحـــــل

∵ ص = ٢ حا س + حتا ٢س ∴ صَ = ٢حتا س – ٢حا ٢س

، ∵ حا٢س = ٢حاس حتا س (قانون)

∴ صَ = ٢ حتا س – ٤حا س حتا س = ٢ حتا س (١- ٢حا س)

∴ ٢حتا س (١- ٢حا س) = ٠

إما حتا س = صفر ∴ س = ٩٠ أو ٢٧٠

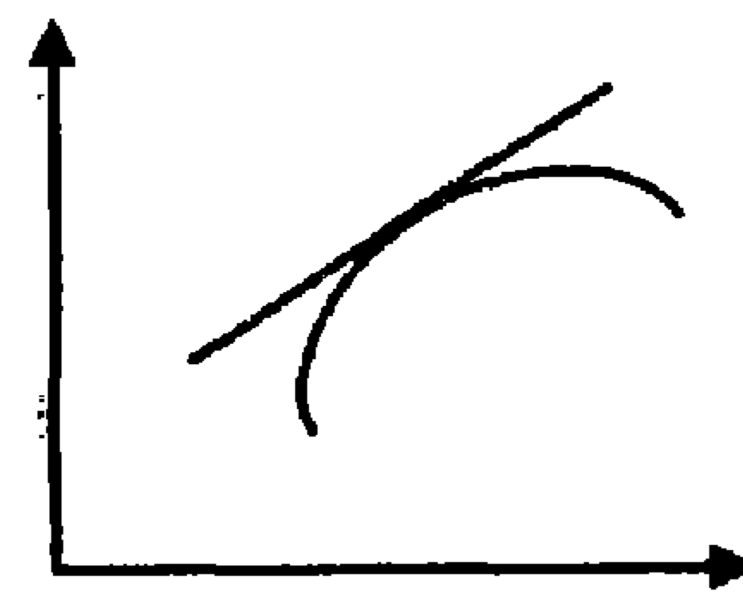
أو ١ – ٢حا س = ٠ ∴ حا س = $\frac{1}{2}$ ∴ س = ٣٠ أو ١٥٠

∴ صً = -٢حا س – ٤حتا ٢س

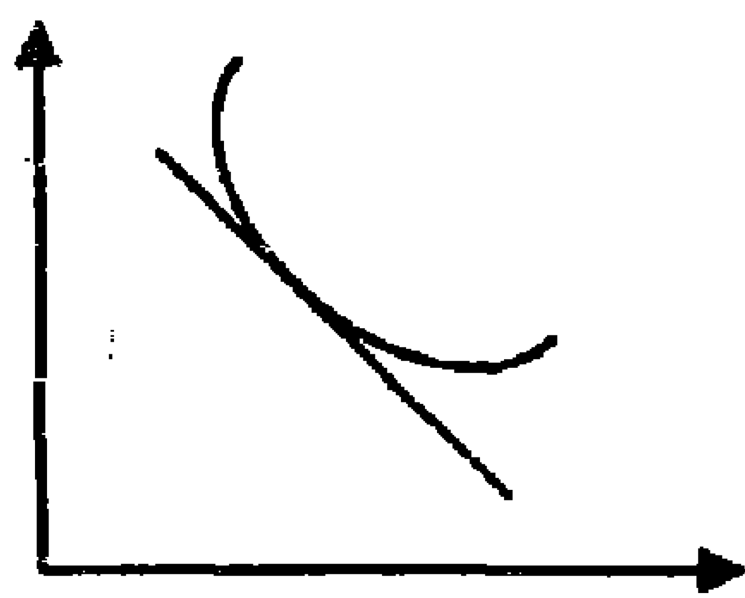
س= ٣٠	س= ١٥٠	س= ٩٠	س = ٢٧٠
∴ صً = -٢حا٣٠- ٤حتا٢×٣٠ = -٣ صغرى	∴ صً = -٢حا١٥٠ - ٤حتا ٢×١٥٠ = -٣ صغرى	∴ صً = -٢حا٩٠ - ٤حتا ٢×٩٠ = ٢ صغرى	∴ صً = -٢حا٢٧٠ - ٤حتا ٢×٢٧٠ = ٦ صغرى

التحدب إلي أعلي والتحدب إلي أسفل ونقط الانقلاب :-

إذا كان منحنى الدالة متصلاً في فترة] أ ، ب [فإن : -



المنحنى محدب لأعلي
إذا كان أسفل مماساته



المنحنى محدب إلي أسفل
إذا كان أعلى مماساته

استخدام المشتقة الثانية في اكتشاف نوع التحدب

إذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق مرتين في فترة فإن:

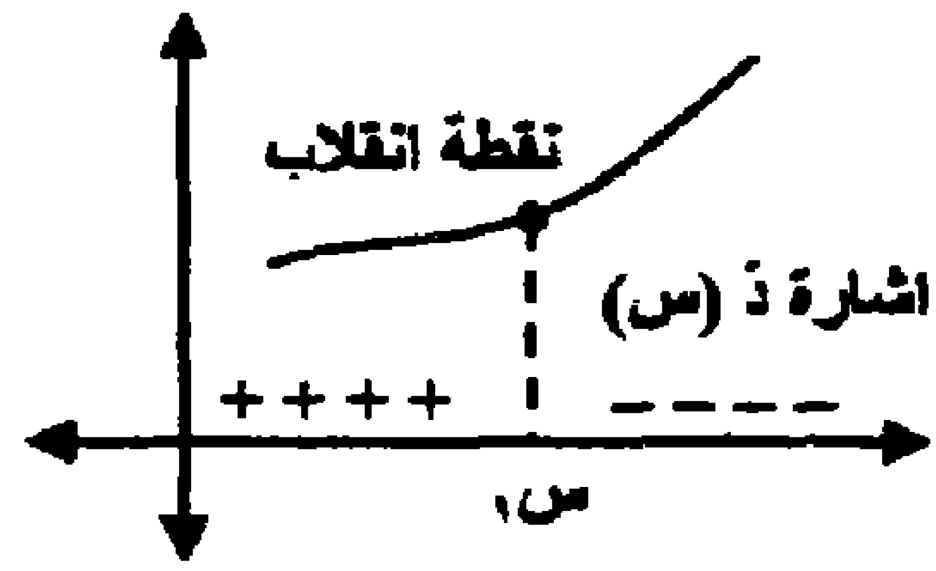
١. المنحنى يكون محدباً لأعلى في الفترة إذا كانت دً (س) > ٠

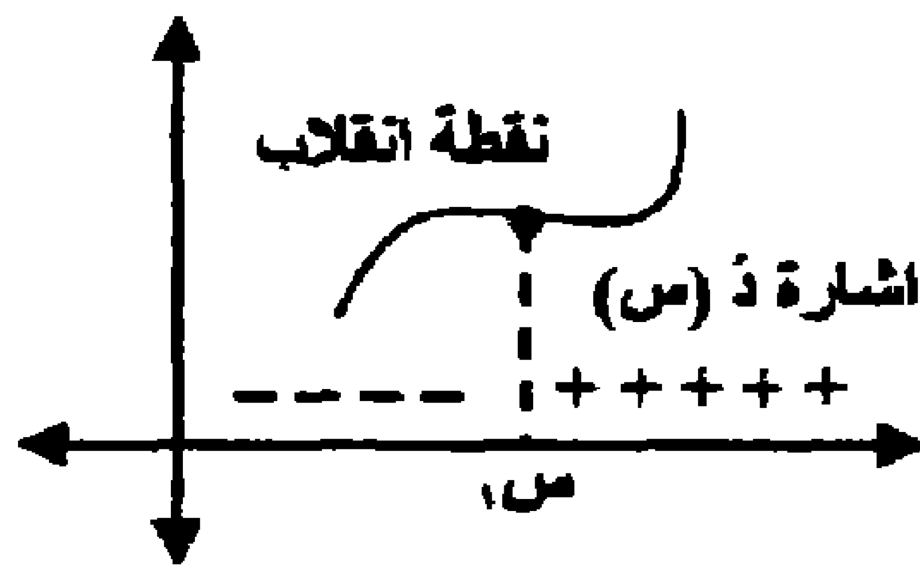
٢. المنحنى يكون محدباً لأسفل في الفترة إذا كانت دً (س) < ٠

نقطة الانقلاب :-

هى النقطة التى تفصل بين فترة تحدب إلي أعلي وفترة تحدب إلي أسفل وعندها يمكن رسم مماس يوازى محور السينات .

- ويكون للدالة نقطة إنقلاب عند س١ إذا كان : دً (س) = ٠ وإشارة دً (س) يمين النقطة خلافها يسار النقطة .





طريقة الكشف عن نقط الأنقلاب : -

(١) نوجد صَ (٢) نوجد صً

(٣) نضع صً = ٠ لإيجاد النقطة الحرجة عند صً

(٤) نختبر كل من النقط باستعمال الاختبار التالي وهو يعتمد على إشارة صً قبل وبعد النقطة .

بعدها	قبلها	إشارة صً	النتيجة
صً = −	صً = + (س١)	موجبة قبل س١ سالبة بعد س١	توجد نقط الانقلاب
صً = +	صً = − (س١)	سالبة قبل س١ موجبة بعد س١	توجد نقط الانقلاب
صً = + صً = −	صً = + صً = − (س١)	صً لم تغير إشارتها	لا توجد نقط انقلاب

مثال : ابحث وجود نقطة انقلاب للمنحنى :

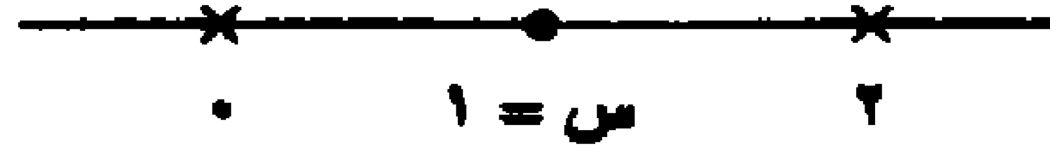
ص = س^{٣} -٣س^{٢}- ٢٤ س + ٧٢ موضحاً اتجاه المنحنى

الحــــــــــل

∵ ص = س^{٣} -٣س^{٢}- ٢٤ س + ٧٢ ∴ صَ = ٣س^{٢}- ٦ س - ٢٤

، صً = ٦س – ٦ بوضع صً = ٠ ∴ ٦س – ٦ = ٠

∴ ٦(س - ١) = ٠ ∴ س – ١ = ٠ ∴ س = ١



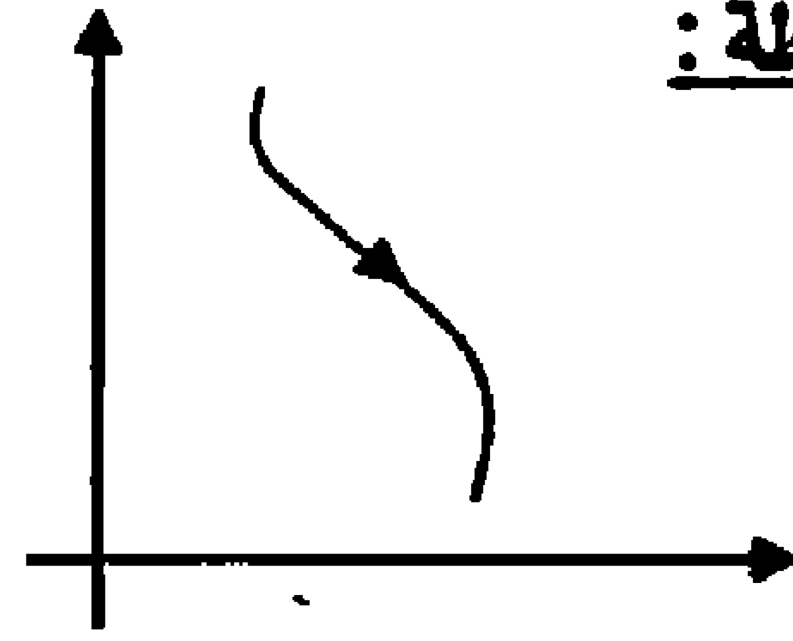
نعوض في صً عندما س = ٠ ∴ صً = -٦

عندما س =٢ ∴ صً = + ٦

∴ تغيرت الإشارة حول س = ١ ∴ توجد نقطة انقلاب

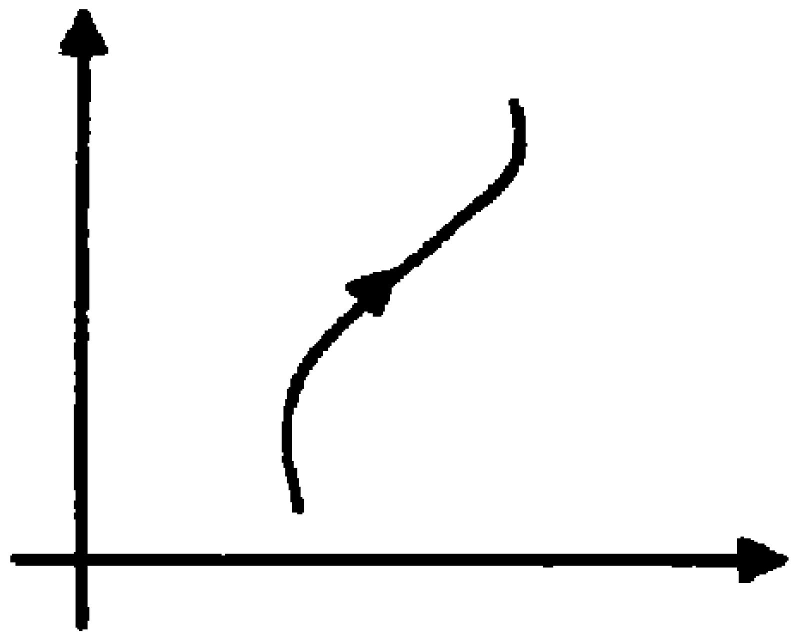
، ∵ صً إشارته + حيث ص$^{≡}$ = +٦ ∴ المنحنى ينقلب من أسفل إلى أعلى

ملاحظة :



ص$^{≡}$ اشارتها -

المنحنى ينقلب من أعلى لأسفل



ص$^{≡}$ اشارتها +

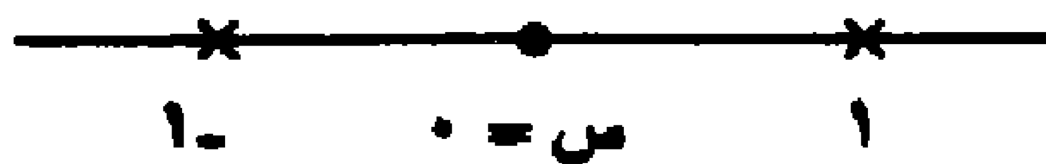
المنحنى ينقلب من أسفل لأعلى

مثال: أوجد نقط الانقلاب للمنحنى ص = س^{٤}

الحــــــــــل

∵ ص = س^{٤} ∴ صَ = ٤س^{٣} ∴ صً = ١٢س^{٢}

∴ صً = ٠ ⟸ ١٢ س^{٢}=٠ ∴ س^{٢} = ٠ ∴ س = ٠



عندما س = -١

∴ صً = +١٢ ، عندما س = ١ ∴ صً = + ١٢

∴ لا توجد نقط انقلاب

مثال: أوجد نقط الرجوع والانقلاب للدالة ص = حا^{2} س

الحـــــــل

∵ ص = حا^{2} س ∴ صَ = ٢حاس حتاس ∴ صَ = حا٢ س

بوضع صَ = ٠ ∴ حا٢س = ٠ ∴ ٢ س = ٠ ∴ س = ٠

٢س = ١٨٠ ⇐ س = ٩٠

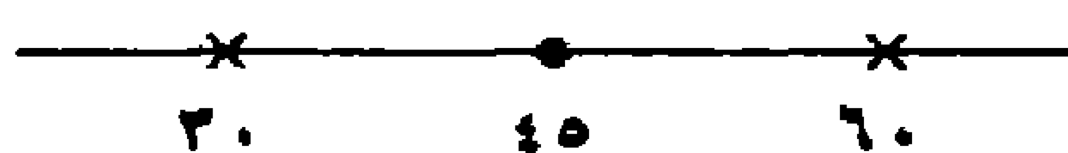
نوجد صً ∴ صً = ٢حتا ٢س

عندما س = ٠ ∴ صً = ٢حتا ٠ = + ٢ نهاية صغرى

عندما س = ٩٠ ∴ صً = ٢حتا ١٨٠ = - ٢ نهاية عظمى

لإيجاد نقط الانقلاب :

نضع صً = ٠ ∴ حتا ٢ س = ٠ ∴ ٢س = ٩٠ ∴ س = ٤٥



∵ صً = ٢حتا ٢س عندما س = ٣٠

∴ صً = ٢ حتا ٢ × ٣٠ = ٢ حتا ٦٠ = ٢ × $\frac{١}{٢}$ = ١

عندما س = ٦٠ ∴ صً = ٢ حتا ٢ × ٦٠ = ٢حتا ٢ × ٦٠ = ٢ حتا ١٢٠ = -١

∴ توجد نقطة انقلاب عند س = ٤٥

ص = (حا٤٥)^{2} = ($\frac{١}{\sqrt{٢}}$)^{2} = ($\frac{١}{٢}$) ∴ نقطة الانقلاب ($\frac{ط}{٤}$ ، $\frac{١}{٢}$)

مثال: أوجد قيم كل من أ ، ب ، ج بحيث يحقق المنحنى ص = أ س^{3} + ب س^{2} + جـ س الشروط التالية : له نقطة انقلاب عند س = $\frac{١}{٢}$ وله مماس أفقي عند س=-١ ويمر بالنقطة (١ ، ١٣)

الحـــــــل

ص = أ س^{3} + ب س^{2} + جـ س ---- (١) ، $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٣ أ س٢+ ٢ب س + جـ ---- (٢)

، صً = ٦أ س + ٢ ب ---- (٣) ، ∵ س = $\frac{١}{٢}$ نقطة انقلاب

∴ صً عندما س = $\frac{١}{٢}$ = ٠ ، من (٣) ∴ ٣ أ + ٢ ب = ٠ ---- (٤)

، عند س = -١ مماس أفقي ∴ صَ عندما س =-١ = ٠

من (٢) ∴ ٣أ - ٢ب + جـ = ٠ ---- (٥)

، ∵ المنحنى يمر بالنقطة (١،١٣) فهي تحقق معادلته

، من (١) ∴ أ + ب + جـ = ١٣ ---- (٦) ، من (٥) ، (٦) بالطرح

∴ ٢أ - ٣ب = - ١٣ ، من (٤) ب = - $\frac{٣}{٢}$ أ ∴ ٢ أ + $\frac{٩}{٢}$ أ = -١٣

∴ أ = -٢ ، ب =٣ وبالتعويض في (٦) ∴ جـ = ١٢

تطبيقات عملية على القيم العظمى والصغرى للدالة

المسائل من هذا النوع تعرف بمسائل إيجاد القيم العظمى (أو الصغرى) ، كما أن هذه المسائل تسمى فى كثير من الأحوال بمسائل التعظيم نظرا لأن الغرض من حلها هو إيجاد القيمة الأكثر موافقة أو الأفضل . وفى كل المسائل سنعتبر أن القيمة العظمى للدالة هى القيمة العظمى المحلية ، القيمة الصغرى للدالة هى القيمة الصغرى المحلية .

وعلى ذلك نتبع الخطوات الآتية عند حل هذه التمارين :

(١) نفرض رمزا للمتغير المطلوب قيمته العظمى أو الصغرى وليكن ص أو ح .

(٢) نفرض رموزا للمتغيرات الأصلية مثل س، ع ، ل ، ....

(٣) نوجد القانون أو العلاقة الذي يربط المتغير التابع ص والمتغيرات الأصلية باستخدام قوانين المساحات أو الحجوم أو نظرية هندسية أو التشابه.

(٤) نعبر عن جميع المتغيرات الأصلية بدلالة أحدها س مثلاً لنحصل على ص كدالة في س أي ص = د(س) .

(٥) نوجد صَ ثم نضع صَ = ٠ لإيجاد القيم :

[أ] التي تعطى (أكبر قيمة) نهاية عظمى .

[ب] التي تعطى (أصغر قيمة) نهاية صغرى .

بعض القوانين الهامة :

١- محيط المستطيل = (الطول + العرض) × ٢ ، مساحة المستطيل = الطول × العرض

٢- محيط المربع = ٤ طول ضلعه ، مساحة المربع = طول الضلع × نفسه

٣- محيط المعين = ٤ طول ضلعه ، مساحة المعين = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب قطريه

٤- محيط المثلث = مجموع أطوال أضلاعه ، مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة ×الارتفاع
مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب ضلعين متجاورين × جيب الزاوية بينهما

٥- محيط المثلث المتساوي الأضلاع = ٣ل ، مساحته = $\frac{١}{٢}$ ل^{٢}جا ٦٠

٦- محيط الدائرة = ٢ ط نق و مساحتها ط نق^{٢}

٧- حجم المكعب = ل^{٣} ، مساحته الجانبية الكلية = ٦ ل^{٢}

٨- حجم متوازي المستطيلات = س ص ع ، مساحته = ٢ (س ص + ص ع + ع س)

٩- حجم الاسطوانة = ط نق^{٢}ع ، مساحتها الجانبية ٢ ط نق والكلية م ج +٢ مساحة القاعدة

١٠- حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ ط نق^{٢} ع ، مساحته الجانبية ط نق ل ، والكلية = ط نق ل + ط نق^{٢}

١١- حجم الكرة = $\frac{٣}{٤}$ ط نق^{٣} ، مساحته السطحية ٤ ط نق^{٢}

مثال : عددان موجبان مجموعهما ٢٠ أوجد العددين إذا كان حاصل ضربهما اكبر ما يمكن .

الحــــــــل

نفرض ان العددين س، ٢٠ - س

حاصل الضرب ح = س (٢٠ - س) = ٢٠س - $س^2$

∴ $\frac{ء ح}{ء س}$ = ٢٠ - ٢س = صفر   ∴ ٢٠ = ٢س   ∴ س = ١٠

∴ العددان ١٠ ، ١٠

مثال : أوجد حجم اكبر اسطوانة دائرية قائمة مساحتها السطحية ٢٤ ط وحدة مربعه .

الحــــــــل

المساحة السطحية للاسطوانة = ٢ ط نق ع + ٢ ط $نق^2$

∴ ٢٤ = ٢ ط نق ع + ٢ ط $نق^2$ بالقسمة علي ٢ ط

∴ ١٢ = نق ع + $نق^2$ ----- (١)

، ∵ حجم الاسطوانة = ط $نق^2$ع   ----- (٢)

من (١) ع = $\frac{١٢ - نق^2}{نق}$ ----- (٣)

نعوض (٣) في (٢)   ∴ ح = ط $نق^2$ × $\frac{١٢ - نق^2}{نق}$

∴ ح = ١٢ ط نق – ط $نق^3$

وعندما يكون الحجم أكبر ما يمكن ∴ $\frac{ء ح}{ء س}$ = ٠

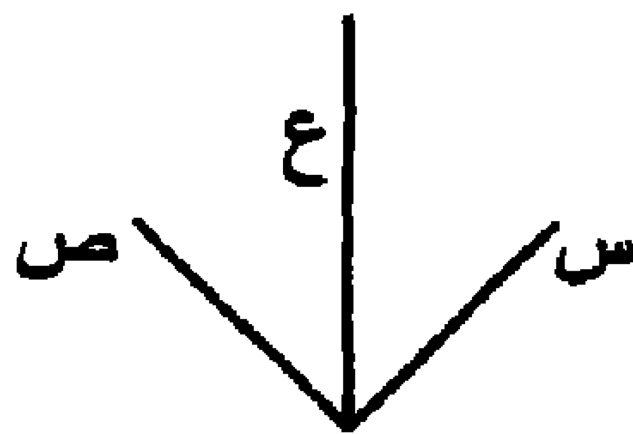
∴ $\frac{ء ح}{ء س}$ = ١٢ ط – ٣ ط $نق^2$ = ٠

∴ ٣ ط $نق^2$ = ١٢ ط   ∴ $نق^2$ = ٤   ∴ نق = ٢

∴ ح = ١٢ ط (٢) – ط $(٢)^3$ = ١٦ ط وحدة مكعبة

مثال: متوازى مستطيلات قاعدته مربعة الشكل مجموع أبعاده الثلاثة ٩٠سم – أوجد أبعاده ليكون حجمه اكبر ما يمكن .

الحــــــــل



نفرض أن أبعاده هى س ، س ، ٤ سم

∴ ٢س + ع = ٩٠   ∴ ع = (٩٠ - ٢س)

∵ حجم متوازى المستطيلات = مساحة القاعدة × الارتفاع

ح (س) = س^{٢} (٩٠ - ٢س) = ٩٠س^{٢} – ٢س^{٣}

∴ حَ (س) = ١٨٠ س – ٦ س^{٢} = ٦س (٣٠ - س)

حَ (س) = ٠ عند س = ٣٠ ، س = ٠ مرفوض

∴ حً (س) = ١٨٠ – ١٢س ∴ حً (٣٠) = ١٨٠ - ٣٦٠ = - ١٨٠ < ٠

∴ الحجم يكون أكبر ما يمكن عندما س = ٣٠ سم ∴ ع = ٩٠ - ٦٠ = ٣٠ سم

∴ الأبعاد هى ٣٠ ، ٣٠ ، ٣٠ سم أى يصبح مكعب

مثال: اسطوانة دائرية قائمة بدون غطاء حجمها ثابت صنعت قاعدتها من النحاس وسطحها الجانبى من الألمونيوم فإذا كان ثمن تكاليف الوحدة المربعة من النحاس ٦ أمثال ثمن تكاليف الوحدة المربعة من الألمونيوم .

- فبرهن أن: تكاليف هذه الأسطوانة تكون أقل ما يمكن عندما ارتفاعها مساوياً ٣ أمثال قطر القاعدة .

الحـــــــــل

نفرض س نصف قطر قاعدة الأسطوانة ، ع ارتفاعها

∴ حجم الاسطوانة = ط س^{٢} ع = ك ---- (١) حيث ك ثابت

نفرض ثمن تكاليف الوحدة المربعة من الألمونيوم ث فإن ثمن تكاليف الوحدة المربعة من النحاس = ٦ ث .

وإذا كان د(س) ثمن تكاليف الأسطوانة فإن: د(س) = ط س^{٢} × ٦ث + ٢ ط س ع × ث

= ٢ث (٣ط س^{٢} + $\frac{ك}{س}$) [لاحظ ط س ع = $\frac{ك}{س}$ من (١)]

دَ (س) = ٢ث (٦ ط س - $\frac{ك}{س^{٢}}$) ---- (٢)

نضع دَ (س) = ٠ ∴ ٦ ط س = $\frac{ك}{س^{٢}}$ ∴ ٦س = $\frac{ك}{ط س^{٢}}$ = ع من (١)

∴ ارتفاع الاسطوانة = ثلاثة أمثال قطر القاعدة

وبالتالي فإن دً (س) = ٢ ث (٦ ط + $\frac{٢ ك}{س^{٣}}$) وهى موجبة دائماً

أي أن د(س) تكون أصغر ما يمكن عندئذ • بمعنى أن تكاليف الأسطوانة أقل ما يمكن عندما يكون الارتفاع ثلاثة أمثال قطر القاعدة .

مثال: مصنع ينتج أجهزة تليفزيون عددها س جهازاً كل يوم وتتكلف ($\frac{١}{٢}$ س^{٢} + ٣٥ س + ٢٥) جنيهاً ويبيع الجهاز بسعر (٥٠ - $\frac{١}{٤}$ س) جنيهاً – أوجد عدد ما يجب أن ينتجه المصنع من الأجهزة يومياً حتى يحقق أقصى ربح وأثبت أن تكاليف إنتاج الوحدة حينئذ يكون أقل ما يمكن.

الحــــــــل

الفكرة: الربح = ثمن البيع – التكاليف ، ثمن البيع = عدد الأجهزة × ثمن بيع الجهاز

نفرض أن الربح = ص جنيهاً

∴ ص = س (٥٠- $\frac{١}{٢}$ س) – ($\frac{س^{٢}}{٤}$ + ٣٥ + ٢٥)

= ٥٠ س- $\frac{١}{٢}$ س – ($\frac{١}{٤}$ س^{٢}+ ٣٥س + ٢٥)

∴ص = - $\frac{٣}{٤}$ س^{٢} + ١٥س - ٢٥

∴ $\frac{دص}{دس}$ = - $\frac{٣}{٢}$ س + ١٥   ∴ $\frac{دص}{دس}$= ٠ عندما

- $\frac{٣}{٢}$ س + ١٥=٠   أي س = ١٠

، ص̈ = - $\frac{٣}{٢}$ < ٠   ∴ ص تكون نهاية عظمي عندما س = ١٠

وتكلفة (ت) إنتاج الوحدة = التكلفة الكلية ÷ عدد الأجهزة

= ($\frac{١}{٤}$ س^{٢}+٣٥+٢٥) ÷ س = $\frac{١}{٤}$ س + ٣٥ + ٢٥س$^{-١}$

∴ $\frac{دت}{دس}$ = ٠ عندما $\frac{١}{٤}$ - $\frac{٢٥}{س^{٢}}$ و عند س =٠   أي س = ١٠

∴ $\frac{ء^{٢}ت}{ء س^{٢}}$ = $\frac{٥٠}{س^{٣}}$ وعندما س = ١٠ تكون $\frac{ء^{٢}ت}{ء س^{٢}}$ > ٠

∴ ت نهاية صغرى عند س = ١٠

مثال: ينتج مصنع السلام للطماطم كمية من عصير الطماطم قدرها ص طناً ومن الطماطم الأقل جودة كمية قدرها س طناً حيث ص = $\frac{٤٠ - ٥ س}{١٠ - س}$ وإذا كان سعر النوع الجيد ضعف سعر أنواع الأقل جودة – فأوجد الكمية إلى يجب على المصنع إنتاجها من كل صنف حتى يحصل المصنع على أكبر إيراد .

الحـــــــل

إيراد المصنع م = ص × ٢ أ + س × أ حيث أ سعر طن الطماطم الأقل جودة

$$= ٢ أ \times \frac{٤٠ - ٥ س}{١٠ - س} + س \times أ$$

$$\frac{ءم}{ءس} = ٢ أ \times \frac{(١٠ - س)(-٥) - (٤٠ - ٥ س)(-١)}{(١٠ - س)^{٢}} + أ = \frac{-١٢٠ أ}{(١٠ - س)^{٢}} + أ$$

$$، \frac{ءم}{ءس} = ٠ \qquad \therefore (١٠ - س)^{٢} = ٢٠$$

$\therefore$ ١٠ - س = $\pm ٢\sqrt{٥}$ $\qquad \therefore$ س = ١٠ $\pm \sqrt{٥}$ $\qquad$ أي س = ١٠ $\pm$ ٢ × ٢,٢

$\therefore$ س = ٥,٦ أ، س = ١٤,٤ ، $\frac{ء^{٢}م}{ءس^{٢}} = \frac{-١٤٠ أ}{(١٠ - س)^{٢}}$ = عدد سالب

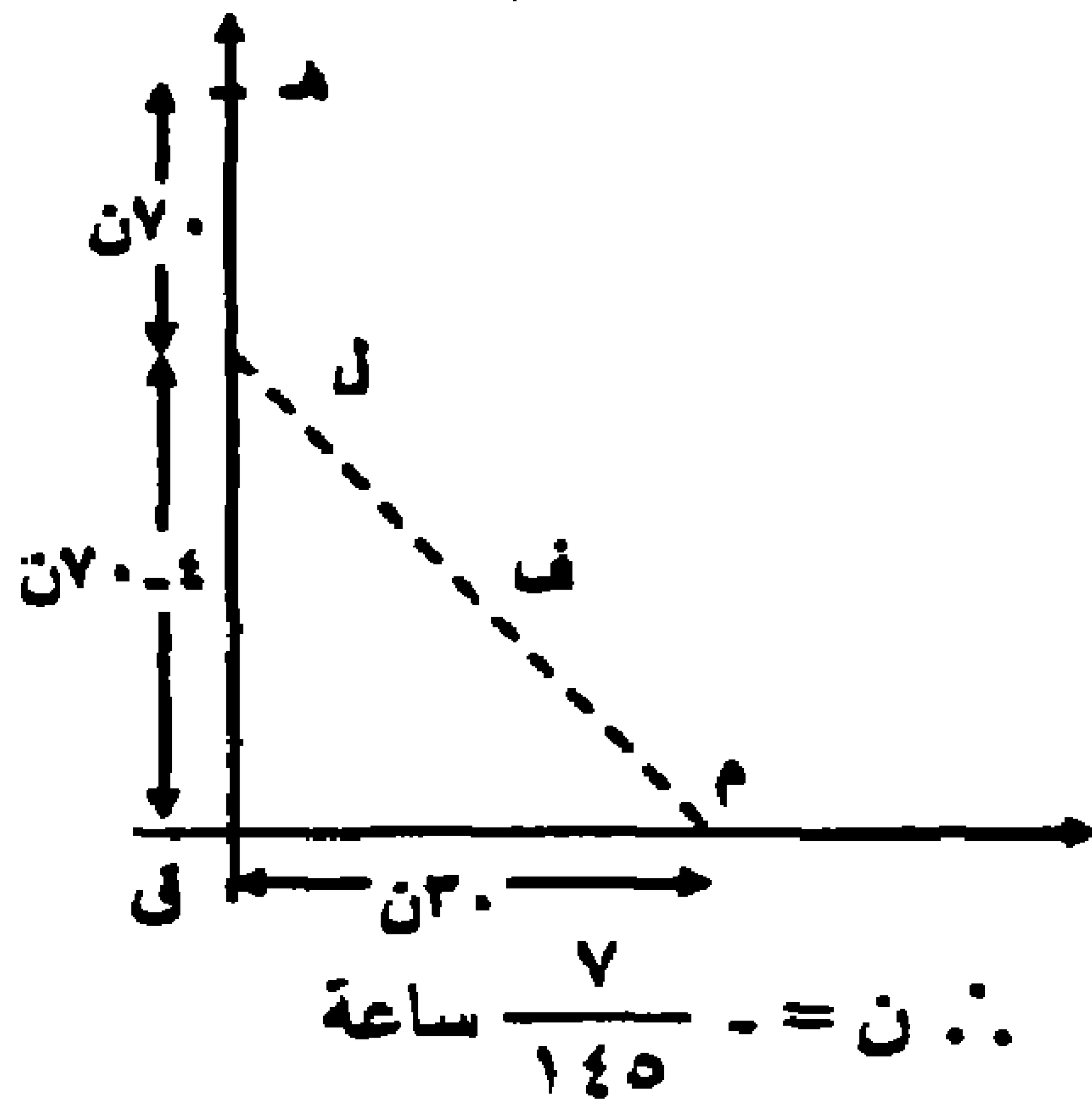
عند س = ٥,٦ طن تقريباً $\qquad \therefore$ عند س = ٥,٦ يكون إيراد المصنع أكبر ما يمكن

وعندها ص = $\frac{٤٠ - ٢٨}{١٠ - ٥,٦} = \frac{١٢}{٤,٤} = \frac{٣٠}{١١} = ٢,٧$ طن

<u>مثال</u>: طريقان أحدهما يتجه من الغرب إلى الشرق ، الآخر يتجه من الشمال إلي الجنوب يتقاطعان في نقطة ق . فإذا مرت سيارة أ بالنقطة ق عند الساعة الواحدة ظهراً متجهة نحو الشرق بسرعة منتظمة قدرها ٣٠ كم/س وفي نفس اللحظة مرت سيارة ب بنقطة تبعد ٤ كيلو مترات شمال النقطة ق متجهة جنوبياً بسرعة منتظمة قدرها ٧٠كم/ س – أوجد الزمن إلى تكون فيه المسافة بين السيارتين أقصر ما يمكن .

الحـــــــل

عند الساعة الواحدة كانت السيارة أ عند النقطة ق والسيارة ب عند النقطة هـ التى تقع علي بعد ٤ كم إلي الشمال من ق وبعد زمن ن ساعة قطعت السيارة أ مسافة قدرها ٣٠ ن كم شرقاً وقطعت السيارة ب مسافة ٧٠ ن كم جنوبياً فتكون المسافة بين السيارتين :



$$ف = \sqrt{(٣٠ن)^{٢} - (٤ - ٧٠ن)^{٢}}$$

$$\therefore ف^{٢} = ٥٨٠٠ ن^{٢} - ٥٦٠ ن - ١٦$$

$$\therefore ف \frac{ءف}{ءن} = ١١٦٠٠ - ٥٦٠$$

$$\therefore \frac{ءف}{ءن} = \frac{٥٨٠٠ - ٢٨٠}{\sqrt{(٣٠ن)^{٢} - (٤ - ٧٠ن)^{٢}}}$$

$\therefore \frac{ءف}{ءن} = ٠$ عندما ٥٨٠٠ ن – ٢٨٠ = ٠ $\qquad \therefore$ ن = $\frac{٧}{١٤٥}$ ساعة

، $\because \frac{ءف}{ءن} > ٠$ عند ن = $\frac{٧}{١٤٥}$ $\qquad \therefore$ عند $\frac{٧}{١٤٥}$ ساعة تكون ف أقل ما يمكن

مثال: يمر تيار كهربى في ملف طول نصف قطره = أ فإذا وضع مغناطيس صغير بحيث يكون محوره عموديا على مستوى الملف ماراً بمركزه – وكان (ع) هو بعد المغناطيس عن المستوى المذكور عند لحظة ما . وكانت القوة المؤثرة على المغناطيس بواسطة التيار تتناسب مع $\frac{\text{ع}}{(\text{ع}^{٢}+\text{أ}^{٢})^{\frac{٥}{٢}}}$ - فلوجد ع بحيث تكون القوة أكبر ما يمكن .

الحـــــــل

$\because$ ق = ث × $\frac{\text{ع}}{(\text{ع}^{٢}+\text{أ}^{٢})^{\frac{٥}{٢}}}$

$\therefore \frac{\text{ءق}}{\text{ءع}} = \frac{\text{ث}(\text{ع}^{٢}+\text{أ}^{٢})^{\frac{٣}{٢}}(\text{أ}^{٢}-٤\,\text{ع}^{٢})}{(\text{ع}^{٢}+\text{أ}^{٢})^{٥}}$

$\therefore \frac{\text{ءق}}{\text{ءع}} = ٠$ عندما $\text{ع}^{٢} = \frac{١}{٤}\,\text{أ}^{٢} \Leftarrow \text{ع} = \frac{١}{٢}\,\text{أ}$

إشارة $\frac{\text{ءق}}{\text{ءع}}$:

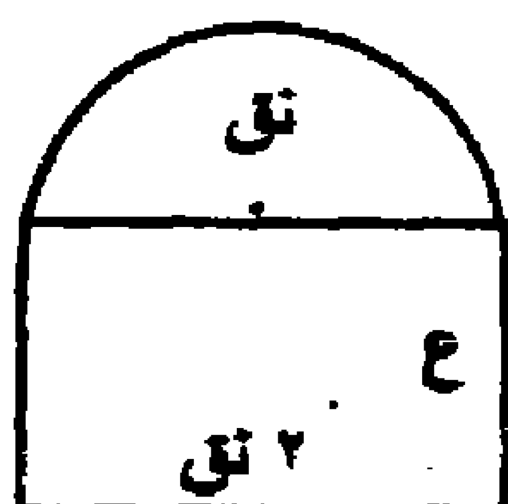
+ + + + + + + $\frac{١}{٢}$ أ - - - - - -

$\therefore$ ق تتزايد في الفترة [٠ ، $\frac{\text{أ}}{٢}$] وتتناقص بعد ذلك

$\therefore$ ق تكون أكبر ما يمكن عندما ع = $\frac{١}{٢}$ أ

مثال : نافذة زجاجية على هيئة مستطيل يعلوه نصف دائرة فإذا كان محيط تلك النافذة ٣٦ قدم – فأوجد نصف قطر الدائرة التى تجعل النافذة تسمح بدخول أكبر كمية من الضوء .

الحـــــــل



نفرض أن نصف قطر الدائرة = نق

$\therefore$ طول المستطيل = ٢ نق ونفرض عرضه ع

محيط النافذة = ٢ ع + ٢ نق + ط نق^{٢} = ٣٦

$\therefore$ ع = $\frac{٣٦ - ٢\text{نق} - \text{ط نق}}{٢}$ ---- (١)

مساحة النافذة :

م = مساحة المستطيل + مساحة نصف دائرة

م = ٢ نق ع + ط نق^{٢} ---- (٢)

ومن(١) بالتعويض في (٢)

$\therefore$ م = ٢ نق $\left(\frac{٣٦ - ٢نق - ط نق}{٢}\right) + \frac{١}{٢}$ ط نق^٢

م = ٣٦ نق – نق^٢ - $\frac{١}{٢}$ ط نق^٢

$\therefore \frac{ءم}{ءنق}$ = ٣٦ – ٢ نق – ط نق   م أكبر ما يمكن $\frac{ءم}{ءنق}$ = ٠

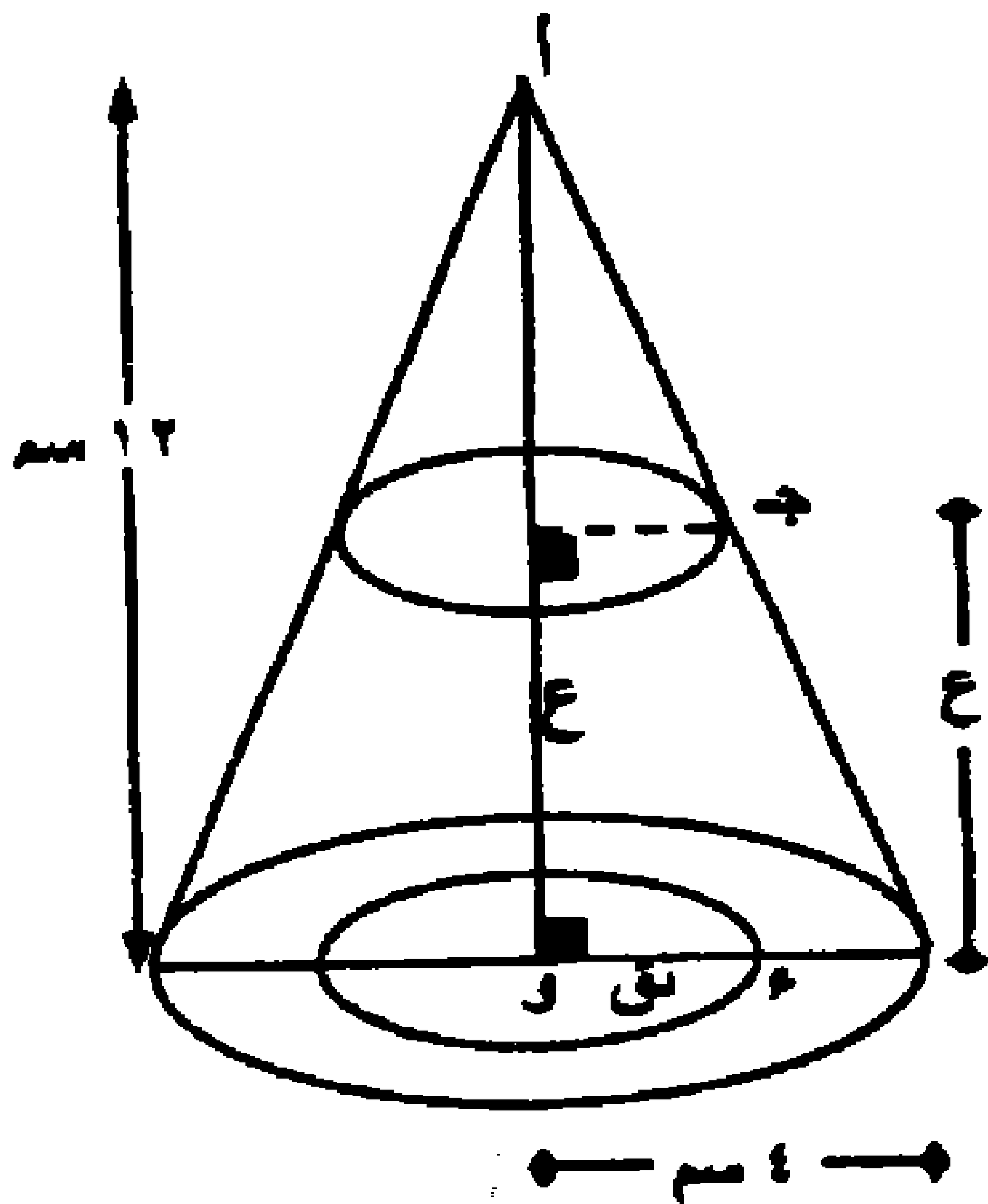
$\therefore$ ٣٦ – ٢ نق – ط نق = ٠ $\therefore$ نق (٢ + ط) = ٣٦

$\therefore$ نق = $\frac{٢ + ط}{٣٦}$ قدم

مثال: أوجد أكبر حجم لأسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل مخروط دائرى قائم ارتفاعه ١٢سم ونصف قطر قاعدته ٤ سم علماً بأن الأسطوانة والمخروط لهما نفس المحور .

الحـــــــل

نفرض ان ارتفاع الاسطوانة ع ونصف قطر قاعدتها = نق



$\therefore$ حجم الاسطوانة ح = ط نق^٢ ع ---- (١)

ولكن من تشابه $\Delta\ \Delta$ أ ب و ، جـ ب ء

$\frac{٤}{١٢} = \frac{٤ - نق}{٤}$

$\therefore$ ع = ٣ (٤- نق) ---- (٢)

ومن (٢) بالتعويض في (١)

$\therefore \frac{ءح}{ءنق}$ = ٣ ط (٨ نق – ٤ نق^٢)

$\frac{ءح}{ءن} = \frac{ءح}{ءنق} \times \frac{ءنق}{ءن}$

= ٣ ط (٨نق - ٤ نق^٢) = ٠ (ح نهاية عظمى)

$\therefore$ ٤ نق (٢- نق) = ٠ اما نق = ٠ (مرفوض) أو ٢ سم

ومن (٢) $\therefore$ ع = ٦ سم

$\therefore$ أكبر حجم للاسطوانة = ط (٢)^٢ × ٦ = ٢٤ ط سم^٣

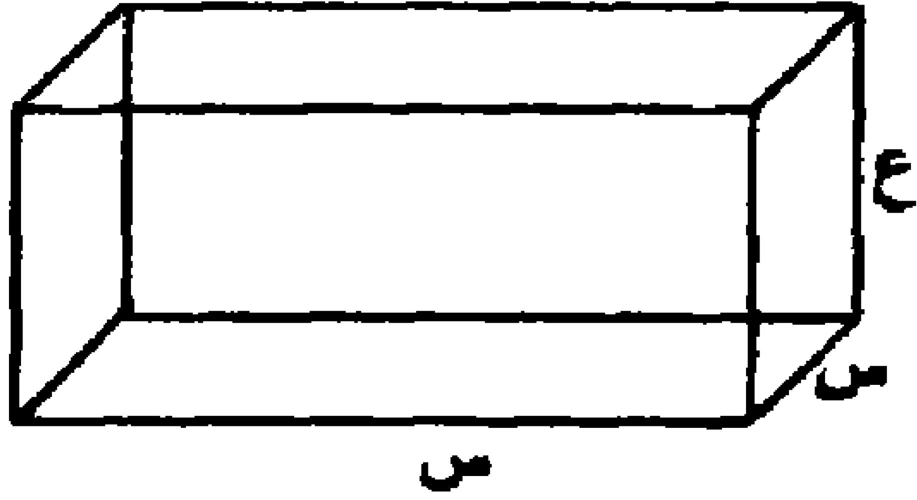
<u>مثال</u>: يراد صنع وعاء من المعدن علي شكل متوازي مستطيلات تكون سعته ٢٧ قدم^{٣} وقاعدته مربعة الشكل ، أوجد أبعاد هذا الوعاء إذا استخدم في صنعه أقل مساحة ممكنة من المعدن .

الحـــــــل

ح = س × س × ع

= س^{٢} ع

∴ ٢٧ = س^{٢} × ع ---- (١)



المساحة الجانبية = ٢ [س س + س ع + س ع]

= ٢ [س^{٢} + ٢ س ع] ولكن من (١) ع = $\frac{٢٧}{س^{٢}}$

∴ م = ٢ س^{٢} + ٤ س × ، م = د (س)

∴ د (س) = ٢ س^{٢} + ١٠٨ س$^{-١}$ ∴ دَ (س) = ٤ س – ١٠٨ س$^{-٢}$

∴ دَ (س) = ٠ عند النهاية الصغرى ⇐ ٠ = ٤ س – $\frac{١٠٨}{س^{٢}}$

$\frac{١٠٨}{س^{٢}}$ = ٤ س ∴ س^{٣} = ٢٧ ∴ س = ٣

∴ الارتفاع ع = $\frac{٢٧}{(٣)^{٢}}$ = ٣ ∴ أبعاد الصندوق ٣ ، ٣ ، ٣ يصبح مكعباً

رسم منحنيات الدوال

لرسم منحنى الدالة د نتبع الخطوات التالية:

١- نوجد دَ(س) ، دً (س)

٢- نستخدم دَ(س) في إيجاد :

أ- النهايات العظمى والصغرى إن وجدت حيث عندها دَ(س) = ٠

ب- فترات التزايد حيث دَ(س) > ٠ ، فترات التناقص حيث دَ(س) < ٠

٣- نستخدم دً(س) في إيجاد :

أ- نقط الانقلاب إن وجدت حيث عندها دً(س) = ٠

ب- فترات التحدب لأعلى حيث دً(س) < ٠ ، التحدب لأسفل حيث دً(س) > ٠

٤- نعين بعض النقاط التي تساعد على الرسم مثل:

أ- نقط التقاطع مع محور الصادات وهى (٠،٠) ، نقط التقاطع مع محور السينات .

ب- بعض النقط الأخرى بالتعويض عن س بأى قيمة وإيجاد د(س) .

٥- نرتب النقط التي حصلنا عليها في جدول ونمثلها بيانياً ونكمل رسم المنحنى بتوصيل هذه النقط.

مثال: ارسم منحنى الدالة د(س) = س^{٣} − ٣س^{٢}

الحـــــل

د(س) = س^{٣} − ٣س^{٢} دَ(س) = ٣س^{٢}-٦س دً = ٦س- ٦

دَ(س) = ٠ عندما س =٠ أو س = ٢

دً(٠) = - سالب ∴ العظمى = د(٠) = ٠ ، دً(٢) = + موجب ∴ الصغرى = د(٢) = -٤

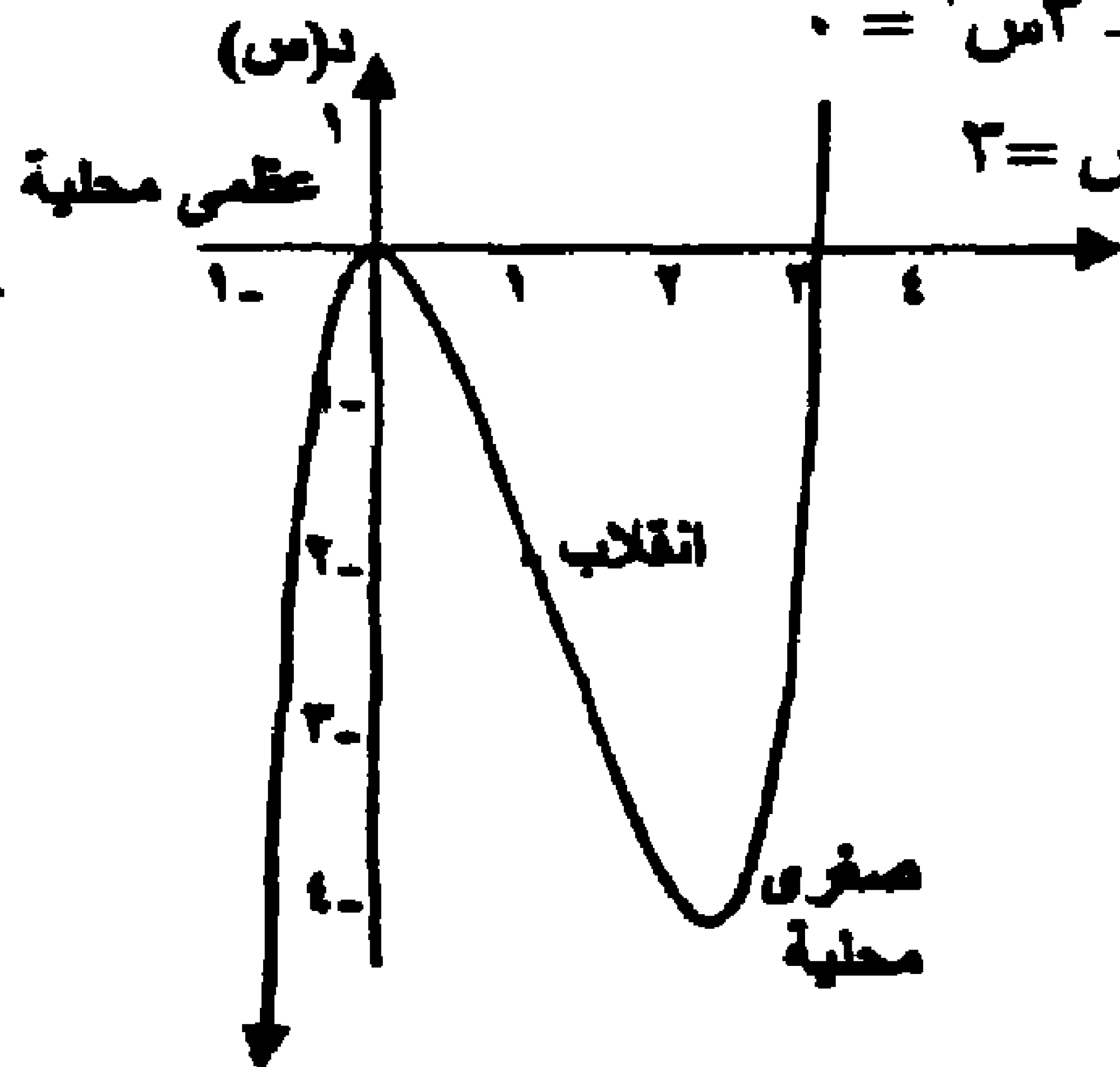
دً(س) = ٠ عندما س= ١ أ، د(١) = -٢ ∴ العظمى المحلية (٠،٠)

الصغرى المحلية (٢، -٤) ، نقطة الانقلاب (١، - ٢)

نقط التقاطع مع السينات نضع د(س) = ٠ ∴ س^{٣} − ٣س^{٢} = ٠

س^{٢} (س − ٣) = ٠ ∴ س = ٠ أ، س =٣

∴ نقط التقاطع مع السينات (٠،٠) ، (٣،٠)



س	٣	٢	١	٠	١-
د(س)	٠	٤-	٢-	٠	٤-

مثال: ارسم الشكل العام للمنحنى الدالة :

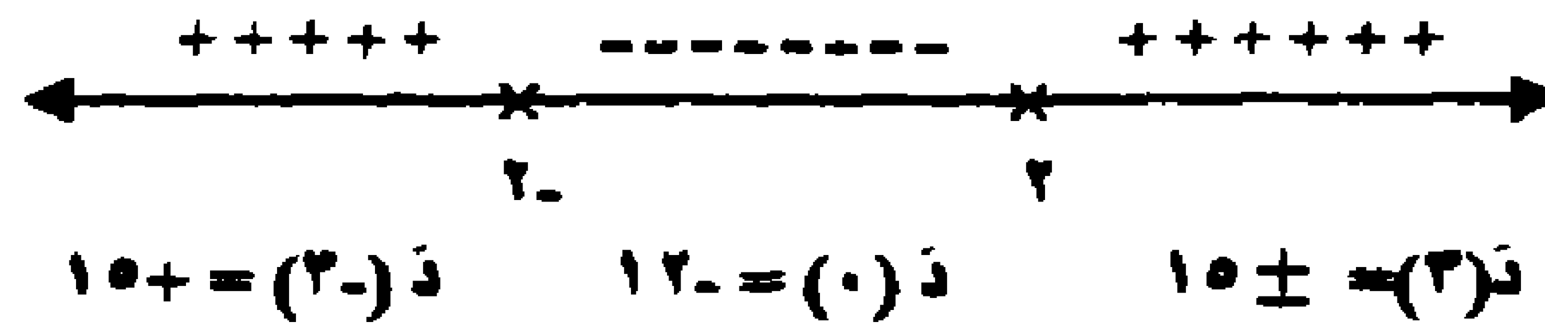
د = { (س، ص) : ص = س^{3} - ١٢س + ٣ } بين س = -٤ ، س = ٤

الحـــــــل

دَ(س) = ٣ س^{2} – ١٢ ، دً(س) = ٦ س

- عند النهايات العظمى والصغرى دَ(س) = ٠ ∴ ٣س^{2} – ١٢= ٠

س^{2} = ٤ ∴ س = ± ٢



د (-٣) = +١٥ د (٠) = -١٢ دَ(٣) = ± ١٥

فترات التزايد (- ∞ ، -٢) ∪ (٢ ، ∞)

فترات التناقص (-٢، ٢)

عند النهاية الصغرى س = ٢ ص = -١٣ ∴ (٢، -١٣)

عند النهاية العظمى س = -٢ ص = ١٩ ∴ (-٢، ١٩)

وعند نقطة الانقلاب دً(س) =٠ ∴ ٦س = ٠ ∴ س = ٠

ولإيجاد فترات التقعر (التحدب)



عندما س=٠ ← ص =٣ ∴ (٠، ٣) هى نقطة إنقلاب

فترة التحدب لأعلى (-∞ ، ٠) ، فترة التحدب لأسفل (٠، ∞)

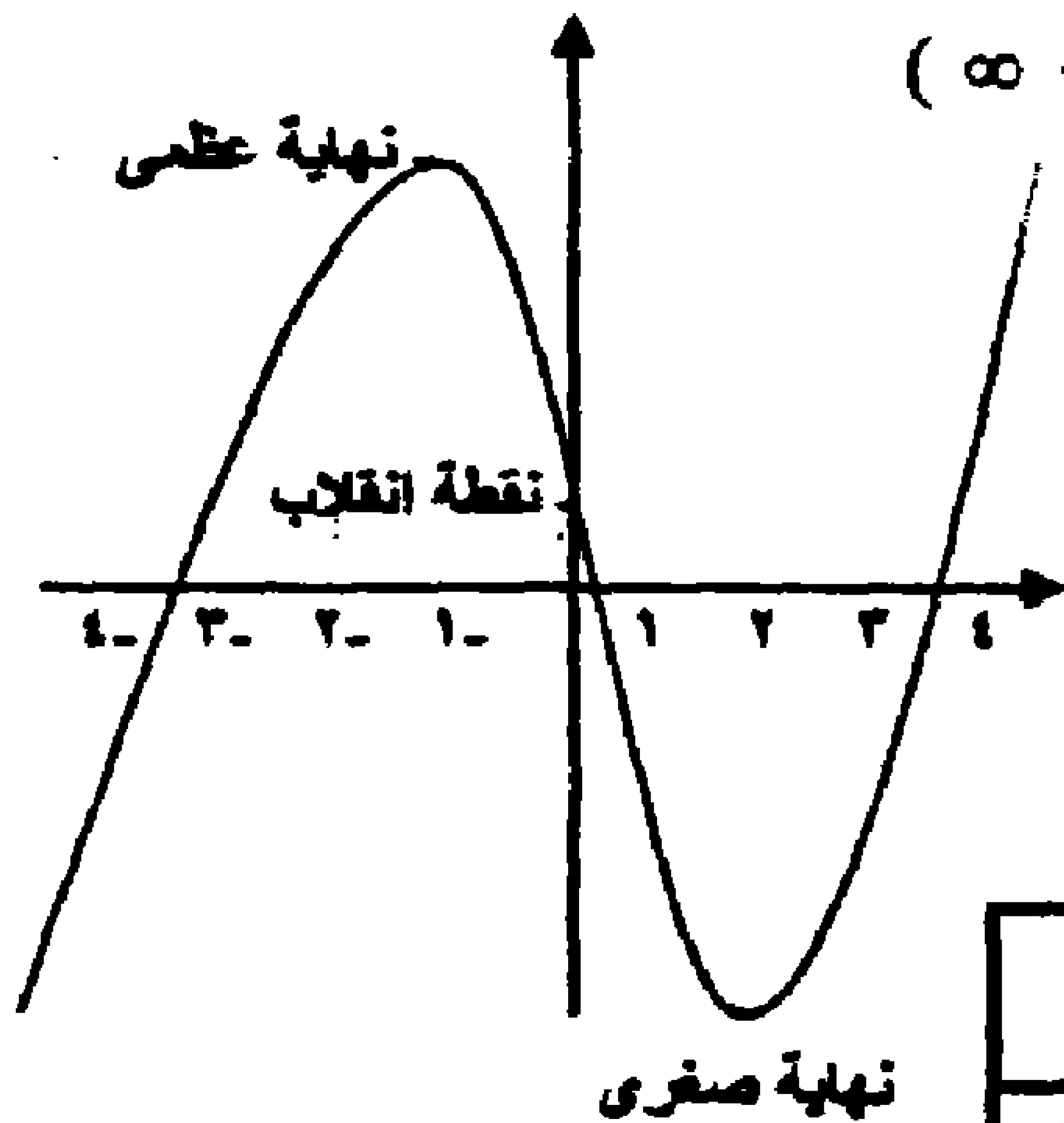
إيجاد نقط تساعد علي الرسم مثل:

س = -٤ ← ص = -١٣ (-٤، -١٣)

س = -١ ← ص = ١٤ (-١، ١٤)

س = ١ ← ص = - ٨ (١، - ٨)

س = ٤ ← ص = ١٩ (٤، ١٩)



تكوين الجدول :

س	-٤	-٢	-١	٠	١	٢	٤
د(س)	-١٣	١٩	٤	٣	-٨	-١٣	١٩

تمرين (٨)

(١) عين القيم العظمى و الصغرى المحلية وكذلك نقط الانقلاب للدوال التالية :

- $ص = س^{٢} + ٤س + ٦$
- $ص = ٢ + س - س^{٢}$
- $ص = س^{٣} - ٣س^{٢} + ٣س + ٢$
- $د(س) = ٢س^{٣} + ٣س^{٢} - ١٢س + ٥$
- $ص = ٢س^{٣} - ٣س^{٢} + ١$
- $د(س) = س(س - ١)^{٢}$
- $د(س) = \frac{س^{٢}}{س-١}$ ، $س \neq ١$
- $٣ص = س^{٣} - ٣س^{٢} - ٩س + ١٥$
- $د(س) = س^{٣} - ٩س^{٢} + ١٥س$
- $د(س) = س + \frac{٤}{س-١}$
- $د(س) = س\,|س - ٤|$

(٢) عين القيم الصغرى المطلقة والعظمى المطلقة للدوال التالية في الفترة المحددة لكل منها:

- $ص = س^{٣}$ في $[-١ ، ٣]$
- $ص = ٢س^{٣} + ٣س^{٢} - ١٢س + ١$ فى $[-١ ، ٥]$
- $ص = ٢س^{٣} + ٣س^{٢} - ١٢س + ١$ فى $[-١٠ ، ١٢]$
- $ص = \frac{س}{س-١}$ فى $[٢ ، ٤]$
- $ص = س + \frac{١}{س+٢}$ فى $[٠ ، ٣]$
- $د(س) = \begin{cases} (س-٢)^{٢} & \text{عندما } س \geq ٣ \\ ٤ - س & \text{عندما } س < ٣ \end{cases}$ في $[٢ ، ٥]$
- $د(س) = \begin{cases} س^{٣} + ٣س^{٢} & \text{عندما } س \geq ٠ \\ س^{٢} - ٢س & \text{عندما } س < ٠ \end{cases}$ في $[-٣ ، ٣]$

• $د(س) = \begin{cases} س^2 + س - 2 & \text{عندما } س \geq 2 \\ 5 س - 6 & \text{عندما } س > 2 \end{cases}$ في [-1 ، 3]

(3) اثبت أنه إذا كان س عددا موجبا فإن $س + \frac{1}{س} > 2$

(4) عين كلا من ل ، م بحيث تكون الدالة $د(س) = س^2 + ل س + م$ لها قيمة صغرى تساوى 3 عندما س=1

(5) أوجد أ، ب بحيث يكون للمنحنى الذى معادلته $س^2 ص + أ س + ب ص = 0$ نقطة انقلاب عند النقطة $(2 ، \frac{5}{2})$ ثم ارسم شكلا عاما لهذا المنحنى.

(6) وجد أحد مصانع الأجهزة الكهربية أنه يكسب 30 جنيها في كل جهاز إذا كان إنتاجه الشهرى 50 جهازا فإذا زاد الإنتاج عن هذا العدد فإن الربح في الجهاز يقل 50 قرشا عن كل جهاز زيادة – أوجد عدد الأجهزة التى ينتجها المصنع في الشهر ليحقق أكبر ربح ممكن.

(7) صفيحة معدنية رقيقة مربعة الشكل طول ضلعها 10 سم قطع من أركانها أربعة مربعات متساوية ثم ثمن الجزء الباقى على شكل علبة بدون غطاء – أوجد طول ضلع المربع المقطوع بحيث يكون حجم العلبة أكبر ما يمكن .

(8) عددان مجموعهما 16 – أوجد العددين إذا كان مجموع مربعيهما أصغر ما يمكن .

(9) قطعة من السلك طولها ل صنع منها مستطيل – أوجد أبعاد المستطيل بحيث تكون مساحته أكبر ما يمكن .

(10) قطعة من السلك طولها 2 ل صنع منها مثلث قائم الزاوية – أوجد أبعاد هذا المثلث بحيث تكون مساحته اكبر ما يمكن .

(11) سلك طوله 34 سم قسم إلى جزئيين ثم ثنى الجزء الأول على شكل مربع والثانى على شكل دائرة – أوجد طول كل جزء بحيث يكون مساحتى الشكلين أقل ما يمكن .

(١٢) إذا كانت تكاليف استهلاك وقود لقاطرة تتناسب مع مربع سرعتها وكانت هذه التكاليف ٢٥جنيها في الساعة عندما تكون السرعة ٢٥كم / ساعة كما أن هناك تكلفة إضافية تقدر بمائة جنيه في الساعة بصرف النظر عن سرعتها – أوجد سرعة القاطرة لتكون تكلفة الكم الواحد أقل ما يمكن .

(١٣) إذا كانت المساحة الكلية لاسطوانة دائرية قائمة هي ٢٤ط سم^{٢} – أوجد اكبر حجم للأسطوانة

(١٤) علبة على شكل متوازي مستطيلات سعتها ٩٠٠٠سم^{٣} وارتفاعها ضعف عرضها – أوجد أبعاد متوازى المستطيلات عندما تكون مساحة أوجهة الستة أقل ما يمكن .

(١٥) إذا كان مجموع مساحتى سطح كرة وأسطوانة متفقة معها في نصف القطر يساوى ٢٥٠ط سم^{٢} – فأوجد نصف القطر عندما يكون مجموع حجميهما أكبر ما يمكن .

(١٦) أوجد نقطة على المنحنى ص^{٢} = ٤ س+ ٥ بحيث تكون المسافة بينها وبين النقطة (٣،٠) أقل ما يمكن .

(١٧) نافذة على هيئة مستطيل يعلوه نصف دائرة ينطبق علي أحد أبعاد المستطيل فإذا كان محيط النافذة ٦أمتار – أوجد نصف قطر الدائرة الذي يجعل مساحة النافذة أكبر ما يمكن .

(١٨) إذا علم أن قوة احتمال قطعة خشبية مقطعها مستطيل يتناسب طرديا مع حاصل ضرب أحد بعدى المستطيل في مربع بعده الاخر- أوجد بعدى المقطع لقطعه خشبية ذات أكبر قوة احتمال يمكن استخلاصها من جذع شجرة على شكل اسطوانة دائرية قائمة قطرها١٠٠سم.

(١٩) أ) ارسم المنحنى ص= س^{٣} – ٣س^{٢} + ٣س
ب) ارسم المنحنى ص= س^{٣} +٣س -١
ج) ارسم المنحنى ص = ٢س^{٣} – ٣س^{٢}
د) ارسم المنحنى ص=٣- ٣س^{٢}-٢س^{٣}

هـ) ص = { س^{٢} + ٢س ، س ≤ ٠ ؛ - س ، س > ٠ }

و) ص = { س^{٣} -٣س ، -٢ ≤ س ≤ ٢ ؛ ٢ ، س > ٢ }

ز) ص = س | س | + ٢س

تمارين غير محلولة

١. أوجد طول ضلعي القائمة في مثلث القائم الزاوية وتره ١٠ سم تكون مساحة المثلث أكبر ما يمكن .

٢. وصل مصدر كهربي قوته الدافعة ق ومقاومته الداخلية م بدائرة خارجية فمر تيار شدته ت أمبير في الدائرة – فإذا كان مقدار الطاقة الكهربية المعطاة للدائرة الخارجية في الثانية الواحدة هو ط = ت ق- ت^{2} م (حيث ق، م ثابتان) أوجد شدة التيار الذي تصبح عنده قيمة هذه الطاقة أكبر ما يمكن وذلك عندما تكون ق = ٦٠ فولت ، م = ٠,٣ أوم .

٣. عددان مجموعهما ٢٠ وحاصل ضرب مكعب الأول ومربع الثاني نهاية كبرى ، أوجد العددين .

٤. اثبت أن النهاية الصغرى لحاصل جمع عدد موجب ومقلوب هذا العدد مضروباً في ك ، حيث ك ثابت = ٢ $\sqrt{ك}$.

٥. يراد عمل خزان على شكل أسطوانة دائرية قائمة فإذا كانت تكاليف صنع القاعدة هي ديناران ليبيين للمتر المربع وتكاليف الجوانب دينار واحد للمتر المربع وإذا صنع للخزان غطاء على شكل كرة مجوفة يتكلف المتر المربع منها نصف دينار فإذا بلغت التكاليف الكلية $\frac{٢}{٧}$ ١٤١٤ ديناراً ليبياً – فأوجد أبعاد الخزان لكي تكون سعته أكبر ما يمكن. (ط = $\frac{٢٢}{٧}$)

٦. ينتج مصنع الطماطم في طرابلس كمية من عصير الطماطم قدرها ص طناً ومن الطماطم الأقل جودة كمية قدرها س طناً حيث : ص = $\frac{٤٠ - ٥س}{١٠ - س}$ وإذا كان سعر النوع الجيد ضعف سعر النوع الأقل جودة – فأوجد الكمية التي يجب على المصنع إنتاجها من كل صنف حتى يحصل المصنع على أكبر إيراد .

الباب الخامس

التكامل

التكامل سبق التفاضل تاريخياً ، فلقد كان وليد الدراسات التى نشأت عند محاولة إيجاد طرق عامة لتعيين مساحات وحجوم الأشكال المنتظمة ـ التكامل في الواقع هو عملية جمع عدد كبير جداً من العناصر الدقيقة جداً ـ ولذا أشتقت علامة التكامل $\int$ من الحرف S وهو الحرف الأول في كلمة Sum التى تعنى الجمع ، وفي هذا الجزء سنعتبر أن التكامل هو عملية عكسية لعملية التفاضل . وهذا مفهوم يختلف كلية عن مفهوم الجمع .

∵ عملية التفاضل هى إيجاد $\frac{ءص}{ءس}$ إذا علمت ص .

∴ عملية التكامل هى إيجاد ص إذا علم $\frac{ءص}{ءس}$.

مثلاً : إذا كانت ص = $س^{٣}$ ∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٣ س^{٢}$

وبعكس العملية السابقة ∵ $\frac{ءص}{ءس} = ٣ س^{٢}$ ∴ ص = $\int ٣ س^{٢}$ ء س

وتقرأ " تكامل ٣ $س^{٢}$ بالنسبة إلي س " وفي كل عملية تكامل لابد من وجود الرمزين " $\int$ " وهى رمز التكامل وتقرأ تكامل ، (ء س) وتقرأ بالنسبة إلى س وهناك نوعان من التكامل هما:

[أ] التكامل المحدد. [ب] التكامل الغير محدد .

نظريات في التكامل الغير محدد:

نظرية (١) :

$$\int س^{ن} ء س = \frac{س^{ن + ١}}{ن + ١} + ث \quad حيث \ ن \neq -١$$

، ث : يسمى ثابت التكامل يعتمد على شروط معينة .

ويسمى هذا التكامل بالتكامل غير المحدد لأنه لا يأخذ قيمة واحدة محددة بل يمكن أن يأخذ قيماً كثيرة تتوقف على قيمة الثابت (ث) . ويجدر الإشارة أن ناتج التكامل غير المحدد هو متغير وليست قيمة ثابتة .

البرهـــان

$$\frac{ء}{ءس}\left(\frac{س^{ن+١}}{ن+١}+ث\right)=\frac{(ن+١)\,س^{ن}}{(ن+١)}=س^{ن}$$

$$\therefore \int س^{ن}\,ءس=\frac{س^{ن+١}}{ن+١}+ث$$

∴ عملية التكامل للدالة $س^{ن}$ بالنسبة إلى س : زودنا الأس القديم (ن) واحد وقسمنا على الأس الجديد (ن+ ١)

أمثلة :

$$\int س^{٧}\,.\,ءس=\frac{س^{٨}}{٨}+ث$$

$$\int س\,ءس=\frac{س^{٢}}{٢}+ث \quad،\quad \int \frac{١}{س^{٢}}\,ءس=\int س^{-٢}\,ءس=\frac{س^{-١}}{-١}+ث$$

$$\int س^{\frac{٣}{٤}}\,.\,ءس=\frac{س^{\frac{٧}{٤}}}{\frac{٧}{٤}}+ث=\frac{٤}{٧}س^{\frac{٧}{٤}}+ث$$

ملاحظات :

(١) $\int أ\,د(س)\,ءس=أ\int د(س)\,ءس$ حيث أ مقدار ثابت

مثلاً: $\int ٢س^{٣}\,ءس=٢\int س^{٣}\,ءس=٣\times\frac{س^{٤}}{٤}+ث=\frac{٣س^{٤}}{٤}+ث$

(٢) $\int أ\,.\,ءس=أس+ث$

مثلاً: $\int ٨\,ءس=٨س+ث$ ، $\int \sqrt{٥}\,ءس=\sqrt{٥}\,س+ث$

(٣) $\int [\,د_{١}(س)+د_{٢}(س)+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots دن\,(دس)\,]\,ءس$

مثلاً: $\int (٣س^{٢}+٧س+٩)\,ءس$

$$=\frac{٣س^{٣}}{٣}+\frac{٧س^{٢}}{٢}+٩س+ث$$

$$=س^{٣}+\frac{٧}{٢}س^{٢}+٩س+ث$$

استنتاج :

(١) $\int \sqrt{س}\,ءس=\frac{٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}}+ث$

(٢) $\int \frac{١}{\sqrt{س}}\,ءس=٢\sqrt{س}+ث$

وبصفة عامة :

(١) $\int \sqrt[ن]{س} \; ءس = \frac{ن+١}{ن} س^{\frac{ن+١}{ن}} + ث = \frac{ن+١}{ن} \sqrt[ن]{س^{ن+١}} + ث$

(٢) $\int \frac{١}{\sqrt[ن]{س}} \; ءس = \frac{ن+١}{ن} س^{\frac{-ن+١}{ن}} + ث = \frac{ن+١}{ن} \sqrt[ن]{س^{-ن}} + ث$

مثلا: $\int \sqrt[٣]{س} \; ءس = \frac{٣}{٤} \sqrt[٣]{س^{٤}} + ث$

$\int \frac{١}{\sqrt[٣]{س}} \; ءس = \frac{٣}{٤} \sqrt[٣]{س^{٢}} + ث$

ملاحظة :

$\int \sqrt[ن]{س^{م}} \; ءس$ يستحسن التحويل

$\int س^{\frac{ن}{م}} \; ءس = \frac{م}{ن+م} س^{\frac{ن+م}{م}} + ث$

مثلا : $\int \sqrt[٣]{س^{٤}} \; ءس = \int س^{\frac{٣}{٤}} ءس = \frac{٤}{٣+٤} س^{\frac{٤+٣}{٤}} + ث = \frac{٤}{٧} س^{\frac{٧}{٤}} + ث$

مثال: أوجد التكاملات الآتية : -

(١) $\int \sqrt{(س^{٢} - \frac{١}{س^{٢}})^{٢} + ٤} \; ءس$ (٢) $\int س(٢ - ٣س) \; ءس$

(٣) $\int \frac{(٢+س)^{٢}}{\sqrt{س}} \; ءس$ (٤) $\int س^{٩}(س + \frac{١}{س})^{٣} \; ءس$

الحــــــل

(١) $\int \sqrt{(س^{٢} - \frac{١}{س^{٢}})^{٢} + ٤} \; ءس = \int \sqrt{(س^{٢})^{٢} - ٢ س^{٢}(\frac{١}{س^{٢}}) + (\frac{١}{س^{٢}})^{٢} + ٤} \; ءس$

$\int \sqrt{(س^{٢} - \frac{١}{س^{٢}})^{٢} + ٤} \; ءس = \int (س^{٢} + س^{-٢}) \; ءس$

$= \frac{١}{٣} س^{٣} + \frac{١}{-١} س^{-١} + ث = \frac{١}{٣} س^{٣} - \frac{١}{س} + ث$.

(٢) $\int س(٢ - ٣س) \; ءس = \int ٢س - ٣س^{٢} \; ءس$

$= \frac{٢س^{٢}}{٢} - \frac{٣س^{٣}}{٣} + ث = س^{٢} - س^{٣} + ث$

(٣) $\int \frac{(٢+س)^{٢}}{\sqrt{س}} \; ءس = \int (\frac{٤+٤س+س^{٢}}{\sqrt{س}}) \; ءس$

$$= \int \left(\frac{\text{٤}}{\sqrt{\text{س}}} + \frac{\text{٤س}}{\sqrt{\text{س}}} + \frac{\text{س}^{2}}{\sqrt{\text{س}}} \right) \text{ءس} = \int \text{٤ س}^{-\frac{1}{2}} + \text{٤ س} \times \text{س}^{-\frac{1}{2}} + \text{س}^{2} \times \text{س}^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \int \text{٤ س}^{-\frac{1}{2}} + \text{٤ س}^{\frac{1}{2}} + \text{س}^{\frac{3}{2}} \text{ ءس} = 4 \times \frac{\text{س}^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 4 \frac{\text{س}^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{\text{س}^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \text{ث}$$

$$= 8 \text{ س}^{\frac{1}{2}} + \frac{8}{3} \text{س}^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5} \text{س}^{\frac{5}{2}} + \text{ث}$$

$$= 8\sqrt{\text{س}} + \frac{8}{3} \text{س}\sqrt{\text{س}} + \frac{2}{5} \text{س}^{2}\sqrt{\text{س}} + \text{ث}$$

(٤) $\int \text{س}^{9} \left(\text{س} + \frac{1}{\text{س}} \right)^{3} \text{ ءس} = \int \text{س}^{9} \left(\text{س}^{3} + 3\text{ س} + \frac{3}{\text{س}} + \frac{1}{\text{س}^{3}} \right) \text{ ءس}$

$$= \int \left(\text{س}^{12} + 3 \text{ س}^{10} + 3 \text{ س}^{8} + \text{س}^{6} \right) \text{ ءس}$$

$$= \frac{\text{س}^{13}}{13} + \frac{\text{٣س}^{11}}{11} + \frac{\text{٣س}^{9}}{9} + \frac{\text{س}^{7}}{7} + \text{ث}$$

نظرية (٢)

$$\int (\text{أ س} + \text{ب})^{\text{ن}} \text{ ءس} = \frac{(\text{أس}+\text{ب})^{\text{ن}+1}}{\text{ن} + 1} \times \frac{1}{\text{أ}} + \text{ث}$$

حيث (أ س + ب) دالة خطية

مثلاً : $\int (\text{٥ س} + 4)^{7} \text{ ءس} = \frac{(\text{٥ س} + 4)^{8}}{5 + 8} + \text{ث}$

$$\int (2 - \text{٣س})^{4} \text{ ءس} = \frac{(2 - \text{٣س})^{5}}{5 \times -3} + \text{ث}$$

∴ تكامل دالة من الدرجة الأولى في متغير ما مرفوعة لأس ∈ ح {-١} بالنسبة لذلك المتغير = $\frac{(\text{دالة من الدرجة الأولى})^{\text{الأس} + 1}}{(\text{الأس} + 1) \times \text{معامل المتغير}} + \text{ث}$

أمثلة متنوعة:

(١) $\int \sqrt{٤\text{س}+١}\ \text{ءس} = \int (٤\text{س}+١)^{\frac{١}{٢}}\ \text{ءس} = \frac{(٤\text{س}+١)^{\frac{٣}{٢}}}{٤ \times \frac{٣}{٢}} + \text{ث}$

(٢) $\int \text{س}\sqrt{\frac{٢}{\text{س}^٢} - \frac{٣}{\text{س}}}\ \text{ءس} = \int \sqrt{\text{س}^٢\left(\frac{٢}{\text{س}^٢} - \frac{٣}{\text{س}}\right)}\ \text{ءس}$

$= \int \sqrt{٢ - ٣\text{س}}\ \text{ءس} = \frac{(٢-٣\text{س})^{\frac{٣}{٢}}}{-٣ \times \frac{٣}{٢}} + \text{ث} = -\frac{٢}{٩}(٢-٣\text{س})^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$

(٣) $\int \frac{\text{ءس}}{\sqrt[٣]{(٣\text{ص}+١)^٢}} = \int (٣\text{ص}+١)^{-\frac{٢}{٣}} + \text{ث} = \frac{(٣\text{ص}+١)^{\frac{١}{٣}}}{٣ \times \frac{١}{٣}} + \text{ث}$

$= (٣\text{ص}+١)^{\frac{١}{٣}} + \text{ث} = \sqrt[٣]{(٣\text{ص}+١)} + \text{ث}$

(٤) $\int \frac{١٠ - ٥\text{س}}{\sqrt{٢ - \text{س}}}\ \text{ءس} = \int \frac{٥(٢-\text{س})}{\sqrt{٢-\text{س}}}\ \text{ءس} = \int \frac{٥(٢-\text{س})}{(٢-\text{س})^{\frac{١}{٢}}}\ \text{ءس}$

$= \int ٥(٢-\text{س})^{\frac{١}{٢}}\ \text{ءس} = \frac{٥(٢-\text{س})^{\frac{٣}{٢}}}{-١ \times \frac{٣}{٢}} + \text{ث} = \frac{١٠}{٣}(٢ ٠ \text{س})^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$

(٥) $\int \frac{٦\ \text{ءس}}{\sqrt[٣]{٣\text{س}+٤}} = \int ٦(٣\text{س}+٤)^{-\frac{١}{٣}} + \text{ث} = \frac{٦(٣\text{س}+٤)^{\frac{٢}{٣}}}{٣ \times \frac{٢}{٣}} + \text{ث}$

$= ٣\sqrt[٣]{(٤\text{س}+٤)^٢} + \text{ث}$

(٦) $\int \frac{\text{س} - \frac{١}{٢}}{\sqrt{٢\text{س}-١}}\ \text{ءس} = \frac{١}{٢}\int \frac{٢\text{س}-١}{\sqrt{٢\text{س}-١}}\ \text{ءس} = \frac{١}{٢}\int \sqrt{٢\text{س}-١}\ \text{ءس}$

$= \frac{١}{٢}\int (٢\text{س}-١)^{\frac{١}{٢}}\ \text{ءس} = \frac{١}{٢} \times \frac{٢}{٣} \times \frac{(٢\text{س}-١)}{٢} + \text{ث}$

$= \frac{١}{٦}(٢\text{س}-١)^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$

(٧) $\int \frac{٦}{\text{س}^{١٠}}(\text{س}^٣ + ٥\text{س}^٢)^٥\ \text{ءس} = ٦\int \left[\frac{١}{\text{س}^٢}(\text{س}^٣ + ٥\text{س}^٢)\right]^٥ = ٦\int (\text{س}+٣)^٥\ \text{ءس}$

$= ٦ \times \frac{(\text{س}+٥)^٦}{٦} + \text{ث} = (\text{س}+٥)^٦ + \text{ث}$

(٨) $\int (س-١)(٢س-٣)^{٧}\ ء س$

نضع المقدار (س-١) على صورة المقدار (٢س-٣)

$$= \frac{١}{٢}\int (٢س-٢)(٢س-٣)^{٧}\ ء س = \frac{١}{٢}\int [(٢س-٣)+١]\,(٢س-٣)^{٧}\ ء س$$

$$= \frac{١}{٢}\int \left((٢س-٣)^{٨} + (٢س-٣)^{٧}\right) ء س$$

$$= \frac{١}{٢}\left[\frac{(٢س-٣)^{٩}}{٩\times٢} + \frac{(٢س-٣)^{٨}}{٨\times٢}\right] + ث$$

<u>ملاحظة</u> : المقدار المضاف = المقدار الأصلي – المقدار المعدّل

(٩) $\int \frac{(٢س-١)}{(٤س+٣)^{٤}}\ ء س = \frac{١}{٢}\int \frac{(٤س-٢)}{(٤س+٣)^{٤}}\ ء س = \frac{١}{٢}\int \frac{(٤س+٣)-٥}{(٤س+٣)^{٤}}\ ء س$

المقدار المضاف = -٢ - (+٣) = -٥

$$= \frac{١}{٢}\int (٤س+٣)^{-٣} - ٥(٤س+٣)^{-٤}\ ء س$$

$$= \frac{١}{٢}\left[\frac{(٤س+٣)^{-٢}}{-٢\times٤} - ٥\times\frac{(٤س+٣)^{-٣}}{-٣\times٤}\right] + ث$$

$$= -\frac{١}{٢}\left[\frac{١}{٨(٤س+٣)^{٢}} - \frac{٥}{١٢(٤س+٣)^{٣}}\right] + ث$$

<u>ملاحظات :</u>

١- إذا كانت الدالة المراد تكاملها مكونة من بسط ومقام والمقام مكون من حد واحد فقط – فأننا نقسم حدود البسط على المقام ثم نجرى عملية التكامل .

<u>أمثلة :</u>

(١) $\int \frac{س^{٢}+٣}{س^{٢}}\ ء س = \int \frac{س^{٢}}{س^{٢}} + \int \frac{٣}{س^{٢}}\ ء س = \int ١ + ٣س^{-٢}\ ء س$

$$= س + \frac{٣س^{-١}}{-١} + ث = س - \frac{٣}{س} + ث$$

(٢) $\int \frac{(س+١)^{٣}-١}{٣س}\ ء س = \int \frac{س^{٣}+٣س^{٢}+٣س}{٣س}\ ء س = \int \frac{١}{٣}س^{٢} + س + ١$

$$= \frac{١}{٩}س^{٣} + \frac{١}{٢}س^{٢} + س + ث$$

(٣) $\int \frac{(١-س)^{٢}}{س\sqrt{س}}\ ء س = \int \frac{١-٢س+س^{٢}}{س^{\frac{٣}{٢}}} = \int (س^{-\frac{٣}{٢}} - ٢س^{-\frac{١}{٢}} + س^{\frac{١}{٢}})\ ء س$

$$= -٢س^{-\frac{١}{٢}} - ٤س^{\frac{١}{٢}} + \frac{٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} + ث$$

٢- إذا كانت الدالة المراد تكاملها مكونة من بسط ومقام وكان المقام مكون منأكثر من حد فأننا نلجأ إلي تحليل البسط والمقام والاختصار لتحويل المقام إلي حد واحد فقط ثم نجرى عملية التكامل .

<u>أمثلـــة :</u>

(١) $\int 24\,\text{س}^3 \left[\frac{\text{س}^3 - 1}{\text{س}^2 + \text{س} + 1}\right]^2 \text{ء س}$

$$= \int 24\,\text{س}^3 \left[\frac{(\text{س} - 1)(\text{س}^2 + \text{س} + 1)}{(\text{س}^2 + \text{س} + 1)}\right]^2 \text{ء س}$$

$$= \int 24\,\text{س}^3 (\text{س}^2 - 2\text{س} + 1)\ \text{ء س} = \int (24\,\text{س}^5 - 48\,\text{س}^4 + 24\,\text{س}^3)\ \text{ء س}$$

$$= 4\,\text{س}^6 - \frac{48}{5}\text{س}^5 + 6\,\text{س}^4 + \text{ث}$$

(٢) $\int \frac{\text{س}^3 - \text{س}}{\text{س} + 1}\ \text{ء س}$

$$= \int \frac{\text{س}(\text{س} - 1)(\text{س} + 1)}{(\text{س} + 1)}\ \text{ء س} = \int (\text{س}^2 - \text{س})\ \text{ء س} = \frac{1}{3}\text{س}^3 - \frac{1}{2}\text{س}^2 + \text{ث}$$

(٣) $\int \frac{(\text{س}^2 + 3\text{س})^5}{\text{س}^5}\ \text{ء س}$

$$= \int \frac{\text{س}^5(\text{س} + 3)^5}{\text{س}^5}\ \text{ء س} = \frac{1}{6}(\text{س} + 3)^6 + \text{ث}$$

(٤) $\int (\text{س}\sqrt{\text{س}} - 8)(\sqrt{\text{س}} - 2)^{-1}\ \text{ء س}$

$$= \int \frac{\text{س}^{\frac{3}{2}} - 8}{\text{س}^{\frac{1}{2}} - 2}\ \text{ء س} = \int \frac{(\text{س}^{\frac{1}{2}} - 2)(\text{س} + 2\text{س}^{\frac{1}{2}} + 4)}{(\text{س}^{\frac{1}{2}} - 2)}\ \text{ء س}$$

$$= \int (\text{س} + 2\,\text{س}^{\frac{1}{2}} + 4)\ \text{ء س} = \frac{1}{2}\text{س}^2 + \frac{4}{3}\text{س}^{\frac{3}{2}} + 4\,\text{س} + \text{ث}$$

$$= \frac{1}{2}\text{س}^2 + \frac{4}{3}\text{س}\sqrt{\text{س}} + 4\,\text{س} + \text{ث}$$

٣- إذا كانت الدالة المراد تكاملها محتوية على جذور تربيعية للمتغير س في المقام المكون من حدين أو أكثر فإننا نضرب كلاً من البسط والمقام في مرافق الجذر للتخلص من الجذور في المقام .

أمثلـــة :

(١) $\int \frac{\text{ءس}}{\sqrt{\text{س}+٢} - \sqrt{\text{س}}}$

$\int \frac{\sqrt{\text{س}+٢} + \sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}+٢} - \sqrt{\text{س}}} \times \frac{١}{\sqrt{\text{س}+٢} + \sqrt{\text{س}}} \ \text{ءس}$

$= \int \frac{\sqrt{\text{س}+٢} + \sqrt{\text{س}}}{\text{س}+٢-\text{س}} \ \text{ءس} = \frac{١}{٢} \int (\sqrt{\text{س}+٢} + \sqrt{\text{س}}) \ \text{ءس}$

$= \frac{١}{٢} \int \sqrt{\text{س}+٢} \ \text{ءس} + \frac{١}{٢} \int \sqrt{\text{س}} \ \text{ءس} = \frac{١}{٢} \times \frac{٣}{٢} (\text{س}+٢)^{\frac{٣}{٢}} + \frac{١}{٢} \times \frac{٣}{٢} \text{س} + \text{ث}$

$= \frac{٣}{٤} \text{س}^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$

(٢) $\int \frac{\sqrt{\text{س}} (\text{س}-١)}{\sqrt{\text{س}} - ١} \ \text{ءس}$

المقدار $= \int \frac{\sqrt{\text{س}} (\sqrt{\text{س}}+١)(\sqrt{\text{س}}-١)}{(\sqrt{\text{س}} - ١)} = \int (\text{س} + \text{س}^{\frac{١}{٢}}) \ \text{ءس}$

$= \frac{١}{٢} \text{س}^{٢} + \frac{٢}{٣} \text{س}^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث} = \frac{١}{٢} \text{س}^{٢} + \frac{٢}{٣} \text{س} \sqrt{\text{س}} + \text{ث}$

تمرين (٩)

❖ **احسب التكاملات الآتية:**

(١) $\int \text{س}^{٥} \, \text{ءس}$

(٢) $\int \frac{\text{ءس}}{\text{س}^{٨}}$

(٣) $\int \frac{\text{ب}^{٢} \text{س}^{٢}}{\text{أ}^{٢}} \, \text{ءس}$ حيث أ ، ب ثابتان

(٤) $\int (٣\text{س}^{٢} - \text{س} + ١) \, \text{ءس}$

(٥) $\int (٤\text{س}^{٣} - ٦\text{س}^{٢} + ٨\text{س} - ٥) \, \text{ءس}$

(٦) $\int (٢\text{س}^{٧} - ٦\text{س}^{٣} + ٨\text{س} + ١) \, \text{ءس}$

(٧) $\int (\text{س} - ٢)(\text{س} + ١)(\text{س} - ١) \, \text{ءس}$

(٨) $\int \frac{\text{س}^{٢} + \text{م}^{٢}\text{س}}{\text{س}} \, \text{ءس}$

(٩) $\int (\text{س} - \text{أ})(\text{س} - \text{ب}) \, \text{ءس}$ حيث أ، ب ثابتان

(١٠) $\int \sqrt{\text{س}} \, (١ + \sqrt{\text{س}}) \, \text{ءس}$

(١١) $\int \frac{١ + \text{س}}{\sqrt{\text{س}}} \, \text{ءس}$

(١٢) $\int (\text{س} + \frac{١}{\text{س}})^{٢} \, \text{ءس}$

(١٣) $\int (\sqrt{\text{س}} - ١)^{٢} \, \text{ءس}$

(١٤) $\int \frac{\text{ءن}}{\sqrt[٣]{\text{ن}^{٤}}}$

(١٥) $\int (٧\text{س} - ٣)^{٨} \, \text{ءس}$

(١٦) $\int (٢ - \text{س})^{٩} \, \text{ءس}$

(١٧) $\int \left[\frac{\text{س} + ٢}{٣}\right]^{\frac{١}{٤}} \, \text{ءس}$

(١٨) $\int (\text{س}^{٢} + ٢)^{٣} \, \text{ءس}$

(١٩) $\int (\sqrt{٢\text{س} + ٧}) \, \text{ءس}$

(٢٠) $\int \frac{٥}{(٢\text{س} - ١)^{٥}} \, \text{ءس}$

(٢١) $\int \frac{\text{ءس}}{\sqrt[٣]{(\text{س} + ٩)^{٢}}}$

(٢٢) $\int \text{س}^{٥} (١ - \frac{٣}{\text{س}})^{٥} \, \text{ءس}$

(٢٣) $\int \frac{\text{س}^{٣} - ٢٧}{\text{س} - ٣} \, \text{ءس}$

(٢٤) $\int \text{س} \sqrt{\frac{٢}{\text{س}} - \frac{٣}{\text{س}}} \, \text{ءس}$

(٢٥) $\int (٢\text{س} + ١١) \sqrt{٢\text{س} + ١١} \, \text{ءس}$

تكامل بعض الدوال المثلثية

١. $\int$ حا س . ءس ⇐ - حتا س + ث

٢. $\int$ حا(أ س+ ب) ءس ⇐ $\frac{\text{- حتا (أ س+ ب)}}{\text{أ}}$ + ث

٣. $\int$ حا أ س ءس ⇐ $\frac{\text{- حتا أ س}}{\text{أ}}$ + ث

٤. $\int$ حتا س ءس ⇐ حا س + ث

٥. $\int$ حتا (أ س+ ب) ءس ⇐ $\frac{\text{حا (أ س + ب)}}{\text{أ}}$ + ث

٦. $\int$ حتا أ س ءس ⇐ $\frac{\text{حا أ س}}{\text{أ}}$ + ث

٧. $\int$ قا٢س ءس ⇐ طا س + ث

٨. $\int$ قا٢ أ س ءس ⇐ $\frac{\text{طا أ س}}{\text{أ}}$ + ث

٩. $\int$ قا٢ (أس + ب) ءس ⇐ $\frac{\text{طا (أ س + ب)}}{\text{أ}}$ + ث

• **ملحوظة :**

(١) جا٢ س + جتا٢ س= ١ (٢) ١+ طا٢ س = قا٢ س

(٣) ١+ طا٢ س = ق٢ س (٤) ١ + ظتا٢ س = قتا٢ س

(٥) حا٢ س = ٢ حا س حتا س

(٦) حتا ٢س= حتا٢س- حا٢س = ١-٢حا٢س = ٢حتا٢س-١

(٧) حا٢ س = ١- جتا٢س = $\frac{١}{٢}$ - $\frac{١}{٢}$ جتا٢س

(٨) حتا٢س = ١- حا٢ س = $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ حتا٢س

• **أمثلة:**

(١) $\int$ ١+ طا٢ ٢ س ءس

= $\int$ قا٢ ٢س . ءس = $\frac{\text{طا ٢ س}}{٢}$ + ث

(٢) $\int \frac{\text{حا}^2 \text{س}}{1 - \text{حتاس}} \; \text{ء س}$

$= \int \frac{1 - \text{حتا}^2\text{س}}{1 - \text{حتاس}} \; \text{ء س} = \int \frac{(1 - \text{حتا س})(1 + \text{حتاس})}{(1 - \text{حتاس})} \; \text{ء س}$

$= \int (1 + \text{حتا س}) \; \text{ءس} = \text{س} + \text{حاس} + \text{ث}$

(٣) $\int \frac{\text{حتا ٢س}}{\text{حتاس} + \text{حاس}} \; \text{ء س}$

$= \int \frac{\text{حتا}^2 \text{س} - \text{حا}^2 \text{س}}{\text{حتاس} + \text{حاس}} \; \text{ء س} = \int \frac{(\text{حتاس} - \text{حاس})(\text{حتاس} + \text{حاس})}{(\text{حتاس} + \text{حاس})} \; \text{ءس}$

$= \int (\text{حتا س} - \text{حا س}) \; \text{ءس} = \text{حاس} + \text{حتا س} + \text{ث}$

(٤) $\int \frac{3}{1 - \text{حا}^2 \text{ ٢س}} \; \text{ء س}$

$= \int \frac{3}{\text{حتا}^2 \text{ ٢س}} \; \text{ء س} = \int 3 \; \text{قا}^2 \text{ ٢س} \; \text{ءس} = \frac{3}{2} \; \text{طا ٢س} + \text{ث}$

(٥) $\int (1 - 2\text{حا}^2 \text{س}) \; \text{ء س}$

$= \int \text{حتا٢ س} \; \text{ءس} = \frac{3}{2} \; \text{حا٢س} + \text{ث}$

(٦) $\int \frac{\text{حا}^2 \text{ ٢س}}{1 + \text{حتا س}} \; \text{ءس}$

$= \int \frac{1 - \text{حتا}^2 \text{س}}{1 + \text{حتا س}} \; \text{ء س} = \int \frac{(1 - \text{حتا س})(1 + \text{حتاس})}{(1 + \text{حتا س})} \; \text{ءس}$

$= \int (1 - \text{حتاس}) \; \text{ءس} = \text{س حا س} + \text{ث}$

(٧) $\int \frac{\text{حا ٢س}}{\text{حتا س}} \; \text{ءس}$

$= \int \frac{\text{٢ حاس حتاس}}{\text{حتا س}} \; \text{ءس} = \int \text{٢حاس} \; \text{ءس} = -2 \; \text{حتاس} + \text{ث}$

(٨) $\int \text{طا}^2 \text{س} \; \text{ءس}$

$= \int (\text{قا}^2 \text{س} - 1) \; \text{ءس} = \text{طا س} - \text{س} + \text{ث}$

(٩) $\int$ (١ - حا^{٢} س) ءس

= $\int$ جتا^{٢} س دس = $\int$ ($\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ جتا ٢س) دس

= $\frac{١}{٢}$ س + $\frac{١}{٤}$ جا ٢س + ث

(١٠) $\int$ ٢ جا^{٢} س ءس

= $\int$ ٢ ($\frac{١}{٢}$ - $\frac{١}{٢}$ حتا٢ س) ءس

= $\int$ (١ - حتا٢ س) ءس = س - $\frac{١}{٢}$ حا٢س + ث

تمرين (١٠)

❖ <u>أوجد التكاملات الآتية:-</u>

(١) $\int$ ٤ حاس حتاس ءس

(٢) $\int$ حا $\frac{١}{٤}$ س ءس

(٣) $\int$ حتا $\frac{١}{٥}$ س ءس

(٤) $\int$ قا^{٢} ٢س ءس

(٥) $\int$ حا ($\frac{١}{٥}$ س+١) ءس

(٦) $\int$ حتا (٣س-١) ءس

(٧) $\int$ قا^{٢} ($\frac{١}{٥}$ س-١) ءس

(٨) $\int$ [حا(٤س+١) + حتا(٤س+١)] ءس

(٩) $\int$ [٨حتا س- ٤قا^{٢} س] ءس

(١٠) $\int$ [٦حتاس- ٢قا^{٢} س] ء س

(١١) $\int$ حتا (٣س+٥) ء س

(١٢) $\int$ $\frac{\text{س حتا س + ٢حتاس}}{\text{س + ٢}}$ ءس

بعض تطبيقات التكامل

درسنا كيف نجرى عملية التفاضل لدالة ما . أي إيجاد ميل المماس لهذه الدالة وعرفنا أن التكامل هو العملية العكسية للتفاضل أى أنه إذا علم ميل المماس لمنحنى فإنه يمكن إيجاد معادلة هذا المنحنى بإجراء عملية التكامل لميل المماس .

إذا كان ميل المماس لمنحنى هو $\frac{ءص}{ءس}$ = م فإن معادلة المنحنى هي:

ص = $\int$ م . ءس ويمكن تعيين ثابت التكامل بمعرفة شروط معينة .

مثال: إذا كان ميل المنحنى عند أى نقطة عليه (س، ص) هو ٢س+٩ – أوجد معادلة المنحنى علماً بأنه يمر بالنقطة (١،٥) .

الحـــــــل

$\because$ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢س + ٩

$\therefore$ ص = $\int$ (٢س+٩) ءس = س^{٢} + ٩س + ث

ولتعيين الثابت ث $\because$ المنحنى يمر بالنقطة (١،٥) تحقق معادلته

$\therefore$ ٥ = ١+ ٩ + ث $\qquad$ $\therefore$ ث = ـ٥

$\therefore$ معادلة المنحنى ص = س^{٢} + ٩س ـ٥

مثال: أوجد معادلة المنحنى الذي يمر بالنقطة (ـ١، ٦) وميل المماس له عند أي نقطة عليه يساوى (س+٢) (٣س-٢) .

الحـــــــل

$\frac{ءص}{ءس}$ = (س+٢) (٣س-٢) = ٣س^{٢} + ٤س - ٤

$\therefore$ ص = $\int$ (٣س^{٢} + ٤س – ٤) ءس = س^{٣} + ٢س^{٢} – ٤س + ث

ولتعيين الثابت ث المنحنى يمر بالنقطة (ـ١، ٦) تحققه

$\therefore$ ٦ = ـ١+ ٢ + ٤+ث $\qquad$ $\therefore$ ث = ١

$\therefore$ معادلة المنحنى ص = س^{٣} + ٢س^{٢} – ٤س +١

مثال: ميل منحنى ما عند أى نقطة عليه يتناسب طرديا مع مربع الحداثى السينى للنقطة – فإذا كان الميل عند النقطة (١، ٣) الواقعة علي المنحنى هو ٦ – فأوجد معادلة المنحنى .

الحـــــــل

∵ ميل المنحنى $\frac{عص}{عس}$ α س^2 ∴ $\frac{عص}{عس}$ = أ س^2 حيث أ ثابت

] $\frac{عص}{عس}$ [= ٦ ∴ أ = ٦ ∴ $\frac{عص}{عس}$ = ٦س^2

∴ ص = ∫٦ س^2 . عس ∴ ص = ٢س^3 + ث

∵ المنحنى يمر بالنقطة (١، ٣) ∴ ٣= ٢+ث ∴ ث = ١

∴ معادلة المنحنى ص = ٢س^3 + ١

مثال: إذا علم أن $\frac{ء^2 ص}{ء س^2}$ = ٦ وكان لمنحنى الدالة ص = د(س) نقطة انقلاب هى (١،٢) وقيمة عظمى محلية عند س =-١ - أوجد معادلة المنحنى .

الحـــــــل

$\frac{ء^2 ص}{ء س^2}$ = ∫٦ عس = ٦س + ث نقطة انقلاب (١،٢)

٠ = ٦س+ث ٠ = ٦ + ث ∴ ث = -٦

∴ $\frac{ء^2 ص}{ء س^2}$ = ٦س- ٦ ∴ $\frac{ء^2 ص}{ء س^2}$ = ∫ ٦س -٦ عس

∴ $\frac{عص}{عس}$ = ٣ س^2- ٦س + ث$_1$ ∴] $\frac{عص}{عس}$ [$_{س=-١}$ = ٠

∴ ٠ = ٩ + ث$_1$ ∴ ث$_1$ = -٩ ∴ $\frac{عص}{عس}$ = ٣ س^2- ٦س + ٩

ص = ∫ (٣ س^2- ٦س + ٩) عس = ٣ س^3- ٦س + ٩س + ث$_2$

(١،٢) تحقق المعادلة ∴ ٢= -١١ + ث$_2$ ∴ ث$_2$ = ١٣

∴ س = ٣ س^3- ٦س + ٩س + ١٣

مثال: أوجد معادلة المنحنى الذى يمر بالنقطة (-١، ٣) وميل المماس له عند أى نقطة (س، ص) عليه يساوى $\frac{٤س -١}{٢ص}$.

الحـــــــل

$\frac{عص}{عس}$ = $\frac{٤س -١}{٢ ص}$ ∴ ∫ ٢ص . ء ص = ∫ (٤س -١) عس

، ص^2 = ٢س^2 – س+ ث لتعيين الثابت يمر بالنقطة (-١، ٣)

∴ ٩ = ٢+ ١ + ث ∴ ث = ٦

∴ معادلة المنحنى ص = ٢س^2 – س+ ٦

مثال: خزان مياه على شكل متوازي مستطيلات أبعاده ١، ٢، ٣ متر يصب فيه الماء بمعدل (٢ن+١) م^{٣} / دقيقة – أوجد الزمن الذي يمتلئ بعده الخزان .

الحـــــــل

نفرض أن حجم الخزان ح

، ∵ الماء يصب فيه بمعدل (٢ن+ ١) م^{٣} / دقيقة ∴ $\frac{ءح}{ءن}$ = (٢ن+ ١)

بإجراء التكامل ∫ $\frac{ءح}{ءن}$. ءن = ∫ (٢ن + ١) ءن

∴ ح = $\frac{٢ن^{٢}}{٢}$ + ن + ث أي أن ح = ن^{٢} + ن + ث

ولكن عند بدء الصب فإن ن = صفر كأن ح = صفر

∴ ٠ = ٠ + ٠ + ث ∴ ث = ٠

∴ ح = ن^{٢} + ن وعندما يمتلئ الخزان فإن حجم الماء ح = ٦

∴ ٦ = ن^{٢} + ن ∴ ن^{٢} + ن – ٦ = ٠

∴ (ن-٢) (ن+٣) = ٠ ∴ ن = ٢ ، ن = -٣ ∴ يمتلئ الخزان بعد ٢ دقيقة .

مثال: إذا كان ميل المماس م = حتا س للمنحنى عند أي نقطة (س،ص) – فأوجد معادلة المنحنى إذا كان يمر بنقطة الأصل .

الحـــــــل

∵ م = $\frac{ءص}{ءس}$ = حتا س

∴ ص = ∫ حتاس ءس = حا + ث

، ∵ المنحنى يمر بالنقطة (٠، ٠) ∴ ٠ = حا٠ + ث

∴ ث = ٠ ∴ المعادلة هي ص = حا س

مثال: معدل تغير ميل المماس لمنحنى = ٢(٣س-٥) – فأوجد معادلة المنحنى إذا علم أنه يمر بالنقطتين (١،٥) ، (٢، -٣) .

الحـــــــل

∵ $\frac{ءم}{ءس}$ = (٦س-١٠) ∴ م = ٣ س^{٢} - ١٠س + ث$_{١}$

ص = ٣ س^{٢} - ١٠س + ث$_{١}$ س + ث$_{٢}$ ، ∵ المنحنى يمر بالنقطة (١،٥)

∴ ٥ = ١ - ٥ + ث$_{١}$ + ث$_{٢}$ ∴ ث$_{١}$ + ث$_{٢}$ = ٩ ---- (١)

، ∵ المنحنى يمر بالنقطة (٢، -٣)

∴ -٣ = ٨ - ٢٠ + ٢ث$_{١}$ + ث$_{٢}$ ∴ ٢ث$_{١}$ + ث$_{٢}$ = ٩ --- (٢)

بالطرح ∴ ث$_{١}$ = ٠ ، ث$_{٢}$ = ٩

تمرين (١١)

(١) أوجد الدالة التى متشتقتها الأولى تساوى $٣ - ٢س^{-٢} + ٢س^{-٣}$ حيث س ≠ ٠ علماً بأن الدالة تساوى ٢ عندما س = $\frac{١}{٢}$

(٢) أوجد الدالة التى مشتقتها الأولى تساوى $\frac{٨س^{٣}-١}{٢س-١}$ حيث س ≠ $\frac{١}{٢}$ علما بأن الدالة تساوى ١٠ عندما س =١

(٣) إذا كانت $\frac{ءص}{ءس} = ١٢س^{٥} - ٤٩(٧س-١٢)^{٦}$ وكانت ص =٠ عندما س=٢ – فأوجد ص بدلالة س .

(٤) إذا كانت $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٢س+٧}{٣-٢ص}$ وكانت ص =٣ عندما س= -١ فأوجد العلاقة بين س، ص.

(٥) أوجد معادلة المنحنى الذي يمر بالنقطة ($\frac{١}{٢}$ ، ٣) وميل المماس عند أي نقطة عليه هو $(١-\frac{٢}{س^{٢}})$ حيث س ≠ ٠

(٦) منحنى ميل المماس له عند أى نقطة عليه (س ، ص) يساوى $\frac{س}{ص}$ أوجد معادلته إذا علم أنه يمر بالنقطة (٣،-٢) .

(٧) منحنى ميل المماس له عند أى نقطة عليه احداثيها السينى س هو $٣س^{٢}-٦س-٢$ – أوجد معادلته إذا علم أنه يمر بالنقطة (٣،-٢) .

(٨) منحنى ميل العمودى عند أى نقطة عليه إحداثيها السينى س هو $\frac{-١}{٢س-٦}$ أوجد معادلته إذا علم أنه يمر بالنقطة (٤ ،٥) .

(٩) منحنى ميل العمودى عند أي نقطة عليه (س،ص) هو٣ – ٢ س أوجد معادلته إذا كان يمر بالنقطة (١ ،٣) .

(١٠) منحنى يمر بالنقطة (٠، ١) وميله عند أي نقطة عليه يساوى $(٢س- \frac{١}{٢}س^{٢})$ أوجد معادلة كل من المماس والعمودى للمنحنى عند النقطة التى احداثيها السينى ٣ .

(١١) منحنى يمر بالنقطة (٠، ١٠) وميل المماس له عند أي نقطة عليه يساوى ٣(س^{٢} – ٦س +٥) – أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية له.

(١٢) إذا كان ميل منحنى عند أى نقطة عليه يتعين بالعلاقة $\frac{ء ص}{ء س}$= س^{٢} + ٢س -٨ وللمنحنى قيمة عظمى محلية تساوى $\frac{٢}{٣}$-٢٦ – فأوجد القيمة الصغرى المحلية له.

(١٣) إذا كان ميل منحنى عند أي نقطة عليه هو ٣(س-١) (س+١) وله قيمة صغرى محلية تساوى-٢. فأوجد القيمة العظمى المحلية له.

(١٤) إذا كان معدل التغير تحت تأثير الحرارة في مساحة صفيحة م من المعدن بالنسبة للزمن يتعين بالعلاقة $\frac{ء م}{ء ن}$ = ٠,٠١٥ ن^{٢} + ٠,٠٢ ن حيث م المساحة بالمتر المربع، ن الزمن بالدقيقة – فأوجد مساحة الصفيحة قبل بدء التسخين مباشرة إذا علم أن: م = ٩٠متراً مربعا عندما ن = ١٠ دقائق .

(١٥) في تجربة ما كان معدل التغير في حجم كمية من الغاز ح (مقدرة بالمتر المكعب) بالنسبة للضغط الواقع عليها ص (مقدرة بالنيوتن / متر مربع) يعطى بالعلاقة $\frac{ء ح}{ء ص}$=$\frac{-أ}{ص^{٢}}$ وكان ح = ١٢م^{٣} عندما ص = $\frac{١}{٢}$ نيوتن / م^{٢} – أوجد العلاقة بين الحجم والضغط .

(١٦) يقوم مجموعة من العمال بحفر حفرة من التراب فإذا كان معدل حجم التراب المرفوع بالمتر المكعب في الساعة يتعين بالعلاقة $\frac{ء ح}{ء ن}$ = ١٠ - $\frac{٢}{٣}$ ن ، أحسب حجم التراب المرفوع في ٣ ساعات .

(١٧) اشتركت متسابقتان لمدة أربع دقائق في الكتابة على الآلة الكاتبة فكانت سرعة المتسابقة الأولى تعطى من العلاقة $\frac{ء ك}{ء ن}$= -٦ن^{٢} + ١٢ن + ٩٠ كلمة / دقيقة حيث ك عدد الكلمات التي تكتبها خلال ومن ن دقيقة وسرعة المتسابقة الثانية تعطى من العلاقة $\frac{ء ل}{ء ن}$ = -٦ن^{٢} + ١٥ن + ٨٥ كلمة/ دقيقة حيث ل عدد الكلمات التي تكتبها خلال زمن ن دقيقة - أي المتسابقتين تكتب كلمات أكثر من الأخرى .

إجابات التمارين

أولاً: إجابة تمارين الصبر

حلول تمرين (١)

(١) ∵ |ن = ٢٤ = ١ × ٢ × ٣ × ٤

∴ |ن = |٤ ⟸ ن = ٤

∴ ${}^{ن}ل_{٢}$ = ${}^{٨}ل_{٢}$ = ٨ × ٧ × ٦ = ٣٣٦

(٢) ∵ ${}^{٨}ل_{ر}$ = ٦٧٢٠ = ٨ × ٧ × ٦ × ٥ × ٤

∴ ${}^{٨}ل_{ر}$ = ${}^{٨}ل_{٥}$ ⟸ ر = ٥

∴ |ر+١ = |٦

= ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٧٢٠

(٣) ∵ ${}^{ن}ل_{٤}$ = ١٤ × ${}^{ن-٢}ل_{٢}$

∴ $\dfrac{|ن}{|ن-٤}$ = ١٤ × $\dfrac{|ن-٢}{|ن-٥}$

∴ $\dfrac{ن(ن-١)|ن-٢}{(ن-٤)|ن-٥}$ = ١٤ × $\dfrac{|ن-٢}{|ن-٥}$

∵ $\dfrac{ن^{٢}-ن}{ن-٤}$ = ١٤

∴ $ن^{٢}$ - ن = ١٤ن - ٥٦

$ن^{٢}$ - ١٥ن + ٥٦ = ٠

(ن - ٧) (ن - ٨) = صفر

∴ ن = ٨ أ، ن = ٧

(٤) ∵ |ن+١ : |ن-١ = ٧٢

∴ $\dfrac{|ن+١}{|ن-١}$ = ٧٢

∴ ${}^{ن+١}ل_{ن+١-(ن-١)}$ = ٧٢

${}^{ن+١}ل_{٢}$ = ٧٢ = ٩ × ٨

∴ ${}^{ن+١}ل_{٢}$ = ${}^{٩}ل_{٢}$

∵ ن + ١ = ٩ ∴ ن = ٨

المقدار = ${}^{ن}ل_{٠}$ + ${}^{ن}ل_{١}$ + ${}^{ن}ل_{٢}$

= ${}^{٨}ل_{٠}$ + ${}^{٨}ل_{١}$ + ${}^{٨}ل_{٢}$ = ١ + ٨ + ٨ × ٧

= ١ + ٨ + ٥٦ = ٦٥

(٥) ∵ |ر = ٧٢٠

= ١ × ٢ × ٣ × ٤ × ٥ × ٦

|ن = |٤

∵ ${}^{ن}ل_{ر}$ = ٦٠٤٨٠

∴ ${}^{ن}ل_{٦}$ = ٦٠٤٨٠ = ٩ × ٨ × ٧ × ٦ × ٥ × ٤

${}^{ن}ل_{٦}$ = ${}^{٩}ل_{٦}$ ∴ ن = ٩

∴ ${}^{ن+١}ل_{ر-١}$ = ${}^{١٠}ل_{٥}$

= ١٠ × ٩ × ٨ × ٧ × ٦ = ٣٠٢٤٠

(٦) الطرف الأيسر = ${}^{ن-١}ل_{ر}$ + ر ${}^{ن-١}ل_{ر-١}$

= $\dfrac{|ن-١}{|ن-١-ر}$ + ر × $\dfrac{|ن-١}{|ن-ر}$

= |ن-١ $\left[\dfrac{١}{|ن-١-ر} + \dfrac{ر}{|ن-ر}\right]$

الأيسر = |ن-١ $\left[\dfrac{١}{|ن-١-ر} + \dfrac{ر}{(ن-ر)|ن-ر-١}\right]$

= |ن-١ $\left[\dfrac{ن-ر+ر}{(ن-ر)|ن-١-ر}\right]$

= $\dfrac{ن|ن-١}{|ن-ر}$ = $\dfrac{|ن}{|ن-ر}$ = ${}^{ن}ل_{ر}$ = الطرف الأيمن

(٧) ∵ ${}^{٢ن+١}$ل٤ ÷ ${}^{٢ن-١}$ل٣ = ٧٢/٥

∴ (|٢ن+١ / |٢ن-٣) ÷ (|٢ن-١ / |٢ن-٤) = ٧٢/٥

∴ (|٢ن+١ / |٢ن-٣) × (|٢ن-٤ / |٢ن-١) = ٧٢/٥

∴ ((٢ن+١)×٢ن |٢ن-١ × |٢ن-٤) / ((٢ن+٣) |٢ن-٤ × |٢ن-١) = ٧٢/٥

∴ (٤ن^{٢} + ٢ن) / (٢ن + ٣) = ٧٢/٥

∴ ٢٠ن^{٢}+١٠ن = ١٤٤ن+ ٢١٦

∴ ٢٠ن^{٢}- ١٣٤ن -٢١٦ =٠

∴ ١٠ن^{٢}- ٦٧ن – ١٠٨=٠

∴ (ن - ٤) (١٠ن- ٢٧) = ٠

ن = ٤ أ، ن = ٢٧/١٠ مرفوض

∴ |ن = |٤ = ٤×٣×٢×١

∴ |ن = ٢٤

(٨) ∵ ^{٩}ل$_{ر}$=٦٠٤٨٠=٩×٨×٧×٦×٥×٤

∴ ^{٩}ل$_{ر}$= ^{٩}ل٦ ∴ ر = ٦

∴ |ر = |٦ = ٦×٥×٤×٣×٢×١= ٧٢٠

(٩) |١٠ = ١٠×٩×٨× .... ×٣×٢×١

= (١×٣×٥×٧×٩)×(٢×٤×٦×٨×١٠)

= (١×٣×٥×٧×٩)×٢^{٥} (١×٢×٣×٤×٥)

= (١×٣×٥×٧×٩)×٢^{٥} |٥

(١٠) |٢ن = ٢ن (٢ن-١) (٢ن-٢) (٢ن-٣)

× .... ×٤×٣×٢×١

= [١×٣×٥× ...... (٢ن-١)]

× [٢×٤× ...... × (٢ن-٢) × ٢ن]

∴ |٢ن = [١×٣×٢× .....(٢ن-١)]

×٢^{ن} [١×٢× .... × (ن-١) × ن]

∴ |٢ن = [١×٣×٥× ....×(٢ن-١)]×٢^{ن} |ن

(١١) ∵ ${}^{س+ص}$ل٤ = ٣٦٠

∴ ${}^{س+ص}$ل٤ = ٦×٥×٤×٣ = ^{٦}ل٤

∴ س + ص = ٦ ---- (١)

∵ |٢س+ص = ٥٠٤٠

= ١×٢×٣×٤×٥×٦×٧

∴ |٢س+ص = |٧

∴ ٢س + ص = ٧ ---- (٢)

بطرح (١) من (٢) ∴ س = ١

من (١) ∴ ص = ٥

∴ ^{ص}ل$_{س}$ = ^{٥}ل١ = ٥

(١٢) ^{٦}ل$_{ر}$ = ٤× ^{٦}ل$_{ر-١}$

∴ |٦ / |٦-ر = ٤× |٦ / |٦-ر+١

∴ ١ / |٦-ر = ٤ / ((٧-ر) |٦-ر)

∴ ٧-ر = ٤ ∴ ر = ٣

المقدار = |٤ / |٥ + |٣ / |٤ + |١ / |٢

= |٤ / ٥|٤ + |٣ / ٤|٣ + |١ / ٢|١

$= \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{4 + 5 + 10}{20}$

$= \frac{19}{20}$

(١٣) ∵ س = { س: س ∈ ط، ١ ≤ س ≤ ٧}

∴ س = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧}

∵ ص = {(أ ، ب) : أ، ب ∈ ص، أ ≠ ب}

عناصر من مجموعة أزواج مرتبة

∴ عدد عناصر ص = $^{7}ل_{2}$ = ٧×٦ = ٤٢

(١٤) ∵ س = {س: س ∈ ص ، -٣ ≤ س ≤ ٤}

∴ س = {-٣، -٢، -١، ٠، ١، ٢، ٣، ٤}

∵ ع = {(أ، ب، ج) : أ، ب، ج ∈ س

، أ ≠ ب ≠ ج }

عناصر ع ثلاثيات مرتبة

عدد عناصر ع = $^{8}ل_{3}$ = ٨×٧×٦ = ٣٣٦

(١٥) ∵ $^{ن+1}ل_{2} \div \frac{|ن}{|ن-2} = 7$

∴ $\frac{|ن+1}{|ن+1-3} \times \frac{|ن-2}{|ن} = 7$

∴ $\frac{(ن+1)|ن}{|ن-2} \times \frac{|ن-2}{|ن} = 7$

∴ ن+١ = ٧ ∴ ن = ٦

حلول تمرين (٢)

(١) [أ] $^{13}ق_{6}$ = $\frac{13\times12\times11\times10\times9\times8}{1\times2\times3\times4\times5\times6}$

= ١٧١٦

[ب] $^{20}ق_{4}$ = $\frac{20\times19\times18\times17}{1\times2\times3\times4}$ = ٤٨٤٥

[ج] $^{20}ق_{17}$ = $^{20}ق_{3}$

= $\frac{20\times19\times18}{1\times2\times3}$ = ١١٤٠

[د] $^{100}ق_{98}$ = $^{100}ق_{2}$

= $\frac{100\times99}{1\times2}$ = ٤٩٥٠

(٢) ∵ $^{ن}ق_{2}$ = ٤٣٥

∴ $\frac{^{ن}ل_{2}}{|2}$ = ٤٣٥

∴ $\frac{^{ن}ل_{2}}{1\times2}$ = ٤٣٥

∴ $^{ن}ل_{2}$ = ٨٧٠ = ٣٠ × ٢٩

∴ $^{ن}ل_{2}$ = $^{30}ل_{2}$ ∴ ن = ٣٠

(٣) ∵ $^{ن}ق_{3} = \frac{1}{3}$ ٣٠ ن

∴ $^{ن}ق_{3} = \frac{91}{3}$ ٣٠ ن

∴ $\frac{^{ن}ل_{3}}{|3} = \frac{91}{3}$ ن

∴ $\frac{^{ن}ل_{3}}{1\times2\times3} = \frac{91}{3}$ ن

∴ $^{ن}ل_{3}$ = ٣ × ٢ × $\frac{91}{3}$ ن

∴ $^{ن}ل_{3}$ = ١٨٢ ن

∴ ن (ن-١) (ن-٢) = ١٨٢ ن

∴ ن^{2} − ٣ن+٢ = ١٨٢

∴ (ن- ١٥) (ن+١٢) = ٠

∴ ن = ١٥ أ، ن = -١٢ مرفوض

∴ $^{ن}ق_{١٠} = {}^{١٥}ق_{١٠}$

$= {}^{١٥}ق_{٥}$

$= \frac{١٥×١٤×١٣×١٢×١١}{٥×٤×٣×٢×١} = ٣٠٠٣$

(٤) ∵ $^{م}ق_{٢} = ٣$

∴ $\frac{^{م}ل_{٢}}{|٢} = ٣$ ∴ $^{م}ل_{٢} = ٣×٢$

∴ $^{م}ل_{٢} = {}^{٣}ل_{٢}$ ∴ م = ٣ ---(١)

∵ $^{م+ن}ق_{٣} = ٥٦$

∴ $\frac{^{م+ن}ل_{٣}}{|٣} = ٥٦$

∴ $^{م+ن}ل_{٣} = ٣×٢×١×٥٦$

∴ $^{م+ن}ل_{٣} = ٨ × ٧ × ٦ = {}^{٨}ل_{٣}$

∴ م + ن = ٨

من(١) ∴ ٣+ن = ٨ ∴ ن = ٥

∴ $|ن+م = |٨ = ٤٠٣٢٠$

(٥) ∵ $^{ن}ق_{٣} = ١٢٠$

∴ $\frac{^{ن}ل_{٣}}{|٣} = ١٢٠$

∴ $^{ن}ل_{٣} = ٣×٢×١×١٢٠$

∴ $^{ن}ل_{٣} = ١٠×٩×٨$

∴ $^{ن}ل_{٣} = {}^{١٠}ل_{٣}$ ∴ ن = ١٠

∴ $^{٢ن}ق_{ن+٥} = {}^{٢٠}ق_{١٥} = {}^{٢٠}ق_{٥}$

$= \frac{٢٠×١٩×١٨×١٧×١٦}{٥×٤×٣×٢×١} = ١٥٥٠٤$

(٦) ∵ $^{ن}ق_{٣} = ١٢٠$

∴ $\frac{^{ن}ل_{٣}}{|٣} = ١٢٠$

∴ $^{ن}ل_{٣} = ٣×٢×١×١٢٠$

∴ $^{ن}ل_{٣} = ١٠×٩×٨$

∴ $^{ن}ل_{٣} = {}^{١٠}ل_{٣}$ ∴ ن = ١٠

∴ $^{ن}ق_{ر^٢+٢ر} = {}^{ن}ق_{٢ر+٥}$

∴ $^{١٠}ق_{ر^٢+٢ر} = {}^{١٠}ق_{٢ر+٥}$

إما $ر^٢+٢ر+٢ر+٥=١٠$ أ، $ر^٢+٢ر=٢ر+٥$

∴ $ر^٢ + ٤ر - ٥ = ٠$ | ∴ $ر^٢ = ٥$

$(ر+٥)(ر-١) = ٠$ | ∴ $ر = \pm\sqrt{٥}$ مرفوض

∴ ر=١ أ، ر=-٥ مرفوض

∴ $^{ن}ق_{ر+٧} = {}^{١٠}ق_{٧+٣}$

$= {}^{١٠}ق_{١٠} = ١$

(٧) الأيمن $= {}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر+١}$

$= \frac{|ن}{|ن-ر\ |ر} + \frac{|ن}{|ن-ر-١\ |ر+١}$

$= \frac{(ر+١)|ن + (ن-ر)|ن}{|ن-ر\ |ر+١}$

∴ الأيمن $= \frac{|ن\ (ر+١+ن-ر)}{|ن-ر\ |ر+١}$

$= \frac{|ن\ (ن-ر)}{|ن-ر\ |ر+١} = {}^{ن+١}ق_{ر+١} =$ الطرف الأيسر

(أ) المقدار $= \frac{^{١٢}ق_{٦} + {}^{١٢}ق_{٥}}{^{١٨}ق_{٥}} = \frac{^{١٨}ق_{٦}}{^{١٨}ق_{٥}}$

$= \frac{١٨-٥}{٦} = \frac{١٣}{٦}$

(ب) الأيمن = $^{ن}ق_{ر+١} + ٢\ ^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-١}$

$= ({}^{ن}ق_{ر+١} + {}^{ن}ق_{ر}) + ({}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-١})$

$= {}^{ن+١}ق_{ر+١} + {}^{ن+١}ق_{ر}$

$= {}^{ن+٢}ق_{ر+١}$ = الأيسر

(٨) ∵ $^{ن}ق_{٤}$ ، $^{ن}ق_{٥}$ ، $^{ن}ق_{٦}$ في تتابع حسابي

∴ $٢ \times {}^{ن}ق_{٥} = {}^{ن}ق_{٤} + {}^{ن}ق_{٦}$

بالقسمة على $^{ن}ق_{٥}$ للطرفين

∴ $٢ = \frac{^{ن}ق_{٤}}{^{ن}ق_{٥}} + \frac{^{ن}ق_{٦}}{^{ن}ق_{٥}}$ ---(١)

$\frac{^{ن}ق_{٦}}{^{ن}ق_{٥}} = \frac{ن-٥}{٦}$

، $\frac{^{ن}ق_{٥}}{^{ن}ق_{٤}} = \frac{ن-٤}{٥}$

∴ $\frac{^{ن}ق_{٤}}{^{ن}ق_{٥}} = \frac{٥}{ن-٤}$

من (١) ∴ $٢ = \frac{٥}{ن-٤} + \frac{ن-٥}{٦}$

بضرب الطرفين × ٦ (ن- ٤)

∴ ١٢(ن- ٤) = ٣٠+ (ن- ٥) (ن- ٤)

١٢ن- ٤٨ = ٣٠+ $ن^{٢}$- ٩ن +٢٠

∴ $ن^{٢}$- ٢١ن +٩٨ =٠

(ن- ٧) (ن-١٤) = ٠

إما ن = ٧ أو ن = ١٤

(٩) الطرف الأيمن = $\frac{^{ن}ق_{ر}}{^{ن-١}ق_{ر-١}}$

$= \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-ر}\ \underline{|ر}} \div \frac{\underline{|ن-١}}{\underline{|ن-ر}\ \underline{|ر-١}}$

$= \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-ر}\ \underline{|ر}} \times \frac{\underline{|ن-ر}\ \underline{|ر-١}}{\underline{|ن-١}}$

$= \frac{ن\ \underline{|ن-١}}{\underline{|ن-ر} \times ر\underline{|ر-١}} \times \frac{\underline{|ن-ر}\ \underline{|ر-١}}{\underline{|ن-١}}$

$= \frac{ن}{ر}$ = الطرف الأيسر

المقدار = $\frac{^{٢٥}ق_{٤} + {}^{٢٤}ق_{٣}}{^{٢٤}ق_{٣} + {}^{٢٣}ق_{٢}}$

بقسمة كل من البسط والمقام علي $^{٢٤}ق_{٣}$

∴ المقدار = $\frac{\frac{^{٢٥}ق_{٤}}{^{٢٤}ق_{٣}} + ١}{١ + \frac{^{٢٣}ق_{٢}}{^{٢٤}ق_{٣}}}$

ولكن $\frac{^{٢٥}ق_{٤}}{^{٢٤}ق_{٣}} = \frac{٢٥}{٤}$

كذلك $\frac{^{٢٤}ق_{٣}}{^{٢٣}ق_{٢}} = \frac{٢٤}{٣}$

∴ المقدار = $\frac{\frac{٢٥}{٤}+١}{١ + \frac{٣}{٢٤}}$ بالضرب × $\frac{٢٤}{٢٤}$

$= \frac{١٥٠+٢٤}{٢٤+٣} = \frac{١٧٤}{٢٧} = \frac{٥٨}{٩}$

(١٠) ∵ $^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر+٢} : {}^{ن}ق_{ر+٤}$ = ٣: ١٤: ١٤

∴ $\frac{^{ن}ق_{ر+٢}}{^{ن}ق_{ر}} = \frac{١٤}{٣}$

بضرب الطرف الأيمن × $\frac{^{ن}ق_{ر+١}}{^{ن}ق_{ر+١}}$

∴ $\frac{^{ن}ق_{ر+٢}}{^{ن}ق_{ر+١}} \times \frac{^{ن}ق_{ر+١}}{^{ن}ق_{ر}} = \frac{١٤}{٣}$

∴ $\frac{ن-(ر+١)}{ر+٢} \times \frac{ن-ر}{ر+١} = \frac{١٤}{٣}$

∴ $\frac{(ن-ر)\ (ن-ر+١)}{(ر+٢)\ (ر+١)} = \frac{١٤}{٣}$ ---- (١)

كذلك $\frac{{}^{ن}ق_{ر+٤}}{{}^{ن}ق_{ر+٢}} = \frac{١٤}{١٤} = ١$

∴ الطرف الأيمن × $\frac{{}^{ن}ق_{ر+٣}}{{}^{ن}ق_{ر+٣}}$

∴ $\frac{{}^{ن}ق_{ر+٤}}{{}^{ن}ق_{ر+٣}} \times \frac{{}^{ن}ق_{ر+٣}}{{}^{ن}ق_{ر+٢}} = ١$

∴ $\frac{(ن-ر-٢)(ن-ر-٣)}{(ر+٤)(ر+٣)} = ١$

∴ (ن- ر-٢) (ن- ر-٣) = (ر+٤) (ر+٣)

∴ ${}^{ن-ر-٢}ل_{٢} = {}^{ر+٤}ل_{٢}$

∴ ن- ر-٢ = ر+ ٤

∴ ن = ٢ر +٦ ---- (٢)

بالتعويض في(١)

∴ $\frac{(٢ر+٦-ر)(٢ر+٦-ر-١)}{(ر+٢)(ر+١)} = \frac{١٤}{٣}$

∴ $\frac{(ر+٦)(ر+٥)}{(ر+٢)(ر+١)} = \frac{١٤}{٣}$

∴ ١٤(ر^{٢} +٣ر+٢) = ٣(ر^{٢} +١١ر+٣٠)

∴ ١٤ر^{٢} +٤٢ر+ ٢٨ = ٣ر^{٢} +٣٣ر+٩٠

∴ ١١ر^{٢} + ٩ر -٦٢= ٠

∴ (ر-٢) (١١ر+٣١) = ٠

∴ ر = ٢ أو ر = - $\frac{٣١}{١١}$ مرفوض

من (٢)

∴ ن = ٤+ ٦ ∴ ن = ١٠

حلول تمارين (٣)

١) (أ+ب)^{٥} = أ^{٥}+ ^{٥}ق$_{١}$ أ^{٤} ب+ ^{٥}ق$_{٢}$ أ^{٣} ب^{٢}

+ ^{٤}ق$_{٢}$ (٢س)^{٢} (٣ص)^{٢}

+ ^{٤}ق$_{٣}$ (٢س) (٣ص)^{٣} + (٣ص)^{٤}

^{٤}ق$_{١}$ = ^{٤}ق$_{٣}$ = ٤

٤ ق ٢ = $\frac{٥ \times ٤}{٢ \times ١}$ = ٦

∴ (أ+ب)^{٥} = أ^{٥}+ ٥أ^{٤}ب + ١٠أ^{٣}ب^{٢}

+ ١٠أ^{٢}ب^{٣} + ٥أب^{٤} + ب^{٥}

٢) (س-٢)^{٦}= س^{٦}- ^{٦}ق$_{١}$ س^{٥}×٢+ ^{٦}ق$_{٢}$ س^{٤}(٢)^{٢}

- ^{٦}ق$_{٣}$ س^{٣} (٢)^{٣}+ ^{٦}ق$_{٤}$ س^{٢} (٢)^{٤}

- ^{٦}ق$_{٥}$ س^{٣} (٢)^{٥} + (٢)^{٦}

^{٦}ق$_{١}$ = ^{٦}ق$_{٥}$ = ٦

^{٦}ق$_{٢}$ = ^{٦}ق$_{٤}$ = $\frac{٦ \times ٥}{٢ \times ١}$ = ١٥

^{٦}ق$_{٣}$ = $\frac{٦\times٥\times٤}{٣\times٢\times١}$ = ٢٠

∴ (س-٢)^{٦} = س^{٦}- ٦س^{٥}×٢+ ١٥س^{٤}×٤

- ٢٠س^{٣}×٨+ ١٥س^{٢}×١٦

- ٦س×٣٢ + ٦٤

∴ (س-٢)^{٦} = س^{٦}- ١٢س^{٥}+٦٠س^{٤}- ١٦٠س^{٣}

+٢٤٠س^{٢}- ١٩٢س+ ٦٤

٣) (٢س+٣ص)^{٤}=(٢س)^{٤}+ ^{٤}ق$_{١}$(٢س)^{٣}(٣ص)

+ ^{٤}ق$_{٢}$(٢س)^{٢}(٣ص)^{٢} + ^{٤}ق$_{٣}$(٢س)(٣ص)^{٣}

+ (٣س)^{٤}

ق$^{4}_{1}$ = ق$^{4}_{3}$ = ٤

ق$^{4}_{2}$ = $\frac{٤ \times ٣}{٢ \times ١}$ = ٦

∴ (٢س+٣ص)^{4} = ١٦س^{4} + ٤×٨ س^{3} ×٣ص + ٦×٤س^{2}×٩ص^{2} + ٤×٢س ×٢٧ص^{3} + ٨١ص^{4}

∴ (٢س+٣ص)^{4} = ١٦س^{4} + ٩٦س^{3}ص + ٢١٦س^{2}ص^{2} + ٢١٦س ص^{3} + ٨١ص^{4}

٤) (٣أ - ٢ب)^{5} = (٣أ)^{5} - ق$^{5}_{1}$(٣أ)^{4} (٢ب)
+ ق$^{5}_{2}$(٣أ)^{3}(٢ب)^{2} - ق$^{5}_{3}$(٣أ)^{2}(٢ب)^{3}
+ ق$^{5}_{4}$(٣أ) (٢ب)^{4} - (٢ب)^{5}

ق$^{5}_{1}$ = ق$^{5}_{4}$ = ٥

ق$^{5}_{2}$ = ق$^{5}_{3}$ = $\frac{٥ \times ٤}{٢ \times ١}$ = ١٠

∴ (٣أ - ٢ب)^{5} = ٢٤٣أ - ٥×٨١أ^{4}×٢ب + ١٠×٢٧أ^{3}×٤ب^{2} - ١٠×٩أ^{2}×٨ب^{3} + ٥×٣أ × ١٦ب^{4} - ٣٢ب^{5}

∴ (٣أ - ٢ب)^{5} = ٢٤٣أ^{5} - ٨١٠أ^{4}ب + ١٠٨٠أ^{3}ب^{2} - ٧٢٠أ^{2}ب^{3} + ٢٤٠أب^{4} - ٣٢ب^{5}

٥) (س - √٢)^{6} = س^{6} - ق$^{6}_{1}$ س^{5}(√٢)
+ ق$^{6}_{2}$س^{4}(√٢)^{2} - ق$^{6}_{3}$س^{3}(√٢)^{3}
+ ق$^{6}_{4}$س^{2}(√٢)^{4} - ق$^{6}_{5}$ س (√٢)^{5}
+ (√٢)^{6}

ق$^{6}_{1}$ = ق$^{6}_{5}$ = ٦

ق$^{6}_{2}$ = ق$^{6}_{4}$ = $\frac{٦ \times ٥}{٢ \times ١}$ = ١٥

ق$^{6}_{3}$ = $\frac{٦ \times ٥ \times ٤}{٣ \times ٢ \times ١}$ = ٢٠

(س-√٢)^{6} = س^{6} - ٦س^{5} × √٢ + ١٥س^{4}×٢
- ٢٠س^{3}×٢√٢ + ١٥س^{2}×٤
- ٦س×٤√٢ + ٨

(س-√٢)^{6} = س^{6} - ٦√٢ س^{5} + ٣٠س^{4}
- ٤٠√٢ س^{3} + ٦٠س^{2} - ٢٤√٢س + ٨

٦) (١-٣)^{4} = ١ - ق$^{4}_{1}$(٣س) + ق$^{4}_{2}$(٣س)^{2} - ق$^{4}_{3}$
(٣س)^{3} + (٣س)^{4}

ق$^{4}_{1}$ = ق$^{4}_{3}$ = ٤

ق$^{4}_{2}$ = $\frac{٤ \times ٣}{٢ \times ١}$ = ٦

(١-٣س)^{4} = ١ - ٤×٣س + ٦×٩س^{2} - ٤×٢٧س^{3}
+ ٨١ س^{4}

(١-٣س)^{4} = ١ - ١٢س + ٥٤ص^{2} - ١٠٨س^{3}
+ ٨١ س^{4}

٧) ($\frac{س}{٢}$ - $\frac{٣}{س}$)^{5} = ($\frac{س}{٢}$)^{5} - ق$^{5}_{1}$($\frac{س}{٢}$)^{4}
($\frac{٣}{س}$) + ق$^{5}_{2}$ ($\frac{س}{٢}$)^{3}($\frac{٣}{س}$)^{2}
- ق$^{5}_{3}$($\frac{س}{٢}$)^{2}($\frac{٣}{س}$)^{3} + ق$^{5}_{4}$($\frac{س}{٢}$)
($\frac{٣}{س}$)^{4} - ($\frac{٧ط}{٩}$)^{5}

ق$^{5}_{1}$ = ق$^{5}_{4}$ = ٥

ق$^{5}_{2}$ = ق$^{5}_{3}$ = $\frac{٥ \times ٤}{٢ \times ١}$ = ١٠

$\therefore (\frac{س}{٢} - \frac{٣}{س})^{٥} = \frac{س^{٥}}{٣٢} - ٥ \times \frac{س^{٤}}{١٦} \times \frac{٣}{س} + ١٠ \times \frac{س^{٣}}{٨} \times \frac{٩}{س^{٢}} - ١٠ \times \frac{س^{٢}}{٤} \times \frac{٢٧}{س^{٣}} + ٥ \times \frac{س}{٢} \times \frac{٨١}{س^{٤}} - \frac{٢٤٣}{س^{٥}}$

$\therefore (\frac{س}{٢} - \frac{٣}{س})^{٥} = \frac{١}{٣٢}س^{٥} - \frac{١٥}{١٦}س^{٣} + \frac{٤٥}{٤}س - \frac{١٣٥}{٢س} + \frac{٤٠٥}{٢س^{٣}} - \frac{١٤٣}{س^{٥}}$

٨) $(س^{٢}-١)^{٧} = (س^{٢})^{٧} - {}^{٧}ق_{١}(س^{٢})^{٦} + {}^{٧}ق_{٢}(س^{٢})^{٥}$
$- {}^{٧}ق_{٣}(س^{٢})^{٤} + {}^{٧}ق_{٤}(س^{٢})^{٣} - {}^{٧}ق_{٥}(س^{٢})^{٢}$
$- {}^{٧}ق_{٦}(س^{٢}) - ١$

${}^{٧}ق_{١} = {}^{٧}ق_{٦} = ٧$

${}^{٧}ق_{١} = {}^{٧}ق_{٦} = \frac{٧ \times ٦}{٢ \times ١} = ٢١$

${}^{٧}ق_{١} = {}^{٧}ق_{٦} = \frac{٧ \times ٦ \times ٥}{٣ \times ٢ \times ١} = ٣٥$

$\therefore (س^{٢}-١)^{٧} = س^{١٤} - ٧س^{١٢} + ٢١س^{١٠}$
$- ٣٥س^{٨} + ٣٥س^{٦} - ٢١س^{٤} + ٧س^{٢} - ١$

٩) في مفكوك $(س + \frac{١}{س})^{٩}$

$ح_{ر+١} = {}^{٩}ق_{ر}(س)^{٩-ر}(س^{-١})^{ر}$

$\therefore ح_{ر+١} = {}^{٩}ق_{ر}\,س^{٩-٢ر}$

بوضع ر = ٤

$\therefore ح_{٥} = {}^{٩}ق_{٤}\,س^{٩-٨}$

$\therefore ح_{٥} = {}^{٩}ق_{٤}\,س = ١٢٦س$

١٠) في مفكوك $(\frac{٢س}{٣} - \frac{٣}{٢س})^{١٠}$

$ح_{ر+١} = {}^{١٠}ق_{ر}(\frac{٢س}{٣})^{١٠-ر}(-\frac{٣}{٢س})^{ر}$

$= (-١)^{ر} \times {}^{١٠}ق_{ر}(\frac{٢}{٣})^{١٠-٢ر} \times س^{١٠-٢ر}$

بوضع ر = ٥

$\therefore ح_{٦} = (-١)^{٥} \times {}^{١٠}ق_{٥}(\frac{٢}{٣})^{١٠-١٠} \times س^{١٠-١٠}$

$= -{}^{١٠}ق_{٥} = -٢٥٢$

١١) في مفكوك $(\frac{٢}{\sqrt{س}} - \frac{\sqrt{س}}{٢})^{١١}$

$ح_{ر+١} = {}^{١١}ق_{ر}(\frac{٢}{\sqrt{س}})^{١١-ر}(-\frac{\sqrt{س}}{٢})^{ر}$

$= (-١)^{ر} \times {}^{١١}ق_{ر}(\frac{٢}{\sqrt{س}})^{١١-٢ر}$

بوضع ر = ٣

$\therefore ح_{٤} = -{}^{١١}ق_{٣}(\frac{٢}{\sqrt{س}})^{١١-٦}$

$\therefore ح_{٤} = -{}^{١١}ق_{٣} \times \frac{٣٢}{س^{٢}\sqrt{س}} = -٥٢٨٠\,س^{-\frac{٥}{٢}}$

١٢) في مفكوك $(٣س-٢)^{٨}$

$ح_{ر+١} = {}^{٨}ق_{ر}(٣س)^{٨-ر}(-٢)^{ر}$

$= (-١)^{ر} \times {}^{٨}ق_{ر}(٣)^{٨-ر}(٢)^{ر}\,س^{٨-ر}$

$\therefore$ معامل $ح_{ر+١} = (-١)^{ر} \times {}^{٨}ق_{ر}(٣)^{٨-ر}(٢)^{ر}$

بوضع ر = ٥

معامل $ح_{٦} = (-١)^{٥} \times {}^{٨}ق_{٥}(٣)^{٨-٥}(٢)^{٥}$

$= -{}^{٨}ق_{٥} \times ٢٧ \times ٣٢ = -٤٨٣٨٤$

١٣) في مفكوك $(٢س^{٢} - \frac{٣}{٢س})^{٩}$

$ح_{ر+١} = {}^{٩}ق_{ر} (٢س^{٢})^{٩-ر} (-\frac{٣}{٢س})^{ر}$

$= (-١)^{ر} × {}^{٩}ق_{ر} (٢س^{٢})^{٩-٢ر} (٣)^{ر} (س)^{١٨-٣ر}$

∴ معامل $ح_{ر+١} = (-١)^{ر} × {}^{٩}ق_{ر} (٢)^{٩-٢ر} (٣)^{ر}$

بوضع ر = ٦

∴ معامل $ح_{٧} = (-١)^{٦} × {}^{٩}ق_{٦} (٢)^{٩-١٢} (٣)^{٦}$

ولكن ${}^{٩}ق_{٦} = {}^{٩}ق_{٣}$

∴ معامل $ح_{٧} = {}^{٩}ق_{٣} × ٢^{-٣} × ٣^{٦}$

$= {}^{٩}ق_{٣} × \frac{٣^{٦}}{٢^{٣}}$

١٤) في مفكوك $(\frac{س^{٢}}{٢} - \frac{٣}{س})^{٧}$

$ح_{ر+١} = {}^{٧}ق_{ر} (\frac{س^{٢}}{٢})^{٧-ر} (-\frac{٣}{س})^{ر}$

∴ $ح_{ر+١} = (-١)^{ر} × {}^{٧}ق_{ر} × (٢)^{ر-٧}$

$(٣)^{ر} س^{١٤-٣ر}$

معامل $ح_{ر+١} = (-١)^{ر} × {}^{٧}ق_{ر} × ٢^{ر-٧} × ٣^{ر}$

بوضع ر = ٤

معامل $ح_{٤} = (-١)^{٤} × {}^{٧}ق_{٤} × ٢^{٤-٧} × ٣^{٤}$

ولكن ${}^{٧}ق_{٤} = {}^{٧}ق_{٣}$

∴ معامل $ح_{٥} = {}^{٧}ق_{٣} × \frac{٣^{٤}}{٢^{٣}}$

١٥) في مفكوك $(س + \frac{١}{س})^{٢ن}$

$ح_{ر} = {}^{٢ن}ق_{ر-١} (س)^{٢ن-ر+١} (س^{-١})^{ر-١}$

$= {}^{٢ن}ق_{ر-١} (س)^{٢ن-٢ر+٢}$

∴ معامل $ح_{ر} = {}^{٢ن}ق_{ر-١}$

$= \frac{\lfloor ٢ن}{\lfloor ر-١ \; \lfloor ٢ن-ر+١}$

١٦) في مفكوك $(س^{٢} + س^{-٢})^{٢ن-١}$

$ح_{ن} = {}^{٢ن-١}ق_{ن-١} (س^{٢})^{٢ن-١-ن+١} (س^{-٢})^{ن-١}$

$= {}^{٢ن-١}ق_{ن-١} \; س^{٤ن} × س^{-٢ن+٢}$

$= {}^{٢ن-١}ق_{ن-١} \; س^{٢ن+٢}$

∴ معامل $ح_{ن} = {}^{٢ن-١}ق_{ن-١} = \frac{\lfloor ٢ن-١}{\lfloor ن \; \lfloor ن-١}$

١٧) $(س+٢)^{٥} = س^{٥} + {}^{٥}ق_{١} س^{٤} × ٢ + {}^{٥}ق_{٢} س^{٣} (٢)^{٢}$

$+ {}^{٥}ق_{٣} س^{٢} (٢)^{٣} + {}^{٥}ق_{٤} س (٢)^{٤} - (٢)^{٥}$

بالطرح ∴ $(س+٢)^{٥} - (س-٢)^{٥}$

$= ٢[{}^{٥}ق_{١} س^{٤} × ٢ + {}^{٥}ق_{٣} س^{٢} (٢)^{٣} + (٢)^{٥}]$

$= ٢(١٠س^{٤} + ٨٠س^{٢} + ٣٢)$

$= ٤(٥س^{٤} + ٤٠س^{٢} + ١٦)$

١٨) $(١+\sqrt{س})^{٦} = ١ + {}^{٦}ق_{١}\sqrt{س} + {}^{٦}ق_{٢} (\sqrt{س})^{٢}$

$+ {}^{٦}ق_{٣}(\sqrt{س})^{٣} + {}^{٦}ق_{٤}(\sqrt{س})^{٤}$

$+ {}^{٦}ق_{٥}(\sqrt{س})^{٥} + {}^{٦}ق_{٦}(\sqrt{س})^{٦}$

$(١-\sqrt{س})^{٦} = ١ - {}^{٦}ق_{١}\sqrt{س} + {}^{٦}ق_{٢} (\sqrt{س})^{٢}$

$+ {}^{٦}ق_{٣}(\sqrt{س})^{٣} + {}^{٦}ق_{٤}(\sqrt{س})^{٤}$

$+ {}^{٦}ق_{٥}(\sqrt{س})^{٥} + {}^{٦}ق_{٦}(\sqrt{س})^{٦}$

بالطرح ∴ $(١+\sqrt{س})^{٦} - (١-\sqrt{س})^{٦}$

$= ٢[{}^{٦}ق_{١}\sqrt{س} + {}^{٦}ق_{٣}(\sqrt{س})^{٣} + {}^{٦}ق_{٥}(\sqrt{س})^{٥}]$

$= ٢[٦\sqrt{س} + ٢٠ س\sqrt{س} + ٦س^{٢}\sqrt{س}]$

$= ٤\sqrt{س} (٣ + ١٠س + ٣س^{٢})$

١٩) $(٠,٩٩٨)^{١٠} = (١ - ٠,٠٠٢)^{١٠}$

$= ١ - {}^{١٠}ق_{١}(٠,٠٠٢) + {}^{١٠}ق_{٢}(٠,٠٠٢)^{٢}$

$- {}^{١٠}ق_{٣}(٠,٠٠٢)^{٣} + ...$

$\therefore (٠,٩٩٨)^{١٠} = ١ - ١٠ \times ٠,٠٠٢ + ٤٥$

$\times ٠,٠٠٠٠٠٤ - ١٢٠ \times ٠,٠٠٠٠٠٠٠٠٨$

$+ ....$

$\therefore (٠,٩٩٨)^{١٠} = ١ - ٠,٠٢ + ٠,٠٠٠١٨٠$

$- ٠,٠٠٠٠٠٠٩٦٠ + ...$

$\therefore (٠,٩٩٨)^{١٠} = ١,٠٠٠١٨ - ٠,٢٠٠٠٠٩٦$

$= ٠,٩٨٠١٧٩٠٤ \approx ٠,٩٨٠١٨$

٢٠) $(١,٠٢)^{٥} = (١ + ٠,٠٢)^{٥}$

$= ١ + {}^{٥}ق_{١}(٠,٠٢) + {}^{٥}ق_{٢}(٠,٠٢)^{٢}$

$+ {}^{٥}ق_{٣}(٠,٠٢)^{٣} + {}^{٥}ق_{٤}(٠,٠٢)^{٤}$

$+ ....$

$(٠,٩٨)^{٥} = (١ - ٠,٠٢)^{٥}$

$= ١ - {}^{٥}ق_{١}(٠,٠٢) + {}^{٥}ق_{٢}(٠,٠٢)^{٢}$

$+ {}^{٥}ق_{٣}(٠,٠٢)^{٣} + {}^{٥}ق_{٤}(٠,٠٢)^{٤}$

$+ ....$

بالطرح $(١,٠٢)^{٥} - (٠,٩٨)^{٥}$

$= ٢[{}^{٥}ق_{١}(٠,٠٢) + {}^{٥}ق_{٣}(٠,٠٢)^{٣} + ...]$

$= ٢(٥ \times ٠,٠٢ + ١٠ \times ٠,٠٠٠٠٠٨ + ...)$

$= ٢(٠,١٠ + ٠,٠٠٠٠٨٠ + ...)$

$= ٢(٠,١٠٠٠٠٨ + ...)$

$\approx ٠,٠٢٠٠١٦$

حلول تمرين (٤)

(١) عدد الحدود $= ١٠ + ١ = ١١$

$\therefore$ رتبة الحد الأوسط $= \frac{١١+١}{٢} = ٦$

$ح_{ر+١} = {}^{١٠}ق_{ر}(س)^{١٠-ر}(س^{-١})^{ر} = {}^{١٠}ق_{ر}(س^{-١})^{ر}$

بوضع $ر = ٥$

$\therefore$ الحد الأوسط $= ح_{٦} = {}^{١٠}ق_{٥}(س)^{١٠-١٠}$

$= {}^{١٠}ق_{٥}$

$\therefore$ الحد الأوسط $= ٢٥٢$

(٢) عدد الحدود $= ١٢ + ١ = ١٣$

$\therefore$ رتبة الحد الأوسط $= \frac{١٣+١}{٢} = ٦$

$ح_{ر+١} = {}^{١٢}ق_{ر}(٢س^{٣})^{١٢-ر}\left(\frac{١}{٢س}\right)^{ر}$

$= {}^{١٢}ق_{ر}(٢)^{١٢-٢ر}(س)^{٣٦-٤ر}$

بوضع $ر = ٦$

$\therefore$ الحد الأوسط $= ح_{٧} = {}^{١٢}ق_{٦}(٢)^{١٢-١٢}(س)^{٣٦-٢٤}$

$= {}^{١٢}ق_{٦}(٢)^{صفر}س^{١٢}$

$= {}^{١٢}ق_{٦}س^{١٢}$

(٣) عدد الحدود $= ٩ + ١ = ١٠$

$\therefore$ رتبة الحدين الأوسطين ٥، ٦

$ح_{ر+١} = {}^{٩}ق_{ر}\left(\frac{س}{٢}\right)^{٩-ر}\left(-\frac{٣}{ص}\right)^{ر}$

$\therefore ح_{ر+١} = (-١)^{ر} \times {}^{٩}ق_{ر}(٢)^{ر-٩}(٣)^{ر}(س)^{٩-ر}$

$\times (ص)^{-ر}$

بوضع $ر = ٤$

$ح_{٥} = {}^{٩}ق_{٤}(٢)^{-٥}(٣)^{٤}س^{٥} \times ص^{-٤}$

ح٥ = ١٢٦ × $\frac{٨١}{٣٢}$ × $\frac{س^٥}{ص^٤}$

ح٥ = $\frac{٥١٠٣ \; س^٥}{٣٢ \; ص^٤}$

بوضع ر = ٥

ح٦ = - × ٩ق٥ (٢)$^{-٤}$ (٣)^٥ (س)^٤ (ص)$^{-٥}$

= -١٢٦ × $\frac{٢٤٣}{١٦}$ × $\frac{س^٤}{ص^٥}$

ح٦ = - $\frac{١٥٣٠٩ \; س^٤}{٨ \; ص^٥}$

(٤) ح ر+١ = ١٢قر $(\frac{٢س}{٣})^{١٢-ر}$ $(-\frac{٣}{س})^ر$

= (-١)^ر × ١٢قر (٢)$^{١٢-ر}$ (٣)$^{٢ر-١٢}$

× س$^{١٢-٢ر}$

لإيجاد معامل س^٨ نضع أس س = ٨

∴ ١٢ - ٢ر = ٨ ∴ ر = ٢

∴ معامل س^٨ = (-١)^٢ × ١٢ق٢ (٢)^{١٠} (٣)$^{-٨}$

= ١٢ق٢ × $\frac{٢^{١٠}}{٣^٨}$

(٥) ح ر+١ = ١٠قر $(\frac{س^٢}{٢})^{١٠-ر}$ $(-\frac{١}{س})^ر$

= (-١)^ر × ١٠قر (٢)$^{ر-١٠}$ (س)$^{٢٠-٣ر}$

بوضع أس س = ١١

∴ ٢٠ - ٣ر = ١١

∴ ٣ر = ٩ ∴ ر = ٣

∴ معامل س^{١١} = (-١)^٣ (٢)$^{٣-١٠}$ × ١٠ق٣

= - ١٠ق٣ $(\frac{١}{٢})^٧$

(٦) ح ر+١ = ١٠قر (س^٣)$^{١٠-ر}$ (-س$^{-٤}$)^ر

= (-١)^ر × ١٠قر س$^{٣٠-٧ر}$

بوضع أس س = ٩

∴ ٣٠ - ٧ر = ٩ ∴ ر = ٣

∴ معامل س^٩ = (-١)^٣ × ١٠ق٣ = - ١٠ق٣

(٧) ح ر+١ = ٨قر (س^٣)$^{٨-ر}$ (-س$^{-٤}$)^ر

= (-١)^ر × ٨قر س$^{٢٤-٧ر}$

بوضع أس س = -٤

∴ ٢٤ - ٧ر = -٤ ∴ ر = ٤

∴ معامل س$^{-٤}$ = + ٨ق٤

(٨) ح ر+١ = ١٠قر $(\frac{س^٣}{٣})^{١٠-ر}$ $(\frac{٢}{س^٢})^ر$

= ١٠قر (٣)$^{ر-١٠}$ (٢)^ر (س)$^{٣٠-٥ر}$

لإيجاد الحد الخالى من س نضع أس س = صفر

∴ ٣٠ - ٥ر = ٠ ∴ ر = ٦

∴ الحد الخالى من س هو ح٧ = ١٠ق٦ (٣)$^{-٤}$ (٢)^٦

∴ الحد الخالى من س = ١٠ق٤ × $\frac{٢^٦}{٣^٤}$

(٩) ح ر+١ = ٩قر (س)$^{٩-ر}$ $(-\frac{١}{٢س^٢})^ر$

= (-١)^ر × ٩قر (٢)$^{-ر}$ (س)$^{٩-٣ر}$

لإيجاد الحد الخالى من س نضع أس س = ٠

∴ ٩ - ٣ر = ٠ ∴ ر = ٣

∴ الحد الخالى من س هو

ح٤ = (-١)^٣ × ٩ق٣ × (٢)$^{-٣}$ = - ٩ق٣ × $\frac{١}{٨}$

(١٠) $ح_{ر+1} = {}^{9}ق_{ر}\,(2س^{3})^{9-ر}\,(-\frac{3}{س})^{ر}$

$= (-1)^{ر} \times {}^{9}ق_{ر}\,(2)^{9-ر}\,(3)^{ر}\,(س)^{27-4ر}$

بوضع أس س = صفر

∴ $27-4ر = 0$ ∴ $ر = \frac{27}{4} \notin ص^{+}$

∴ لا يوجد حد خال من س

(١١) $ح_{ر+1} = {}^{13}ق_{ر}\,(س)^{13-ر}\,(-\frac{1}{س^{2}})^{ر}$

$= {}^{13}ق_{ر}\,(س)^{13-3ر}$

لإيجاد معامل س نضع أس س = ١

$13 - 3ر = 0$ ∴ $ر = 4$

معامل س = ${}^{13}ق_{4}$

(١٢) $ح_{ر+1} = {}^{11}ق_{ر}\,(\frac{س}{2})^{11-ر}\,(-\frac{3}{س})^{ر}$

$= (-1)^{ر} \times {}^{11}ق_{ر}\,(2)^{ر-11}\,(3)^{ر}\,س^{11-2ر}$

بوضع أس س = ٦ ∴ $11-2ر = 6$

$ر = \frac{5}{2} \notin ط$

∴ لا يوجد حد يشتمل على $س^{6}$

(١٣) $ح_{ر+1} = {}^{12}ق_{ر}\,(س)^{12-ر}\,(\frac{3}{2س^{2}})^{ر}$

$= {}^{12}ق_{ر}\,(3)^{ر}\,(2)^{-ر}\,(س)^{12-3ر}$

أولاً: بوضع أس س = ٦

∴ $12 - 3ر = 6$ ∴ $ر = 2$

∴ معامل $س^{6} = {}^{12}ق_{2}\,(3)^{2}\,(2)^{-2}$

$= \frac{9}{4} \times {}^{12}ق_{2}$

ثانياً: بوضع أس س= صفر

∴ $12-3ر = 0$ ∴ $ر = 4$

∴ الحد الخالي من س هو $ح_{5}$

(١٤) $ح_{ر+1} = {}^{15}ق_{ر}\,(س)^{15-ر}\,(-\frac{1}{س})^{ر}$

$= (-1)^{ر} \times {}^{15}ق_{ر}\,(س)^{15-2ر}$

عدد الحدود = ١٥-١ = ١٦

رتبة الحدان الأوسطان ٨، ٩

بوضع ر =٧ ∴ $أ = ح_{8} = -{}^{15}ق_{7}\,س$

بوضع ر =٨ ∴ $أ = ح_{9} = -{}^{15}ق_{8}\,س^{-1}$

الطرف الأيمن = $أ + ب\,س^{2}$

$= -{}^{15}ق_{7}\,س + {}^{15}ق_{8}\,س^{-1} \times س^{2}$

$= -{}^{15}ق_{7}\,س + {}^{15}ق_{8}\,س$

ولكن ${}^{15}ق_{7} = {}^{15}ق_{8}$ ∴ الطرف الأيمن = ٠

(١٥) $ح_{ر+1} = {}^{ن}ق_{ر}\,(س^{5})^{ن-ر}\,(\frac{3}{س^{2}})^{ر}$

$= {}^{ن}ق_{ر}\,س^{5ن-7ر}$

لإيجاد الحد الخالي من س نضع أس س = صفر

$5ن - 7ر = 0$ ∴ $ر = \frac{5ن}{7}$

ولكي يوجد حد خالي من س ∴ $ر \in ط$

∴ ن = ٧ أو مكرر للعدد ٧

عندما ن = ١٤ ∴ ر = ١٠

∴ الحد الخالي من س = ${}^{14}ق_{10} = {}^{14}ق_{4}$

(١٦) $ح_{ر+1} = {}^{ن}ق_{ر}\,(س^{2})^{ن-ر}\,(\frac{1}{س})^{ر}$

$= {}^{ن}ق_{ر}\,س^{2ن-3ر}$

لإيجاد الحد الخالي من س نضع أس س = صفر

∴ $2ن - 3ر = 0$ ∴ $ر = \frac{2ن}{3}$

ولكن يوجد حد خالي من س ∴ $ر \in ط$

∴ يجب أن يكون مضاعف للعدد ٣

عندما ن= ١٢ ∴ ر= ٨

∴ الحد الخالي من س = ${}^{12}ق_{8} = {}^{12}ق_{4}$

حلـول تمـريـن (٥)

(١) عدد الحدود = ١٧+١ = ١٨

∴ رتبة الحدين الأوسطين ٩ ، ١٠

$$\because \frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} = \frac{ن-ر+١}{ر} \times \frac{٣}{٢س}$$

بوضع ر = ٩

$$\therefore \frac{ح_{١٠}}{ح_{٩}} = \frac{١٧-٩+١}{٩} \times \frac{٣}{٢س}$$

$$= \frac{٩}{٩} \times \frac{٣}{٢س}$$

$$\therefore \frac{ح_{١٠}}{ح_{٩}} = \frac{٣}{٢س}$$

ولكن $ح_{٩} = ح_{١٠}$ ∴ $\frac{ح_{١٠}}{ح_{٩}} = ١$

∴ $\frac{٣}{٢س} = ١$ ∴ ٢س = ٣

∴ $س = \frac{٣}{٢}$

(٢) ∵ $ح_{٣} = ١١٥٢٠$ ، $ح_{٤} = ١٥٣٦٠$

، $ح_{٥} = ١٣٤٤٠$

، $\because \frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} = \frac{ن-ر+١}{ر} \times \frac{ص}{س}$

بوضع ر = ٣

$$\therefore \frac{ح_{٤}}{ح_{٣}} = \frac{ن-٣+١}{٣} \times \frac{ص}{س}$$

$$\therefore \frac{ن-٢}{٣} \times \frac{ص}{س} = \frac{١٥٣٦٠}{١١٥٢٠} \quad --- (١)$$

بوضع ر = ٤

$$\therefore \frac{ح_{٥}}{ح_{٤}} = \frac{ن-٤+١}{٤} \times \frac{ص}{س}$$

$$\therefore \frac{ن-٣}{٤} \times \frac{ص}{س} = \frac{١٣٤٤٠}{١٥٣٦٠} \quad --- (٢)$$

بقسمة (٢) ÷ (١)

$$\therefore \frac{ن-٣}{٤} \times \frac{٣}{ن-٢} = \frac{١٣٤٤٠}{١٥٣٦٠} \times \frac{١١٥٢٠}{١٥٣٦٠}$$

$$\therefore \frac{٣(ن-٣)}{٤(ن-٢)} = \frac{٢١}{٣٢}$$

∴ ٨(ن-٣) = ٧(ن-٢)

٨ن - ٢٤ = ٧ن - ١٤ ∴ ن = ١٠

بالتعويض في (١)

$$\frac{١٠-٢}{٣} \times \frac{ص}{س} = \frac{١٥٣٦٠}{١١٥٢٠}$$

$$\frac{٨}{٣} \times \frac{ص}{س} = \frac{٤}{٣}$$

∴ ٢ص = س --- (٣)

ولكن $ح_{٣} = ١١٥٢٠$

$$\therefore {}^{ن}ق_{٢} \times (س)^{ن-٢} \times ص^{٢} = ١١٥٢٠$$

$$\therefore {}^{١٠}ق_{٢} \times (س)^{١٠-٢} \times ص^{٢} = ١١٥٢٠$$

$$\therefore \frac{١٠ \times ٩}{٢ \times ١} \times س^{٨} ص^{٢} = ١١٥٢٠$$

بالتعويض من (٣) عن س = ٢ص

$$\therefore \frac{٩٠}{٢} \times (٢ص)^{٨} \times ص^{٢} = ١١٥٢٠$$

$$\therefore ٩ \times ١٢٨ ص^{١٠} = ١١٥٢٠$$

∴ ص = ± ١ ∴ س = ± ٢

(٣) ∵ $ح_{٢} = ٢٤٠$ ، $ح_{٣} = ٧٢٠$ ، $ح_{٤} = ١٠٨٠$

$$\therefore \frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} = \frac{ن-ر+١}{ر} \times \frac{ص}{س}$$

بوضع ر = ٢

∴ $\frac{ح_٣}{ح_٢} = \frac{ن-٢+١}{٢} \times \frac{ص}{س}$

∴ $\frac{ن-١}{٢} \times \frac{ص}{س} = \frac{٧٢٠}{٢٤٠}$ —— (١)

بوضع ر = ٣

∴ $\frac{ح_٤}{ح_٣} = \frac{ن-٣+١}{٣} \times \frac{ص}{س}$

∴ $\frac{ن-٢}{٣} \times \frac{ص}{س} = \frac{١٠٨٠}{٧٢٠}$ —— (٢)

بقسمة (٢) ÷ (١)

∴ $\frac{ن-٢}{٣} \times \frac{ن-١}{٢} = \frac{١٠٨٠}{٧٢٠} \times \frac{٧٢٠}{٢٤٠}$

∴ $\frac{٢(ن-٢)}{٣(ن-١)} = \frac{١}{٢}$

∴ ٤(ن-٢) = ٣(ن-١)

∴ ٤ن - ٨ = ٣ن - ٣

∴ ن = ٥

من(١) $\frac{٥-١}{٢} \times \frac{ص}{س} = \frac{٧٢٠}{٢٤٠}$

∴ $٢ \times \frac{ص}{س} = ٣$

∴ ٢ص = ٣ س ∴ $ص = \frac{٣}{٢} س$

∵ $ح_٢ = ٢٤٠$

∴ $^{٥}ق_١ \times س^٤ \times ص = ٢٤$

∴ $٥ \left(\frac{٣}{٢}\right) س^٥ = ٢٤٠$

∴ $\frac{٢ \times ٢٤٠}{٣ \times ٥} \times س^٥ = ٢٤٠$

∴ $س^٥ = ٣٢$ ∴ س = ٢

∴ $ص = \frac{٣}{٢} \times ٢$ ∴ ص = ٣

(٤) نفرض أن رتب الحدود هي ر، ر+١ ، ر+٢

∵ $ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_ر \times (١)^{ن-ر} \times س^ر$

∴ معامل $ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_ر$

∵ معامل $ح_ر = ٢٠$

∴ ${}^{ن}ق_{ر-١} = ٢٠$ —— (١)

∵ معامل $ح_{ر+١} = ١٩٠$

∴ ${}^{ن}ق_{ر-١} = ١٩٠$ —— (٢)

∵ معامل $ح_{ر+٢} = ١١٤٠$

∴ ${}^{ن}ق_{ر-١} = ١١٤٠$ —— (٣)

بقسمة (٢) ÷ (١) ∴ $\frac{{}^{ن}ق_ر}{{}^{ن}ق_{ر-١}} = \frac{١٩٠}{٢٠}$

∴ $\frac{ن-ر+١}{ر} = \frac{١٩}{٢}$

∴ ٢ن-٢ ر+٢ = ١٩ر ← ٢ن = ٢١ر-٢

بقسمة (٣) ÷ (٢) ∴ $\frac{{}^{ن}ق_{ر+١}}{{}^{ن}ق_ر} = \frac{١١٤٠}{١٩٠}$

∴ $\frac{ن-ر}{ر+١} = ٦$

ن- ر = ٦ر+٦ ← ن = ٧ر + ٦

بالتعويض من(٥) في (٤)

∴ ٢ (٧ر +٦) = ٢١ر-٢

∴ ١٤ر +١٢ = ٢١ر- ٢

∴ ٧ر = ١٤ ∴ ر = ٢

بالتعويض فى (٥) ∴ ن = ١٤+ ٦ = ٢٠

ملحوظة : يمكن الحل مباشرة باستخدام النسبة بين معاملي حدين متتاليين كما يلي :

$$\frac{\text{معامل } ح_{ر+١}}{\text{معامل } ح_{ر}} = \frac{ن-ر+١}{ر} \times \frac{\text{معامل الأول}}{\text{معامل الثاني}}$$

(٥) نفرض أن رتب الحدود ر ، ر+١ ، ر+٢

$$\frac{\text{معامل } ح_{ر+١}}{\text{معامل } ح_{ر}} = \frac{ن-ر+١}{ر} \times \frac{\text{معامل الأول}}{\text{معامل الثاني}}$$

$$\therefore \frac{\text{معامل } ح_{ر+١}}{\text{معامل } ح_{ر}} = \frac{ن-ر+١}{ر} \times \frac{١}{١}$$

$$\therefore \frac{ن-ر+١}{ر} = \frac{٢٤}{١٥} = \frac{٨}{٥}$$

$\therefore$ ٥ ن - ٥ ر + ٥ = ٨ ر

$\therefore$ ٥ ن = ١٣ ر - ٥

$\therefore$ ن = $\frac{١}{٥}$ (١٣ر - ٥) ---- (١)

$$\frac{\text{معامل } ح_{ر+٢}}{\text{معامل } ح_{ر+١}} = \frac{ن-(ر+١)+١}{ر+١} \times \frac{١}{١}$$

$$\therefore \frac{ن-ر}{ر+١} = \frac{٢٨}{٢٤} = \frac{٧}{٦}$$

$\therefore$ ٦ ن - ٦ ر = ٧ر + ٧

$\therefore$ ٦ن = ١٣ر+٧ بالتعويض من(١)×(٢)

$\therefore$ ٦ × $\frac{١}{٥}$ (١٣ر - ٥) = ١٣ر + ٧

$\therefore$ ٦ (١٣ر - ٥) = ٥ (١٣ر + ٧)

٧٨ر - ٣٠ = ٦٥ر + ٣٥

$\therefore$ ١٣ر = ٦٥ ← $\therefore$ ر = ٥

من (١) $\therefore$ ن = $\frac{١}{٥}$ (١٣×٥ - ٥)

$\therefore$ ن = ١٣ - ١ $\therefore$ ن = ١٢

$\therefore$ ترتيب الحدود ٥ ، ٦ ، ٧

(٦) في مفكوك (أ + ب)^{ن}

$$\frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} = \frac{ن-ر+١}{ر} \times \frac{ب}{أ}$$

بوضع ر = ٢

$$\therefore \frac{ح_{٣}}{ح_{٢}} = \frac{ن-٢+١}{٢} \times \frac{ب}{أ}$$

$$\therefore \frac{ح_{٣}}{ح_{٢}} = \frac{ن+١}{٢} \times \frac{ب}{أ} \quad \text{---- (١)}$$

في مفكوك (أ + ب)$^{ن+٣}$

$$\frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} = \frac{ن+٣-ر+١}{ر} \times \frac{ب}{أ}$$

بوضع ر = ٣

$$\therefore \frac{ح_{٤}}{ح_{٣}} = \frac{ن+٣-٣+١}{٣} \times \frac{ب}{أ}$$

$$\therefore \frac{ح_{٤}}{ح_{٣}} = \frac{ن+١}{٣} \times \frac{ب}{أ} \quad \text{--- (٢)}$$

$$\because \frac{ح_{٣}}{ح_{٢}} = \frac{ح_{٤}}{ح_{٣}}$$

$$\therefore \frac{ن-١}{٢} \times \frac{ب}{أ} = \frac{ب}{أ} \times \frac{ن+١}{٣}$$

$\therefore$ ٢ (ن+١) = ٣ (ن- ١)

$\therefore$ ٢ن + ٢ = ٣ن - ٣

$\therefore$ ن = ٥

(٧) في مفكوك (١+ م س)^{ن}

$$\frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} = \frac{ن-ر+١}{ر} \times \frac{م}{١} \quad \text{---- (١)}$$

$$\frac{\text{معامل } ح_{٦}}{\text{معامل } ح_{٤}} = \frac{٤}{١}$$

$$\frac{\text{معامل } ح_{٦}}{\text{معامل } ح_{٥}} \times \frac{\text{معامل } ح_{٥}}{\text{معامل } ح_{٤}} = ٤$$

$\therefore \frac{\text{ن}-٥+١}{٥} \times \frac{\text{م}}{١} \times \frac{\text{ن}-٤+١}{٤} \times \frac{\text{م}}{١} = ٤$

$\therefore (\text{ن}-٤)(\text{ن}-٣)\,\text{م}^{٢} = ٨٠$ ---- (٢)

$\frac{\text{معامل ح}_{٨}}{\text{معامل ح}_{٦}} = \frac{٤}{٧}$

$\frac{\text{معامل ح}_{٨}}{\text{معامل ح}_{٧}} \times \frac{\text{معامل ح}_{٧}}{\text{معامل ح}_{٦}} = \frac{٤}{٧}$

$\therefore \frac{\text{ن}-٧+١}{٧} \times \frac{\text{م}}{١} \times \frac{\text{ن}-٦+١}{٦} \times \frac{\text{م}}{١} = \frac{٤}{٧}$

$\therefore (\text{ن}-٦)(\text{ن}-٥)\,\text{م}^{٢} = ٢٤$ ---- (٣)

بقسمة (٢) ÷ (٣)

$\therefore \frac{(\text{ن}-٤)(\text{ن}-٣)}{(\text{ن}-٦)(\text{ن}-٥)} = \frac{٨٠}{٢٤}$

$\therefore \frac{\text{ن}^{٢} - ٧\text{ن} + ١٢}{\text{ن}^{٢} - ١١\text{ن} + ٣٠} = \frac{١٠}{٣}$

$\therefore ١٠\text{ن}^{٢} - ١١٠\text{ن} + ٣٠٠ = ٣\text{ن}^{٢} - ٢١\text{ن} + ٣٦$

$\therefore ٧\text{ن}^{٢} - ٨٩\text{ن} + ٢٦٤ = ٠$

$\therefore (\text{ن}-٨)(٧\text{ن}-٣٣) = ٠$

$\therefore \text{ن} = ٨$ أ، $\text{ن} = \frac{٣٣}{٧} \notin \text{ص}^{+}$ مرفوض

من(٢) $٤ \times ٥\,\text{م}^{٢} = ٨٠$

$\therefore \text{م}^{٢} = ٤ \quad \therefore \text{م} = \pm ٢$

(٨) في مفكوك $(٢\text{س} + ٣\text{س}^{-٢})^{\text{ن}}$

$\frac{\text{ح}_{\text{ر}+١}}{\text{ح}_{\text{ر}}} = \frac{\text{ن}-\text{ر}+١}{\text{ر}} \times \frac{٣\text{س}^{-٢}}{٢\,\text{س}}$

$\therefore \frac{\text{ح}_{\text{ر}+١}}{\text{ح}_{\text{ر}}} = \frac{\text{ن}-\text{ر}+١}{\text{ر}} \times \frac{٣}{٢\text{س}^{٣}}$

$\because \text{ح}_{٩} = \text{ح}_{١٠} \quad \therefore \frac{\text{ح}_{١٠}}{\text{ح}_{٩}} = ١$

بوضع ر = ٩

$\frac{\text{ح}_{١٠}}{\text{ح}_{٩}} = \frac{\text{ن}-٩+١}{٩} \times \frac{٣}{٢\text{س}^{٣}}$

$\therefore \frac{\text{ن}-٨}{٦\text{س}^{٣}} = ١ \Leftarrow \text{ن}-٨ = ٦\text{س}^{٣}$ --- (١)

بوضع ر = ٦

$\therefore \frac{\text{ح}_{٧}}{\text{ح}_{٦}} = \frac{\text{ن}-٦+١}{٦} \times \frac{٣}{٢\text{س}^{٣}}$

ولكن $\frac{\text{ح}_{٧}}{\text{ح}_{٦}} = \frac{١٥}{٨}$

$\therefore \frac{\text{ن}-٥}{٤\text{س}^{٣}} = \frac{١٥}{٨}$

$\therefore ٢(\text{ن}-٥) = ١٥\,\text{س}^{٣}$ ---- (٢)

بقسمة (٢) ÷ (١)

$\therefore \frac{٢(\text{ن}-٥)}{(\text{ن}-٨)} = \frac{١٥\text{س}^{٣}}{٦\,\text{س}^{٣}}$

$\therefore \frac{٢(\text{ن}-٥)}{(\text{ن}-٨)} = \frac{٥}{٢}$

$\therefore ٥(\text{ن}-٨) = ٤(\text{ن}-٥)$

$٥\text{ن}-٤٠ = ٤\text{ن}-٢٠ \quad \therefore \text{ن} = ٢٠$

$\text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{٢٠}\text{ق}_{\text{ر}}\,(٢\text{س})^{٢٠-\text{ر}}\,(٣\text{س}^{-٢})^{\text{ر}}$

$= {}^{٢٠}\text{ق}_{\text{ر}}\,(٢)^{٢٠-\text{ر}}\,(٣)^{\text{ر}}\,(\text{س})^{٢٠-٣\text{ر}}$

بوضع أس س = صفر $\therefore ٢٠-٣\text{ر} = ٠$

$\therefore ٣\text{ر} = ٢٠ \Leftarrow \text{ر} = \frac{٢٠}{٣} \notin \text{ط}$

لا يوجد حد خالى من س في المفكوك

(٩) في مفكوك $(س+٣)^{ن}$

$$\frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} = \frac{ن-ر+١}{ر} \times \frac{٣}{س}$$

∵ $ح_{١٠} = \frac{٢}{٣} ح_{٩}$ ∴ $\frac{ح_{١٠}}{ح_{٩}} = \frac{٢}{٣}$

بوضع ر = ٩

∴ $\frac{ح_{١٠}}{ح_{٩}} = \frac{ن-٩+١}{٩} \times \frac{٣}{س}$

∴ $\frac{ن-٨}{٣} \times \frac{١}{س} = \frac{٢}{٣}$

٢س = ن - ٨ ---- (١)

∵ $ح_{١٥} = \frac{١}{٤} ح_{١٤}$ ∴ $\frac{ح_{١٥}}{ح_{١٤}} = \frac{١}{٤}$

بوضع ر = ١٤

∴ $\frac{ح_{١٥}}{ح_{١٤}} = \frac{ن-١٤+١}{١٤} \times \frac{٣}{س}$

∴ $\frac{ن-١٣}{١٤} \times \frac{٣}{س} = \frac{١}{٤}$

س = $\frac{٦}{٧}$ (ن - ١٣) ---- (٢)

بقسمة (١) ÷ (٢)

∴ ٢ = $\frac{(ن-٨)}{(ن-١٣)} \times \frac{٦}{٧}$

∴ ١٢ن - ١٥٦ = ٧ن - ٥٦

∴ ٥ن = ١٠٠ ∴ ن = ٢٠

من(١) ٢س = ٢٠ - ٨ ∴ ٢س = ١٢

∴ س = ٦

(١٠) في مفكوك $(١+س)^{ن}$

$$\frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} = \frac{ن-ر+١}{ر} \times \frac{س}{١}$$

∵ $ح_{٤} = \frac{٢٥}{٣} ح_{٢}$ ∴ $\frac{ح_{٤}}{ح_{٢}} = \frac{٢٥}{٣}$

∴ $\frac{ح_{٤}}{ح_{٣}} \times \frac{ح_{٣}}{ح_{٢}} = \frac{٢٥}{٣}$

∴ $\frac{ن-٣+١}{٣} \times \frac{س}{١} \times \frac{ن-٢+١}{٢} \times \frac{س}{١} = \frac{٢٥}{٣}$

∴ $(ن-٢)(ن-١)س^{٢} = ٥٠$ ---- (١)

∵ $ح_{٦} = ح_{٥}$ ∴ $\frac{ح_{٦}}{ح_{٥}} = ١$

∴ $\frac{ن-٥+١}{٥} \times \frac{س}{١} = ١$

∴ (ن - ٤) س = ٥

بتربيع الطرفين

∴ $(ن-٤)^{٢} س^{٢} = ٢٥$ ---- (٢)

بقسمة (١) ÷ (٢)

∴ $\frac{(ن-٢)(ن-١)}{(ن-٤)^{٢}} = ٢$

∴ $ن^{٢} - ٣ن + ٢ = ٢ن^{٢} - ١٦ن + ٣٢$

∴ $ن^{٢} - ١٣ن + ٣٠ = ٠$

∴ (ن-٣) (ن-١٠) = ٠

∴ ن = ٣ مرفوض ∴ ن = ١٠

∴ س = $\frac{٥}{٦}$

حلول تمرين (٦)

١) (٥+٢ت) + (٥-٤ت) = ١٠ - ٢ت

٢) (٢ - ٥ت) (٣+ ٦ت) = ٣٦ - ٣ت

٣) (٣ - ٢ت) (٢ - ت)^{٢}

= (٣-٢ت) (٣-٤ت) = ١ - ١٨ت

٤) مجموع متتابعة حسابية حيث أ= ت

، ء = ت ، ن = ٢١

∴ ج$_{٢١}$ = $\frac{٢١}{٢}$ [٢ت + ٢٠ت]

= ٢١ × ١١ ت = ٢٣١ ت

٥) س - ٣ص = ٩ ، ٢س+ ٣ص = ٠

∴ س = ٣ ، ص = -٢

٦) س+ ص ت = ٢ت - ٢

∴ س = -٢ ، ص =٢

٧) (١+ت)^{٢} = ١+ ٢ت + ت^{٢} = ٢ ت

∴ (١+ت)^{٤} = (٢ت)^{٢} = ٤ت^{٢} = -٤

، (١-ت)^{٢} = ١ - ٢ت + ت^{٢} = -٢ت

∴ (١-ت)^{٤} = (-٢ ت)^{٢} = ٤ت^{٢} = -٤

∴ الطرفان متساويان

٨) ٢س- ص = ٩ ــــ (١)

، س^{٢} ــ ٢س ــ ٣ = ٠ ــــ (٢)

من (٢) س = ٣ أ

، من(١) ص = -٣ أو -١١

٩) ع$_{١}^{٢}$ = (-$\frac{١}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ت)^{٢}

= $\frac{١}{٤}$ - $\frac{٣}{٤}$ - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

= -$\frac{١}{٢}$ - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت = ع$_{٢}$

ع$_{٢}^{٢}$ = (-$\frac{١}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت)^{٢}

= $\frac{١}{٤}$ - $\frac{٣}{٤}$ - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

= -$\frac{١}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت = ع$_{١}$

١٠) س^{٢} = -٥ ∴ س = ± $\sqrt{٥}$

= ± $\sqrt{٥}$ ت

حلول تمرين (٧)

(١) س+ ت ص= ١٥ - ت - ٢٨ ت^{٢} = ٤٣ - ت

∴ س = ٤٣ ، ص = -١

(٢) (٣س+ ٥ص-٤)+ ت(-٢س+٣ص+٩) =٠

∴ ٣س+ ٥ص- ٤ = ٠ ــــ (١)

-٢س + ٣ص +٩ = ٠ ــــ (٢)

بحل المعادلتين (١) ،(٢)

∴ س = ٣ ، ص = -١

(٣) ٢س- ٣ت ص = $\frac{(٢-ت)(٤-٤ت+ت^{٢})}{١+٢ت}$

٢س- ٣ت ص = $\frac{٦-١١ت+٤ت^{٢}}{١+٢ت}$

= $\frac{٢-١١ت}{١+٢ت}$ × $\frac{١-٢ت}{١-٢ت}$

= $\frac{-٢٠-١٥ت}{١-٤ت^{٢}}$ = -٤ - ٣ت

∴ ٢س= -٤ ∴ س= -٢

-٣ ص = -٣ ∴ ص = ١

(٤) $\frac{(س+ت ص)^{٢}(١-ت) + (٢س+٣ت ص)(١+ت)}{(١+٢ت)}$ = $\frac{٧}{٢}$

∴ (٣س+٢ص- ٧) + ت (س+ ٤ص) = ٠

∴ ٣س − ٢ص − ٧ = ٠ —— (١)

، س + ٤ص = ٠ —— (٢)

من (١)، (٢) ∴ س = ٢ ، ص = − ١/٢

(٥) (س² + ص²)/(س − ت ص) × (س + ت ص)/(س + ت ص)

= (−١ + ٣ت)/(٩ + ٦ت + ت²) + (−٣ + ت)/(١ + ٦ت + ٩ت²)

∴ س + ت ص = (−١ + ٣ت)/(٨ + ٦ت) × (−٣ + ت)/(−٨ + ٦ت)

∴ س + ت ص = (−١ + ٣ت)/(٨ + ٦ت) × (٨ − ٦ت)/(٨ − ٦ت)

+ (−٣ + ت)/(−٨ + ٦ت) × (−٨ − ٦ت)/(−٨ − ٦ت)

∴ س + ت ص = (١٠ + ٣٠ت)/١٠٠ + (٣٠ + ١٠ت)/١٠٠

∴ س + ت ص = (٤٠ + ٤٠ت)/١٠٠

∴ س = ٤ ر ، ص = ٤ ر

(٦) (١ + ٣ت + ٢ت² + ٤ + ٤ت + ت²)/(٢ + ٥ت + ٢ت²) = (س + ص + ت)/(س − ص + ت)

∴ (٢ + ٧ت)/(٥ت) = (س + ص + ت)/(س − ص + ت)

∴ ٢س − ٢ص + ٢ت + ٧ت س − ٧ت ص + ٧ت²

= ٥ت س + ٥ت ص + ٥ت²

∴ (٢س − ٢ص − ٢) + ت(٢س − ١٢ص + ٢) = ٠

∴ س − ص − ١ = ٠ ، س − ٦ص + ١ = ٠

∴ ص = ٢/٥ ، س = ٧/٥

(٧) (أ + ب ت)/(أ − ب ت) × (أ + ب ت)/(أ + ب ت) = س + ت ص

∴ س + ت ص = (أ² + ٢أ ب ت + ب² ت²)/(أ² − ب² ت²)

∴ س = (أ² − ب²)/(أ² + ب²) ، ص = (٢أ ب)/(أ² + ب²)

∴ س² + ص² = ((أ² − ب²)² + ٤أ² ب²)/(أ² + ب²)²

= (أ² + ب²)²/(أ² + ب²)² = ١

(٨) أ + ب ت = (٢ + ت)/(١ − ت) × (١ + ت)/(١ + ت)

= (٢ + ٣ت − ١)/(١ − ت²) = (١ + ٣ت)/٢

∴ أ = ١/٢ ، ب = ٣/٢

∴ ٢(أ³ + ب³) = ٢(١/٨ + ٢٧/٨) = ٧

(٩) (س + ت ص)² + ١٠ (١ − ٢ت)²/(١ + ٢ت) × (١ − ٢ت)/(١ − ٢ت) + ٢١ = ٠

(س² − ص² + ٢ت س ص) + ٢(١ − ٤ت + ٤ت²) + ٢١ = ٠

∴ (س² − ص²) + ٢ت س ص = ١٥ + ٨ت

∴ س² − ص² = − ١٥ —— (١) ، ٢س ص = ٨ —— (٢)

بحل (١) ، (٢)

∴ س = ± ١ ، ص = ± ٤

(١٠) ∵ ل + ن ت جذراً للمعادلة

∴ فهو يحقق معادلتها

أ(ل + ن ت)² + ب (ل + ن ت) + جـ = ٠

∴ أ(ل² + ٢ن ل ت + ن² ت²) + ب ل + ب ن ت

+ جـ = ٠

(١) ل $= \sqrt{١+١} = \sqrt{٢}$

∴ جتا هـ $= -\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، جا هـ $= \frac{١}{\sqrt{٢}}$

∴ هـ تقع في الربع الثانى

∴ هـ $= ١٨٠° - ٤٥° = ١٣٥°$

$= \frac{١٣٥}{١٨٠} \times$ ط $= \frac{٣}{٤}$ ط

∴ $-١ +$ ت $= \sqrt{٢}$ (جتا $\frac{٣}{٤}$ط + ت جا $\frac{٣}{٤}$ط)

(٢) ل $= \sqrt{٣+١} = ٢$

جتا هـ $= \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، جا هـ $= -\frac{١}{٢}$

∴ هـ $= ٣٣٠° = \frac{١١ط}{٦}$

∴ $\sqrt{٣} -$ ت $= ٢$ (جتا $\frac{١١ط}{٦}$ + ت جا $\frac{١١ط}{٦}$)

(٣) ل $\sqrt{٤+٤} = ٢\sqrt{٢}$

جتا هـ $= -\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، جا هـ $= \frac{١}{\sqrt{٢}}$

∴ هـ $= ١٣٥° = \frac{٣ط}{٤}$

∴ $-٢ + ٢$ت $= ٢\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{٣ط}{٤}$ + ت جا $\frac{٣ط}{٤}$)

(٤) ل $= \sqrt{\frac{١}{٤} + \frac{٣}{٤}} = ١$

جتا هـ $= \frac{١}{٢}$ ، جا هـ $= \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ هـ $= \frac{ط}{٣}$

∴ $\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت $= ٢$ (جتا $\frac{ط}{٣}$ + ت جا $\frac{ط}{٣}$)

(٥) ل $= \sqrt{١٨+١٨} = ٦$

جتا هـ $= \frac{٣\sqrt{٢}}{٦} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، حا هـ $= \frac{١}{\sqrt{٢}}$

∴ هـ $= \frac{ط}{٤}$

$٣\sqrt{٢} + ٣\sqrt{٢}$ ت $= ٦$ (جتا $\frac{ط}{٤}$ + ت جا $\frac{ط}{٤}$)

(٦) ل $= \sqrt{٠ + ٤} = ٢$

جتا هـ $= ٠$ ، جا هـ $= ١$

∴ هـ $= \frac{ط}{٢}$

٢ ت $= ٢$ (جتا $\frac{ط}{٢}$ + ت جا $\frac{ط}{٢}$)

(٧) جتا $١٢٠° = -$ جتا $٦٠° = -\frac{١}{٢}$

جا $١٢٠° =$ جا $٦٠° = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ الصورة الجبرية هى $٢\sqrt{٣}$ $(-\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت$)$

$= -\sqrt{٣} + ٣$ ت

(٨) $٥\frac{ط}{٤} = ٥ \times \frac{١٨٠}{٤} = ٢٢٥°$

جتا $٢٢٥° = -$ جتا $٤٥° = -\frac{١}{\sqrt{٢}}$

حا $٢٢٥° = -$ جا $٤٥° = -\frac{١}{\sqrt{٢}}$

الصورة الجبرية : $\sqrt{٢}$ $(-\frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ت$)$

$= -١ -$ ت

(٩) $\frac{١١ط}{٦} = \frac{١١}{٦} \times ١٨٠ = ٣٣٠°$

جتا $٣٣٠° =$ جتا $٣٠° = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

حا $٣٣٠° =$ جا $٣٠° = \frac{١}{٢}$

الصورة الجبرية : $\sqrt{٢}$ $(\frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢}$ ت$)$

$= \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

(١٠) $\frac{٥ط}{٦} = ٥ \times \frac{١٨٠}{٦} = ١٥٠^\circ$

جتا − ١٥٠ = جتا ١٥٠ = − جتا ٣٠ = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

جا − ١٥٠ = − جا ١٥٠ = − جا ٣٠ = $-\frac{١}{٢}$

الصورة الجبرية هى ٦ $\left(-\frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{٢} ت\right)$

$= -\frac{٣\sqrt{٢}}{٢} - \frac{\sqrt{٦}}{٢}$ ت

(١١) $\frac{٥ - \sqrt{٣} ت}{\sqrt{٣} - ٢ ت} \times \frac{\sqrt{٣} + ٢ت}{\sqrt{٣} + ٢ت} = \sqrt{٣} +$ ت

ل = $\sqrt{٣ + ١} = ٢$

جتا هـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، جا هـ = $\frac{١}{٢}$

∴ هـ = $٣٠^\circ = \frac{ط}{٦}$

∴ العدد = ٢ (جتا $\frac{ط}{٦}$ + ت جا $\frac{ط}{٦}$)

(١٢) $\frac{٦ + ٢\sqrt{٣} ت}{٣ - \sqrt{٣} ت} \times \frac{٣ + \sqrt{٣} ت}{٣ + \sqrt{٣} ت}$

$= ١ + \sqrt{٣}$ ت

∴ ل = $\sqrt{١ + ٣} = ٢$ ، جتا هـ = $\frac{١}{٢}$ ، جا هـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ هـ = ٦٠ = $\frac{ط}{٣}$.

∴ العدد = ٢ (جتا $\frac{ط}{٣}$ + ت جا $\frac{ط}{٣}$)

(١٣) $\frac{٨ (٢ + \sqrt{٣} ت)}{٥ - \sqrt{٣} ت} \times \frac{٥ + \sqrt{٣} ت}{٥ + \sqrt{٣} ت} = ٢ + ٢\sqrt{٣}$ ت

∴ ل = $\sqrt{٤ + ١٢} = ٤$

جتا هـ = $\frac{١}{٢}$ ، جا هـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ هـ = ٦٠ = $\frac{ط}{٣}$

∴ العدد = ٢ (جتا $\frac{ط}{٣}$ + ت جا $\frac{ط}{٣}$)

(١٤) $\frac{\sqrt{٣} - ت}{٠ + ٢ت} = \frac{\sqrt{٣} - ت}{٢ ت} \times \frac{ت}{ت} = \frac{١ + \sqrt{٣} ت}{-٢}$

$= -\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

ل = $\sqrt{\frac{١}{٤} + \frac{٣}{٤}} = ١$

، جتا هـ = $-\frac{١}{٢}$ ، جا هـ = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ هـ = ٢٤٠ = $\frac{٤ط}{٣}$

العدد = جتا $\frac{٤ط}{٣}$ + ت جا $\frac{٤ط}{٣}$

(١٥) ل = $\sqrt{٤ + ٤} = ٢\sqrt{٢}$

جتا هـ = $\frac{٢}{٢\sqrt{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، جا هـ = $\frac{-٢}{٢\sqrt{٢}} = -\frac{١}{\sqrt{٢}}$

∴ هـ = ٣٦٠ − ٤٥ = ٣١٥ = $\frac{٧ط}{٤}$

∴ ع = ٢ $\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{٧ط}{٤}$ + ت جا $\frac{٧ط}{٤}$)

− ع = ٢ $\sqrt{٢}$ (− جتا $\frac{٧ط}{٤}$ − ت جا $\frac{٧ط}{٤}$)

∴ − ع = ٢ $\sqrt{٢}$ [جتا (ط + $\frac{٧ط}{٤}$) + ت جا (ط + $\frac{٧ط}{٤}$)]

= ٢ $\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{١١ط}{٤}$ + ت جا $\frac{١١ط}{٤}$)

= ٢ $\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{٣}{٤}$ ط + ت جا $\frac{٣}{٤}$ ط)

، عَ = ٢ $\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{٧ط}{٤}$ ط + ت جا $\frac{٧ط}{٤}$ ط)

= ٢ $\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{ط}{٤}$ ط + ت جا $\frac{ط}{٤}$ ط)

، $\frac{١}{ع} = \frac{١}{٢\sqrt{٢} (\text{جتا } \frac{٧ط}{٤} + \text{ت جا } \frac{٧ط}{٤})}$

$\times \frac{(\text{جتا } \frac{٧ط}{٤} - \text{ت جا } \frac{٧ط}{٤})}{(\text{جتا } \frac{٧ط}{٤} - \text{ت جا } \frac{٧ط}{٤})}$

= $\frac{١}{٢\sqrt{٢}}$ (جتا $\frac{٧ط}{٤}$ = ت جا $\frac{٧ط}{٤}$)

= $\frac{١}{٢\sqrt{٢}}$ (جتا $\frac{٧ط}{٤}$ + ت جا $\frac{٧ط}{٤}$)

(١٦) $ع_٢$ = −٣ + ٤ت + ٢−٣ ت = −١ + ت

ل = $\sqrt{١ + ١} = \sqrt{٢}$ جتاهـ$_٢$ = $-\frac{١}{\sqrt{٢}}$

جا هـ$_٢$ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ∴ هـ$_٢$ = $\frac{٣ط}{٤}$

(١٧) العدد = ٣(- جتا٦٠ - ت جا٦٠)

= ٣ (جتا ٢٤٠ + ت جا ٢٤٠)

المقياس = ٣٠ ، والسعة = ٢٤٠

(١٨) العدد = ٤[جتا (٣٦٠ - ١٥٠)

+ ت جا(٣٦٠+ ١٥٠)]

= ٤ (جتا ٢١٠ + ت جا ٢١٠)

∴ المقياس = ٤ ، والسعة = ٢١٠

(١٩) العدد = ٢(- جا ٢١٠ + ت جا٢١٠)

= ٢(جا ٣٠ - ت جتا٣٠)

= ٢ (جتا٦٠ - ت جا ٦٠)

= ٢(جتا٣٠٠ + ت جا٣٠٠)

∴ المقياس = ٢ ، السعة = ٣٠٠

(٢٠) العدد = ل [جتا(٩٠ +هـ) + ت جا(٩٠ +هـ)]

∴ المقياس = ل ، السعة = $\frac{ط}{٢}$ + هـ

حلول تمرين (٩)

(١) ع١ ع٢ = ١٢[(جتا($\frac{ط}{٣}$ + $\frac{ط}{٦}$) + ت جا($\frac{ط}{٣}$ + $\frac{ط}{٦}$)]

= ١٢ (جتا $\frac{ط}{٢}$ + ت جا $\frac{ط}{٢}$)

ع١ ÷ ع٢ = ٣ [(جتا($\frac{ط}{٣}$ - $\frac{ط}{٦}$) + ت جا($\frac{ط}{٣}$ - $\frac{ط}{٦}$)]

= ٣ (جتا $\frac{ط}{٦}$ + ت جا $\frac{ط}{٦}$)

(٢) ع٢ = ٤[جتا (- $\frac{ط}{٢}$) + ت جا (- $\frac{ط}{٢}$)]

ع١ ع٢ = ٣٢[جتا($\frac{ط}{٤}$ - $\frac{ط}{٢}$) + ت جا($\frac{ط}{٤}$ - $\frac{ط}{٢}$)]

= ٣٢ (جتا- $\frac{ط}{٤}$ - ت جا $\frac{ط}{٤}$)

= ٣٢ (جتا $\frac{ط}{٤}$ - ت جا $\frac{ط}{٤}$)

ع١ ع٢ = ٢ [جتا($\frac{ط}{٤}$ + $\frac{ط}{٢}$) + ت جا ($\frac{ط}{٤}$ + $\frac{ط}{٢}$)]

= ٢ (جتا $\frac{٣ط}{٤}$ + ت جا $\frac{٣ط}{٤}$)

(٣) ع١ = ١٠(جتا٦٠ + ت جا٦٠)

، ع٢ = ٥ (- جا ٦٠ - ت جتا ٦٠)

= ٥ [جتا(٢٧٠ - ٦٠)+ ت جا(٢٧٠ - ٦٠)]

= ٥ (جتا٢١٠ + ت جا٢١٠)

ع١ ع٢ = ٥٠(جتا٢٧٠ + ت جا ٢٧٠)

ع١ ÷ ع٢ = ٢ [جتا(٦٠ - ٢١٠)+ ت جا(٦٠ - ٢١٠)]

= ٢ [جتا- ١٥٠ + ت جا- ١٥٠]

= ٢ (جتا٢١٠ + ت جا ٢١٠)

(٤) ع٢ = ل٢ [جتا(- هـ) + ت جا(- هـ)]

ع١ ع٢ = ل١ ل٢ (جتا ٠° + ت جا ٠°)

$\frac{ع١}{ع٢}$ = $\frac{ل١}{ل٢}$ [جتا(هـ +هـ) + ت جا (هـ +هـ)]

= $\frac{ل١}{ل٢}$ (جتا٢ هـ + ت جا ٢هـ)

(٥) ع' = $\frac{١}{٢}$ [جتا(أ- $\frac{ط}{٢}$) + ت جا (أ- $\frac{ط}{٢}$)]

= $\frac{١}{٢}$ (جتا ٣ ط + ت جا ٣ ط)

$\frac{١}{ع}$ = $\sqrt{٢}$ [جتا(- $\frac{٣ط}{٤}$) + ت جا ($\frac{-٣ط}{٤}$)]

(٦) ع = $\frac{١}{٤}$ [جتا(أ- $\frac{ط}{٢}$) + ت جا (أ - $\frac{ط}{٢}$)]

ع' = $\frac{١}{٤}$[جتا (٢أ- ط) + ت جا (٢أ- ط)

$\frac{١}{ع}$ = ٢ [جتا($\frac{ط}{٢}$ - أ) + ت جا ($\frac{ط}{٢}$ - أ)

(٧) |ع١| = √(١/٤ + ٣/٤) = ١

، جتا هـ = - ١/٢ ، جا هـ = √٣/٢ ∴ هـ = ٢ط/٣

∴ ع١ = جتا ٢ط/٣ + ت جا ٢ط/٣

بالمثل ع٢ = جتا ٤ط/٣ + ت جا ٤ط/٣

∴ ع١^٢ = جتا (٢ × ٢ط/٣) + ت جا (٢ × ٢ط/٣) = ع٢

، ع٢^٢ = جتا (٢ × ٤ط/٣) + ت جا (٢ × ٤ط/٣)

= جتا ٨ط/٣ + ت جا ٨ط/٣

= جتا ٢/٣ ط + ت جا ٢/٣ ط = ع١

، ع١^٣ = جتا (٣ × ٢ط/٣) + ت جا (٣ × ٢ط/٣)

= جتا٢ط + ت جا ٢ط = جتا٠ + ت جا٠ = ١.

، ع٢^٣ = جتا(٣ × ٤ط/٣) + ت جا (٣ × ٤ط/٣)

= جتا ٤ ط + ت جا ٤ ط

= جتا ٠ + ت جا ٠ = ١

∴ ع١^٣ = ع٢^٣ = ١

(٨) جا هـ = - ١/√٥ ، جتا هـ = -٢/√٥

ع١ = ٤ [جتا(-٣هـ) + ت جا (-٣هـ)]

، ع٢ = ٢(- جتاهـ + ت جاهـ)

= ٢ [جتا(ط - هـ) + ت جا (ط - هـ)

∴ ع١^٢ = ١٦ [جتا(-٦هـ) + ت جا(-٦هـ)]

، ع٢^٤ = ١٦ [جتا(٤ط - ٤هـ) + ت جا (٤ط - ٤هـ)]

∴ ع١^٢ ÷ ع٢^٤ = جتا - (٤ط + ٢هـ) + ت جا - (٤ط + ٢هـ)] = جتا-٢هـ + ت جا- ٢هـ (الصورة المثلثية)

جتا٢هـ = ٢جتا^٢ هـ - ١ = ٢ × ٤/٥ - ١ = ٣/٥

،جا٢هـ = ٢جاهـ جتاهـ = ٢ × - ١/√٥ × -٢/√٥ = ٤/٥

∴ ع١^٢ ÷ ع٢^٤ = ٣/٥ - ٤/٥ ت

(٩) |س| = √(٣ + ١) = ٢ ، جتاهـ = √٣/٢ ، جا هـ = ١/٢

∴ هـ = ٣٠° ∴ س = ٢ (جتا٣٠ + ت جا٣٠)

|ص| = √(١ + ١) = √٢ ، جتا هـ = ١/√٢ ، جاهـ = - ١/√٢

∴ هـ = ٣٦٠ ـ ٤٥ = ٣١٥

∴ ص = √٢ [جتا (٣١٥ + ت جا ٣١٥)

∴ ص/س = √٢/٢ [جتا (٣١٥ - ٣٠) + ت جا(٣١٥ ـ ٣٠)]

= √٢/٢ (جتا ٢٨٥ + ت جا ٢٨٥)

∴ ص^٢/س^٢ = (ص/س)^٢ = ١/٢ (جتا٥٧٠ + ت جا٥٧٠)

= ١/٢ (جتا٢١٠ + ت جا ٢١٠)

(١٠) المقدار = (جتا ٦ط/٤ + ت جا ٦ط/٤)(جتا ٥ط/٣ + ت جا ٥ط/٣) / (جتا ٤ط/٦ + ت جا ٤ط/٦)

= جتا(٦ط/٤ + ٥ط/٣ - ٤ط/٦) + ت جا(٦ط/٤ + ٥ط/٣ - ٤ط/٦)

= جتا (٥ط/٢) + ت جا (٥ط/٢)

= جتا ط/٢ + ت جا ط/٢

(١١) راجع للتمثيل البيانى لمقياس وسعة .

(١٢) حاصل ضرب عددين مركبين وخارج .

(١٣) قسمة عددين مركبين .

(١) س = ٠ ، ص = -٢ $\therefore$ |ع| = ٢

جتاهـ = ٠ ، جا هـ = ١ $\therefore$ هـ = $\frac{ط}{٢}$

$\therefore$ ٢ت = ٢ (جتا $\frac{ط}{٢}$ + ت جا $\frac{ط}{٢}$)

$\therefore$ الجذور التربيعية للعدد ٢ ت

= $\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{ط}{٢}$ + ت جا $\frac{ط}{٢}$)

= $\sqrt{٢}$ [جتا ($\frac{\frac{ط}{٢}+٢رط}{٢}$) + ت جا ($\frac{\frac{ط}{٢}+٢رط}{٢}$)]

حيث ر = ٠ ، ١

$\therefore$ الجذرين التربيعين هما

$\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{ط}{٤}$ + ت جا $\frac{ط}{٤}$)

= $\sqrt{٢}$ ($\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ت × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$) = ١ + ت

، $\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{٥ط}{٤}$ + ت جا $\frac{٥ط}{٤}$)

= $\sqrt{٢}$ (- $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ - $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ت) -١-ت

(٢) نفرض أن ع = ١- ٣ ت

$\therefore$ |ع| = ٢ ، جتاهـ = $\frac{١}{٢}$ ، جاهـ = - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\therefore$ هـ = $\frac{٥ط}{٣}$

$\therefore$ ١ - $\sqrt{٣}$ت = ٢جتا ($\frac{٥ط}{٣}$) + ت جا ($\frac{٥ط}{٣}$)

$\therefore$ الجذران التربيعيان للعدد هما

$\sqrt{٢}$ [جتا ($\frac{٥ط}{٦}$ + رط) + ت جا ($\frac{٥ط}{٦}$ + رط)

حيث ر = ٠ ، ١

= $\sqrt{٢}$ (- $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ ت) ، $\sqrt{٢}$ ($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ - $\frac{١}{٢}$ت)

(٣) نفرض أن ع = -٢ + ٢ $\sqrt{٣}$ ت

|ع| = $\sqrt{٤ + ١٢}$ = ٤

جتا هـ = $\frac{١}{٢}$ ، جا هـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ $\therefore$ جاهـ = ١٢٠°

(-٢ + ٢ $\sqrt{٣}$ ت)$^{\frac{١}{٢}}$ = ٢ [جتا ٦٠ + رط) + ت جا (٦٠ + رط)

حيث ر = ٠ ، ١

= ٢ (جتا ٦٠ + ت جا ٦٠)

، ٢ (جتا ٢٤٠ + ت جا ٢٤٠)

= ± ٢ ($\frac{١}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت)

= ± (١ + $\sqrt{٣}$ ت)

(٤) ٤(جتا $\frac{ط}{٣}$ - ت جا $\frac{ط}{٣}$) = ٤ [جتا(- $\frac{ط}{٣}$) + ت جا (- $\frac{ط}{٣}$)]

$\therefore$ الجذرين التربيعين هما

٢ [جتا(- $\frac{ط}{٦}$ + رط) + ت جا(- $\frac{ط}{٦}$ + رط)

حيث ر = ٠ ، ١ $\therefore$ الجذران هما

٢ [جتا (- $\frac{ط}{٦}$) + ت جا (- $\frac{ط}{٦}$)] = $\sqrt{٣}$ - ت

، ٢ [جتا $\frac{٥ط}{٦}$ + ت جا $\frac{٥ط}{٦}$] = - $\sqrt{٣}$ + ت

(٥) الجذران التربيعيان هما

٣ [جتا (١٥٠ + ١٨٠ر) + ت جا(١٥٠ + ١٨٠ر)

حيث ر = ٠ ، ١

$\therefore$ الجذران هما ± ($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ - $\frac{١}{٢}$ ت)

(٦) $\frac{-٨}{١+\sqrt{٣}ت}$ = $\frac{-٨}{١+\sqrt{٣}ت}$ × $\frac{١-\sqrt{٣}ت}{١-\sqrt{٣}ت}$

= -٢ + ٢ $\sqrt{٣}$ ت

مقياس العدد = ٤ ، جتاهـ = - $\frac{١}{٢}$ ، جا هـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\therefore$ هـ = ١٢٠°

∴ العدد = ٤ [جتا ١٢٠ + ت جا ١٢٠]

∴ الجذرين هما ٢ [جتا (٦٠ + ١٨٠ر)

\+ ت جا (١٦٠ + ١٨٠ر)]

حيث ر = ٠ ، ١

أي هما ± (١ + $\sqrt{٣}$ ت)

(٧) س + ت ص = $\sqrt{-٨ - ٦\,ت}$

∴ $س^2 - ص^2$ + ٢ت س ص = -٨ - ٦ ت

∴ $س^2 - ص^2$ = -٨ — (١) ، ٢س ص = -٦ — (٢)

بتربيع (١) ، (٢) والجمع

$س^2 + ص^2$ = ١٠٠ ∴ $س^2 + ص^2$ = ١٠ — (٣)

بجمع (١) ، (٣) ∴ $٢س^2$ = $٢س^2$ = ١

∴ س = ± ١

بطرح (١) من (٢) ∴ $٢ص^2$ = ١٨

∴ $ص^2$ = ٩ ∴ ص = ± ٣

من (٢) س، ص مختلفتان في الإشارة

∴ $\sqrt{-٨ - ٦\,ت}$ = ± (١ - ٣ ت)

(٨) مثل مسألة (٧) والجواب ± (٣ - ٢ ت)

(٩) $\frac{-٧ + ت}{١ + ت} = \frac{-٧ + ت}{١ + ت} \times \frac{١ - ت}{١ - ت}$

$= \frac{-٧ + ٨\,ت - ت^2}{١ + ت^2} = \frac{-٦ + ٨\,ت}{٢}$

= ٣ + ٤ ت وتكمل مثل مسألة (٧)

والجواب [± (١ + ٢ ت)]

(١٠) $\frac{٣١ + ١٧ت}{١ - ت} = \frac{٣١ + ١٧\,ت}{١ - ت} \times \frac{١ + ت}{١ + ت}$

$= \frac{٣١ + ٤٨ت + ١٧ت^2}{٢} = \frac{١٤ + ٤٨\,ت}{٢}$

= ٧ + ٢٤ ت

وتكمل كمسألة (٧) والجواب [± (٤ + ٣ ت)]

(١١) ع = $\sqrt{٣ + ٤ت}$ = ± (٢ + ت)

كما في مسألة (٧)

∴ $ع^{-١} = \frac{١}{ع} = \pm \left(\frac{١}{٢ + ت} \times \frac{٢ - ت}{٢ - ت}\right)$

$= \pm \frac{٢ - ت}{٥}$

∴ $ع + ٥\,ع^{-١} = \pm \left[(٢ + ت) + \frac{٥(٢ - ت)}{٥} \right]$

= ± ٤

(١٢) $(س + ت\,ص)^2 = -٨ \frac{(١ - ت)^2}{٢} - ١٥$

$(س + ت\,ص)^2$ = -٤ × -٢ ت - ١٥

$(س + ت\,ص)^2$ = -١٥ + ٨ ت

بإكمال الحل ∴ س = ± ١ ، ص = ± ٤

(١٣) س + ت ص = $\frac{٧ - ٤ت}{٢ + ت} \times \frac{٢ - ت}{٢ - ت}$

$= \frac{١٤ - ١٥ت + ٤ت^2}{٥}$ = ٢ - ٣ ت

∴ س = ٢ ، ص = -٣

∴ $\sqrt{٢س - ت\,ص} = \sqrt{٤ + ٣\,ت}$

وتكمل كما سبق والجواب

$\pm \frac{\sqrt{٢}}{٢}$ (٣ + ت)

(١٤) س = $\frac{١ + ٢\,ت}{١ - ت} = \frac{١ + ت}{١ + ت} \times \frac{١ + ٣ت + ٢ت^2}{٢}$

$= \frac{-١ + ٣\text{ت}}{٢}$

$\text{ص} = \frac{١ - ٢\text{ت}}{١ + \text{ت}} \times \frac{١ - \text{ت}}{١ - \text{ت}}$

$= \frac{١ + ٣\text{ت} + ٢\text{ت}^{٢}}{٢} = \frac{-١ - ٣\text{ت}}{٢}$

$\sqrt{٥\text{س} + ٣\text{ص}} = \sqrt{\frac{-٥ + ١٥\text{ت} - ٣ - ٩\text{ت}}{٢}}$

$= \sqrt{-٤ + ٣\text{ت}}$ وتكمل كما سبق

والجواب $\pm \frac{\sqrt{٢}}{٢} (١ + ٣\text{ت})$

(١٥) بقسمة طرفي المعادلة على ٢+ت

∴ $\text{س}^{٢} - \frac{٣(١+٣\text{ت})}{(٢+\text{ت})}\text{س} - \frac{٤(١-٣\text{ت})}{٢+\text{ت}} = $ صفر

∴ $\text{س}^{٢} - \frac{٣(١+٣\text{ت})}{(٢+\text{ت})} \times \frac{(٢-\text{ت})}{(٢-\text{ت})}\text{س} - ٤$

$\times \frac{٤(١-٣\text{ت})}{٢+\text{ت}} \times \frac{(٢-\text{ت})}{(٢-\text{ت})} = $ صفر

∴ $\text{س}^{٢} - \frac{٣(٥+٥\text{ت})}{٥}\text{س} - \frac{٤(-٥\text{ت})}{٥} = ٠$

∴ $\text{س}^{٢} - ٣(١+\text{ت})\text{س} + ٤\text{ت} = ٠$

∴ $\text{س} = \frac{٣(١+\text{ت}) \pm \sqrt{٩(١+\text{ت})^{٢} - ٤ \times ٤\text{ت}}}{٢}$

$= \frac{٣ + ٣\text{ت} \pm \sqrt{٢\text{ت}}}{٢}$

مما سبق $\sqrt{٢\text{ت}} = \pm (١ + \text{ت})$

∴ $\text{س} = \frac{٣ + ٣\text{ت} - ١ - \text{ت}}{٢} = ١ + \text{ت}$

∴ مجموعة الحل = {٢ + ٢ ت ، ١ + ت}

(١٦) المقياس = ٢ جتاهـ = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، جا هـ = $\frac{١}{٢}$

∴ هـ = ١٥٠°

∴ $(-\sqrt{٣} + \text{ت})^{٣} = ٨$ (جتا٤٥٠ + ت جا ٤٥٠)

= ٨ (جتا٩٠ + ت جا ٩٠)

∴ $(-\sqrt{٣} + \text{ت})^{\frac{٣}{٥}} = \sqrt[٥]{٨}$ (جتا٩٠ + ت جا٩٠)$^{\frac{١}{٥}}$

$= \sqrt[٥]{٨}$ [جتا (١٨ + ٧٢ر) + ت جا (١٨ + ٧٢ر)]

حيث ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤

∴ قيم المقدار = $\sqrt[٥]{٨}$ (جتا ١٨ + ت جا ١٨)

$\sqrt[٥]{٨}$ (جتا ٩٠° + ت جا ٩٠°) ، $\sqrt[٥]{٨}$

(جتا ١٦٢° + ت جا ١٦٢°) ، $\sqrt[٥]{٨}$

(جتا ٢٣٤° + ت جا ٢٣٤°) ، $\sqrt[٥]{٨}$

(جتا ٣٠٦° + ت جا ٣٠٦°)

(١٧) - ٦٤ ت = ٦٤ × -ت = ٦٤ (جتا ٢٧٠ + ت جا ٢٧٠)

∴ $(-٦٤\text{ت})^{\frac{١}{٦}} = ٢$ [جتا (٤٥ + ٦٠ر)

+ ت جا (٤٥ + ٦٠ر)]

حيث ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ وتكمل كالسابق

(١٨) مقياس ١+ت = $\sqrt{٢}$ ، جتا هـ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

جا هـ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ∴ هـ = ٤٥°

∴ ١+ت = $\sqrt{٢}$ (جتا٤٥ + ت جا ٤٥)

$(١+\text{ت})^{٢} = ٢$ (جتا ٩٠ + ت جا ٩٠)

$(١+\text{ت})^{\frac{٢}{٣}} = \sqrt[٣]{٢}$ [جتا (٣٠ + ١٢٠ر) +

ت جا (٣٠ + ١٢٠ر)] حيث ر = ٠ ، ١ ، ٢

(١٩) ٣٢ = ٣٢ × ١ = ٣٢ (جتا٠ + ت جا ٠)

$(٣٢)^{\frac{١}{٥}} = ٢$ [جتا ٧٢ر + ت جا ٧٢ر]

حيث ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ وتكمل

(٢٠) س° = -١ = جتا ط + ت جا ط

س = (جتا ١٨٠ + ت جا ١٨٠)

= [جتا(٣٦ + ر × ٧٢) + ت جا (٣٦ + ر × ٧٢)]

حيث ر = ٠، ١، ٢، ٣، ٤ وتكمل

(٢١) ع° = ١ - $\sqrt{3}$ ت = ٢ (جتا $\frac{5ط}{3}$ + ت جا $\frac{5ط}{3}$)

∴ ع = $\sqrt[5]{2}$ (جتا $\frac{5ط}{3}$ + ت جا $\frac{5ط}{3}$)

= $\sqrt[5]{2}$ [جتا ($\frac{ط}{3} + \frac{2رط}{5}$) + ت جا ($\frac{ط}{3} + \frac{2رط}{5}$)]

حيث ر = ٠، ١، ٢، ٣، ٤

حلول تمرين (١١)

١) الأيمن = $[11\omega + 2(1+\omega^2)]\,[11\omega^2 + 2(1+\omega)]$

$= (11\omega - 2\omega)(11\omega^2 - 2\omega^2)$

$= 9\omega \times 9\omega^2 = 81\omega^3 = 81$ = الأيسر

٢) الأيمن = $\left(\frac{1}{1+\omega^2} - \frac{1}{1+\omega}\right)^2$

$= \left(-\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2}\right)^2$

$= (-\omega^2 + \omega)^2 = (\pm\sqrt{3}\,\text{ت})^2 = -3$ = الأيسر

٣) الأيمن = $\left(2+\frac{1}{\omega}\right)^2 - \left(1-\frac{2}{\omega^2}\right)^2$

$= (2+\omega^2)^2 - (1-\omega)^2$

$= 4 + 4\omega^2 + \omega - (1 - 2\omega + \omega^2)$

$= 3 + 3\omega + 3\omega^2 =$ صفر = الأيسر

٤) الأيمن = $\frac{[11\omega + 2(1+\omega^2)][11\omega^2 + 2(1+\omega)]}{[(1+\omega^2) - 2\omega][(1+\omega) - 5\omega^2]}$

$= \frac{(11\omega - 2\omega)(11\omega^2 - 2\omega^2)}{(-\omega - 2\omega)(-\omega^2 - 5\omega^2)}$

$= \frac{9\omega \times 9\omega^2}{-3\omega \times -6\omega^2} = \frac{9}{2}$ = الأيسر

٥) الأيمن =

$\pm\sqrt{3}\,\text{ت}\left[\frac{(\omega-3)(4+2\omega^2) - (\omega^2-3)(4+2\omega)}{(4+2\omega)(4+2\omega^2)}\right]$

$= \pm\sqrt{3}\,\text{ت}$

$\frac{4\omega + 2\omega^3 - 12 - 6\omega^2 - 4\omega^2 - 2\omega^3 + 12 + 6\omega}{16 + 8\omega + 8\omega^2 + 4\omega^3}$

$= \pm\sqrt{3\,\text{ت}} \times \frac{10\omega - 10\omega^2}{20 + 8(\omega + \omega^2)}$

$= \pm\frac{\sqrt{3}\,\text{ت} \times 10(\omega - \omega^2)}{20 + 8(\omega + \omega^2)}$

$= \pm\frac{\sqrt{3}\,\text{ت} \times 10 \times \pm\sqrt{3}\,\text{ت}}{12}$

$= \frac{5}{2}\,\text{ت}^2 = -\frac{5}{2}$ = الأيسر

٦) الأيمن = $(5+\omega)$

$\left[\frac{1}{5+4\omega+(-1-\omega)^3} - \frac{1}{3\omega + 2(-1-\omega)}\right]$

$= (5+\omega)\left(\frac{1}{2+\omega} - \frac{1}{-2+\omega}\right)$

$= (5+\omega)\left(\quad - \quad \right)$

$= (5+\omega)\left[\frac{2-\omega+2+\omega}{(2+\omega)(2-\omega)}\right]$

$= (5+\omega)\left(\frac{4}{4-\omega^2}\right)$

$= (5+\omega)\left(\frac{4}{4-(-1-\omega)}\right)$

$= (5+\omega)\times\frac{4}{5+\omega} = 4 =$ الأيسر

٧) الأيمن $= \left[\frac{1}{1+2(\omega-\omega^2)} - \frac{1}{1-2(\omega-\omega^2)}\right]$

$= \left[\frac{1}{1+2\sqrt{3}\,ت} - \frac{1}{1-2\sqrt{3}\,ت}\right]^2$

$= \left(\frac{1-2\sqrt{3}\,ت - 1 - 2\sqrt{3}\,ت}{(1+2\sqrt{3}\,ت)(1-2\sqrt{3}\,ت)}\right)^2$

$= \left(\frac{-4\sqrt{3}\,ت}{1-12\,ت^2}\right)^2 = \frac{48\,ت^2}{169}$

$= \frac{-48}{169} =$ الأيسر .

٨) الأيمن $= (أ+ب\,\omega^2)(أ+ب\,\omega)$

$= أ^2 + أب\,\omega + أب\,\omega^2 + ب^2\omega^3$

$= أ^2 + أب(\omega+\omega^2) + ب^2$

$= (أ^2+ب^2) - أب$

$= (أ-ب)^2 + 2أب - أب$

$= (أ-ب)^2 + أب =$ الأيسر

٩) المقدار $= (1+3\omega^2-4\omega)(1+3\omega-4\omega^2)$

$= [1+3(-1-\omega)-4\omega]\,[1+3\omega-4(-1-\omega)]$

$= (-5-7\omega)(5+7\omega)$

$= -10 - 49\omega - 49\omega^2 = -10 - 49(\omega+\omega^2)$

$= 39 =$ عدد حقيقي

١٠) المقدار $= \left(\frac{أ+1}{1+أ\,\omega^{12}+\omega+أ(-\omega-1)}\right)^6$

$= \left(\frac{أ+1}{أ+\omega+أ\,\omega-أ}\right)^6$

$= \left[\frac{أ+1}{\omega(أ+1)}\right]^6 = (\omega^2)^6 = \omega^{12} = 1$

وهذا لا يتوقف على قيمة أ

١١) الأيمن $= \left[\frac{5\omega^3-3\omega^2}{5\omega-3} - \frac{2\omega^3-7\omega}{2\omega^2-7}\right]^4$

$= \left[\frac{\omega^2(5\omega-3)}{5\omega-3} - \frac{\omega(2\omega^2-7)}{2\omega^2-7}\right]^4$

$= (\omega^2-\omega)^4 = (\pm\sqrt{3}\,ت)^4 = 9 =$ الأيسر

١٢) المتتابعة هندسية

$ج_ن = \frac{1[1-\omega^{ن}]}{1-\omega}$

عندما ن = ٣ م $\therefore ج_{3م} = \frac{1-\omega^{3م}}{1-\omega} = \frac{1-1}{1-\omega} = 0$

عندما ن = ٣م + ١

$ج_{3م+1} = \frac{1-\omega^{3م+1}}{1-\omega} = \frac{1-1}{1-\omega} = 1$

عندما ن = ٣م + ٢

$ج_{3م+2} = \frac{1-\omega^{3م+2}}{1-\omega} = \frac{1-\omega^2}{1-\omega}$

$= \frac{(1-\omega)(1+\omega)}{1-\omega} = 1+\omega = -\omega^2$

13) س = ω

الأيمن = $\omega^{23}+\omega^{16}+\omega = \omega^2+\omega+1=0$

= الأيسر

14) س^2 + $[2\omega + (1+\omega^2)][(1+\omega)+2\omega^2] = 0$

س^2 + $(2\omega-\omega)(-\omega^2+2\omega^2)=0$

س^2 + $\omega\times\omega^2$ = صفر ، س^2 + 1 = 0

س^2 = −1 ∴ س^2 = ت^2 ∴ س = ± ت

15) المقدار = (ت + ت^3 + ت^5 .... إلى 8 حدود)

+ ($\omega^2+\omega^4+\omega^6+$ .... إلى 7 حدود)

= $\frac{ت(1-ت^{16})}{1-ت^2} + \frac{\omega^2(1-\omega^2)}{1-\omega^2}$

= $\frac{ت(1-1)}{2} + \frac{\omega^2(1-\omega^2)}{1-\omega^2} = \omega^2$

16) المقدار = ($\omega+\omega^2+\omega^3+$ ...... إلى 12 حدا)

+ (ت^2 + ت^4 + ت^6 .... إلى 11 حدا)

= $\frac{\omega(1-\omega^{24})}{1-\omega^2} + \frac{ت^2(1-ت^{22})}{1-ت^2}$

= $\frac{\omega(0-0)}{1-\omega^2} + \frac{-1(1-ت^2)}{1-ت^2} = -1$

17) المقدار = $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega)(1-\omega^2)$

= $(1-\omega)^2(1-\omega^2)^2$

= $[(1-\omega)(1-\omega^2)]^2 = (1-\omega-\omega^2+\omega^3)^2$

= $[1-(\omega+\omega^2)+1]^2 = 9$

18) الجذران هما $[(1+\omega)-\omega^2]^3$ ، $[(1+\omega^2)-\omega]^3$

أي هما $(-2\omega^2)^3$ ، $(-2\omega)^3$

أي $-8\omega^6$ ، $-8\omega^3$

أي −8 ، −8

مجموع الجذرين = −8 −8 = −16

حاصل ضرب الجذرين = −8 × −8 = 64

∴ المعادلة هي : س^2 + 16س + 64 = 0

19) س + ت ص = [ت^2 − $(\omega+\omega^2)$]^6

= [−ت + 1]^6 = [(1 − ت)^2]^3

= (−2 ت)^3 = −8 ت^3 = 8 ت

∴ س = 0 ، ص = 8

20) (1 − ت) (س + ت ص)

= 19 [$\frac{5+3\omega^2+2-3\omega^2}{(2-3\omega^2)(5+3\omega^2)}$]

(1 − ت) (س + ت ص) = 19 × $\frac{7}{10-9\omega^2-9\omega^4}$

(1 − ت) (س + ت ص) = 19 × $\frac{7}{10-9(\omega^2+\omega)}$

∴ س + ت ص = $\frac{7}{1-ت} \times \frac{1+ت}{1+ت}$

س + ت ص = $\frac{7+7ت}{2}$

∴ س = $\frac{7}{2}$ ، ص = $\frac{7}{2}$

21) س^2 = $-\omega$ ∴ س^2 = ت^2 ω^4

∴ س = ± ت ω^2

(١) (أ) ٢س = -٢

س + ٣ = ٢ ⟸ س = -١

∴ المحدد هو $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$

(ب) ٢س - ص = ١ ، س + ٣ص = ٤ ، ٥ س - ٢ص = ٣

∴ المحدد هو $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

(جـ) ٣ - ص = ٣ ، ٣س + ٢ص = ٤ ، - س + ٣ص = -٥

∴ المحدد هو $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -5 \end{vmatrix}$

(٢) (أ) $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ = (١ × -١) - (٢ × ٥) = -١١

(ب) $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$ = (٢ × ٥) - (٠ × ٠) = ١٠

(جـ) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$ = (١ × ٤) - (-٢ × -٢) = ٠

(د) $\begin{vmatrix} 0 & س \\ -س & 0 \end{vmatrix}$ = (٠ × ٠) - (س × -س) = $س^2$

(و) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$ = (٠ × -٢) - (٠ × ٠) = صفر

(هـ) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$ = (١ × ٠) - (٤ × ٢) = -٨

(٣) (أ)

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 5 & -1 & -3 \end{vmatrix}$ بفك المحدد عن طريق عناصر الصف الأول

= $1 \times \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$

= ١ - ١٢ - ٠ + ٠ = -١٢

(ب) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ باستخدام عناصر ص١

= $1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

= ١ × (١ - ٦) - ٢ × (٣ - ٤) + ٣ × (٩ - ٢)

= -٥ + ٢ + ٢١ = ١٨

(جـ) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ باستخدام عناصر ص١

= $1 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

= ١ × -١ - صفر + صفر = -١

(د) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ باستخدام عناصر ص١

= $1 \times \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$

= ١ × -٣ - ٢ × -٦ + ٣ × -٣ = صفر

(هـ) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ باستخدام عناصر ص١

$= 0 \times \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

= صفر - ١ × ٦ - ٢ × -٣ = صفر

(و) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ باستخدام عناصر ص١

$= 2 \times \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$

= ٢ × -٤ - صفر + صفر = -٨

(٤) (أ) $\begin{vmatrix} س^2 & -2س \\ س & س^2 \end{vmatrix} = -1$

∴ $س^4 + 2س^2 = -1$

∴ $س^4 + 2س^2 + 1 =$ صفر

∴ $(س^2 + 1)^2 =$ صفر

∴ $(س^2 + 1) =$ صفر

∴ $س^2 = -1$ ∴ $س = \pm \sqrt{-1}$

∴ س ليس لها حل في ح

(ب) $\begin{vmatrix} س & 1 \\ 3 & س \end{vmatrix} = -1$

∴ $س^2 - 3 = 1$

∴ $س^2 = 4$ ∴ $س = \pm 2$

(ج) $\begin{vmatrix} س & 0 & 0 \\ 1 & س & س \\ 5 & 2 & س \end{vmatrix} = 3$ س

بفك المحدد عن طريق عناصر الصف الأول

∴ $س \times \begin{vmatrix} س & س \\ 2 & س \end{vmatrix} = 3$ س

∴ $س(س^2 - 2س) = 3س$

∴ $س(س^2 - 2س - 3) =$ صفر

∴ س (س - ٣) (س + ١) = صفر

∴ س = صفر أ، ٣ أ، -١

حلول تمارين (٢ - ٣)

(١) (أ) $\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$ باستخدام خاصية مرور المحدد

$= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 5 \end{vmatrix}$ = المحدد المطلوب

(ب) $\begin{vmatrix} 6 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ بتبديل عناصر ص١ ، ص٢

$= -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -5 \end{vmatrix}$ بضرب إشارة المحدد × ص٢

$= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 5 \end{vmatrix}$ = المحدد المطلوب

(ج) $\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ -6 & 5 \end{vmatrix}$ ص١ - ص٢

$= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 5 \end{vmatrix}$ = المحدد المطلوب

(د) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -4 & -6 & 5 \end{vmatrix}$ بالفك عن طريق عناصر ص١

$= ١ \times \begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ -٦ & ٥ \end{vmatrix}$ - صفر + صفر

$= \begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ -٦ & ٥ \end{vmatrix}$ = المحدد المطلوب

(هـ) $\begin{vmatrix} ١ & -١ & -٣ \\ ٠ & ٢ & -١ \\ ٠ & -٦ & ٥ \end{vmatrix}$ بالفك عن طريق عناصر العمود الأول ع١

$= ١ \times \begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ -٦ & ٥ \end{vmatrix}$ - صفر + صفر

$= \begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ -٦ & ٥ \end{vmatrix}$ = المحدد المطلوب

(و) $\begin{vmatrix} ١ & -١ & ٠ \\ -١ & ٢ & -١ \\ ٥ & -٦ & ٥ \end{vmatrix}$ بالفك عن طريق عناصر ص١

$= ١ \times \begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ -٦ & ٥ \end{vmatrix} - (-١) \times \begin{vmatrix} -١ & -١ \\ ٥ & ٥ \end{vmatrix}$ + صفر

(لاحظ أن المحدد الثاني ينعدم لأن ص١ ≡ ص٢)

$= \begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ -٦ & ٥ \end{vmatrix}$ = المحدد المطلوب

(٢) (أ) $\begin{vmatrix} ١ & -٢ \\ ١ & -٢ \end{vmatrix}$ = صفر (لأن ص١ ≡ ص٢)

(ب) $\begin{vmatrix} ١ & ٥ \\ ٠ & ٠ \end{vmatrix}$ = صفر (لأن جميع عناصر ص٢ أصفار)

(ج) $\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{vmatrix}$ = صفر (لأن عناصر ص٢ = ٢ × عناصر ص١)

(د) $\begin{vmatrix} ٠ & ١ & -٥ \\ -١ & ٠ & -٣ \\ ٥ & ٣ & ٠ \end{vmatrix}$

∵ المحدد = مدوره

$\therefore \begin{vmatrix} ٠ & ١ & -٥ \\ -١ & ٠ & -٣ \\ ٥ & ٣ & ٠ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٠ & -١ & ٥ \\ ١ & ٠ & ٣ \\ -٥ & -٣ & ٠ \end{vmatrix}$

بإخراج -١ مشترك من كل من ص١، ص٢ ، ص٣ لمحدد الطرف الأيسر

$\therefore \begin{vmatrix} ٠ & ١ & -٥ \\ -١ & ٠ & -٣ \\ ٥ & ٣ & ٠ \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} ٠ & ١ & ٥ \\ -١ & ٠ & ٣ \\ ٥ & ٣ & ٠ \end{vmatrix}$

$\therefore \begin{vmatrix} ٠ & ١ & -٥ \\ -١ & ٠ & -٣ \\ ٥ & ٣ & ٠ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٠ & ١ & -٥ \\ -١ & ٠ & -٣ \\ ٥ & ٣ & ٠ \end{vmatrix}$ = صفر

$\therefore ٢ \times \begin{vmatrix} ٠ & ١ & -٥ \\ -١ & ٠ & -٣ \\ ٥ & ٣ & ٠ \end{vmatrix}$ = صفر

$\therefore \begin{vmatrix} ٠ & ١ & -٥ \\ -١ & ٠ & -٣ \\ ٥ & ٣ & ٠ \end{vmatrix}$ = صفر

(هـ) $\begin{vmatrix} ١ & -١ & ٢ \\ ٣ & ٢ & -١ \\ ٤ & ١ & ١ \end{vmatrix}$ ص٢ - ٣ص١ ، ص٣ - ٤ص١

$= \begin{vmatrix} ١ & -١ & ٢ \\ ٠ & ٥ & -٧ \\ ٠ & ٥ & -٧ \end{vmatrix}$ = صفر (لأن ص٢ ≡ ص٣)

(و) $\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٣ & ٢ & -١ \\ ٥ & -٤ & ٢ \end{vmatrix}$ = صفر (لأن ع٢ = -٢ ع٣)

(٣) (أ) $\begin{vmatrix} ١ & ١ & س \\ ١ & س & ١ \\ س & ١ & ١ \end{vmatrix}$ بتبديل عناصر ع١ ، ع٣

$= - \begin{vmatrix} س & ١ & ١ \\ ١ & س & ١ \\ ١ & ١ & س \end{vmatrix}$ ص٢ - ص١ ، ص٣ - س × ص١

$= - \begin{vmatrix} س & ١ & ١ \\ ١-س & س-١ & ٠ \\ ١-س^{٢} & ١-س & ٠ \end{vmatrix}$

بإخراج (١-س) مشترك من كل من عناصر ص٢، ص٣

$= -(١-س)^{٢} \begin{vmatrix} س & ١ & ١ \\ ١ & ١- & ٠ \\ ١+س & ١ & ٠ \end{vmatrix}$ ص٣ + ص٢

$= (١-س)^{٢} \begin{vmatrix} س & ١ & ١ \\ ١ & ١- & ٠ \\ ٣+س & ١ & ٠ \end{vmatrix}$

المحدد بالصورة المثلثية العليا

∴ قيمته = حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي

$= (١-س)^{٢} \times -(٢+س)$

$= (١-٢س+س^{٢})(٢+س)$

$= س^{٣} - ٣س + ٢$

(ب) $\begin{vmatrix} س & س & ص+ع \\ ص & س+ع & ص \\ س+ص & ع & ع \end{vmatrix}$

بإجراء ع١ + ع٢ + ع٣

$= \begin{vmatrix} س & س & ٢س+ص+ع \\ ص & س+ع & س+٢ص+ع \\ س+ص & ع & س+ص+٢ع \end{vmatrix}$

بتحويل المحدد إلى مجموع محددين

$= \begin{vmatrix} س & س & س+ص+ع \\ ص & س+ع & س+ص+ع \\ س+ص & ع & س+ص+ع \end{vmatrix}$

$+ \begin{vmatrix} س & س & س \\ ص & س+ع & ص \\ س+ص & ع & ع \end{vmatrix}$

بإخراج (س+ص+ع) مشترك من ع١ للمحدد الأول

وإخراج س مشترك من ص١ للمحدد الثاني

$= (س+ص+ع) \begin{vmatrix} س & س & ١ \\ ص & س+ع & ١ \\ س+ص & ع & ١ \end{vmatrix}$

$+ س \times \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ص & س+ع & ص \\ س+ص & ع & ع \end{vmatrix}$

بإجراء ص٢- ص١ ، ص٣- ص٢ للمحدد الأول

وكذلك ع٢- ع١ ، ع٣ - ع١ للمحدد الثاني

$= (س+ص+ع) \begin{vmatrix} ص & س & ١ \\ ص-س & ع & ٠ \\ ص & ع-س & ٠ \end{vmatrix}$

$+ س \times \begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & س+ع-ص & ص \\ س+ص-ع & ٠ & ع \end{vmatrix}$

بفك المحدد الأول عن طريق عناصر ع١ والمحدد الثاني بالصورة المثلثية السفلى أي أن قيمته تساوى حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي

$= (س+ص+ع) \times ١ \begin{vmatrix} ص-س & ع \\ ص & ع-س \end{vmatrix}$

$+ س(س+ع-ص)(س+ص-ع)$

$= (س+ص+ع) \, [ع ص - (ع-س)(ص-س)]$

$+ س(س+ع-ص)(س+ص-ع) = ٤ س ص ع$

(ج) $\begin{vmatrix} 0 & -5 & 6 \\ 5 & 0 & -2 \\ -6 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ المحدد قيمته = صفر

أنظر طريقة الحل في (٢) (م)

(٤) (أ) الطرف الأيمن $\begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{أ}^3 \\ 1 & \text{ب} & \text{ب}^3 \\ 1 & \text{جـ} & \text{جـ}^3 \end{vmatrix}$

بإجراء $\text{ص}_2 - \text{ص}_1$ ، $\text{ص}_3 - \text{ص}_1$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{أ}^3 \\ 0 & \text{ب} - \text{أ} & \text{ب}^3 - \text{أ}^3 \\ 0 & \text{جـ} - \text{أ} & \text{جـ}^3 - \text{أ}^3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{أ}^3 \\ 0 & \text{ب} - \text{أ} & (\text{ب} - \text{أ})(\text{ب}^2 + \text{ب}\,\text{أ} + \text{أ}^2) \\ 0 & \text{جـ} - \text{أ} & (\text{جـ} - \text{أ})(\text{جـ}^2 + \text{جـ}\,\text{أ} + \text{أ}^2) \end{vmatrix}$$

بإخراج (ب − أ) مشترك من ص_2

. (جـ − أ) مشترك من ص_3

$$= (\text{ب} - \text{أ})(\text{جـ} - \text{أ}) \begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{أ}^3 \\ 0 & 1 & \text{ب}^2 + \text{ب}\,\text{أ} + \text{أ}^2 \\ 0 & 1 & \text{جـ}^2 + \text{جـ}\,\text{أ} + \text{أ}^2 \end{vmatrix}$$

بإجراء $\text{ص}_3 - \text{ص}_2$

$$= (\text{ب} - \text{أ})(\text{جـ} - \text{أ}) \begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{أ}^3 \\ 0 & 1 & \text{ب}^2 + \text{ب}\,\text{أ} + \text{أ}^2 \\ 0 & 1 & \text{جـ}^2 - \text{ب}^2 + \text{جـ}\,\text{أ} - \text{ب}\,\text{أ} \end{vmatrix}$$

بإخراج (جـ − ب) مشترك من ص_3

$$= (\text{ب} - \text{أ})(\text{جـ} - \text{أ})(\text{جـ} - \text{ب}) \begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{أ}^3 \\ 0 & 1 & \text{ب}^2 + \text{ب}\,\text{أ} + \text{أ}^2 \\ 0 & 1 & \text{جـ} + \text{ب} + \text{أ} \end{vmatrix}$$

المحدد بالصورة المثلثية قيمته تساوى حاصل ضرب

عناصر القطر الرئيسي

$= (\text{ب} - \text{أ})(\text{جـ} - \text{أ})(\text{جـ} - \text{ب})(\text{جـ} + \text{ب} + \text{أ})$

$= (\text{أ} - \text{ب})(\text{ب} - \text{جـ})(\text{جـ} - \text{أ})(\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ})$ = الأيسر

(ب) الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} \text{س} & \text{أ} & \text{أ} \\ \text{أ} & \text{س} & \text{أ} \\ \text{أ} & \text{أ} & \text{س} \end{vmatrix}$

بإجراء $\text{ع}_1 + \text{ع}_2 + \text{ع}_3$

$$= \begin{vmatrix} 2\text{أ} + \text{س} & \text{أ} & \text{أ} \\ 0 & \text{س} & \text{أ} \\ 2\text{أ} + \text{س} & \text{أ} & \text{س} \end{vmatrix}$$

بإخراج (٢أ + س) مشترك من ع_1

$$= (2\text{أ} + \text{س}) \begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{أ} \\ 1 & \text{س} & \text{أ} \\ 1 & \text{أ} & \text{س} \end{vmatrix}$$ $\text{ص}_2 - \text{ص}_1$ ، $\text{ص}_3 - \text{ص}_1$

$$= (2\text{أ} + \text{س}) \begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{أ} \\ 0 & \text{س} - \text{أ} & 0 \\ 0 & 0 & \text{س} - \text{أ} \end{vmatrix}$$ المحدد بالصورة المثلثية

$= (2\text{أ} + \text{س})(\text{س} - \text{أ})^2$ = الطرف الأيسر

(جـ) الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} 1 + \text{س}^2 & \text{س} & 0 \\ \text{س} & 1 + \text{س}^2 & \text{س} \\ 0 & \text{س} & 1 + \text{س}^2 \end{vmatrix}$

بإجراء $\text{ع}_1 + \text{ع}_2 + \text{ع}_3$

$$= \begin{vmatrix} 1 + \text{س} + \text{س}^2 & \text{س} & 0 \\ 1 + 2\text{س} + \text{س}^2 & 1 + \text{س}^2 & \text{س} \\ 1 + \text{س} + \text{س}^2 & \text{س} & 1 + \text{س}^2 \end{vmatrix}$$

بتحويل المحدد إلى مجموع محددين

$$= \begin{vmatrix} 1 + \text{س} + \text{س}^2 & \text{س} & 0 \\ 1 + \text{س} + \text{س}^2 & 1 + \text{س}^2 & \text{س} \\ 1 + \text{س} + \text{س}^2 & \text{س} & 1 + \text{س}^2 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} 0 & \text{س} & 0 \\ \text{س} & 1+\text{س}^2 & \text{س} \\ 1+\text{س}^2 & \text{س} & 0 \end{vmatrix}$$

بإخراج $(1+\text{س}+\text{س}^2)$ مشترك من ع_1 للأول

وتبديل عناصر ص_1 ، ص_2 للمحدد الثاني

$$= (1+\text{س}+\text{س}^2)\begin{vmatrix} 0 & \text{س} & 1 \\ \text{س} & 1+\text{س}^2 & 1 \\ 1+\text{س}^2 & \text{س} & 1 \end{vmatrix}$$

$$-\begin{vmatrix} \text{س} & 1+\text{س}^2 & \text{س} \\ 0 & \text{س} & 0 \\ 1+\text{س}^2 & \text{س} & 0 \end{vmatrix}$$

بإجراء $\text{ص}_1 - \text{ص}_2$ ، $\text{ص}_2 - \text{ص}_3$ للمحدد الأول

وكذلك $\text{ص}_1 - \text{ص}_2$ للمحدد الثاني

$$= (1+\text{س}+\text{س}^2)\begin{vmatrix} 0 & \text{س} & 1 \\ \text{س} & 1+\text{س}^2-\text{س} & 0 \\ 1+\text{س}^2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$-\begin{vmatrix} \text{س} & 1+\text{س}^2 & \text{س} \\ 0 & \text{س} & 0 \\ 1+\text{س}^2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

لاحظ أن كلاً من المحددين بالصورة المثلثية

$= (1+\text{س}+\text{س}^2)(1+\text{س}^2-\text{س})(1+\text{س}^2) - \text{س}^2(1+\text{س}^2)$

$= (1+\text{س}^2)[(1+\text{س}^2+\text{س})(1+\text{س}^2-\text{س}) - \text{س}^2]$

$= (1+\text{س}^2)[(1+\text{س}^2)^2 - \text{س}^2 - \text{س}^2]$

$= (1+\text{س}^2)(1+2\text{س}^2+\text{س}^4-2\text{س}^2)$

$= 1+\text{س}^2+\text{س}^4+\text{س}^6 =$ الطرف الأيسر

(٥) الطرف الأيمن $= \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{ء} & \text{جـ} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \text{ص} & \text{س} \\ \text{ك} & \text{ع} \end{vmatrix}$

$= (\text{أ ء} - \text{ب جـ})(\text{س ك} - \text{ع ص})$

الطرف الأيسر $= \begin{vmatrix} \text{أ ص} + \text{ب ك} & \text{أ س} + \text{ب ع} \\ \text{جـ ص} + \text{ء ك} & \text{جـ س} + \text{ء ع} \end{vmatrix}$

$= (\text{أ س} + \text{ب ع})(\text{جـ ص} + \text{ء ك}) - (\text{جـ س} + \text{ء ع})(\text{أ ص} + \text{ب ك})$

$= \text{أ س ء ك} - \text{أ ء ص ع} - \text{ب جـ س ك} + \text{ب جـ ص ع}$

$= \text{س ك}(\text{أ ء} - \text{ب جـ}) - \text{ص ع}(\text{أ ء} - \text{ب جـ})$

$= (\text{أ ء} - \text{ب جـ})(\text{س ك} - \text{ص ع}) =$ الطرف الأيمن

تعميم القاعدة لمحدد الدرجة الثالثة:

$$\begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ص} & \text{س} \\ \text{ن} & \text{م} & \text{ل} \\ \text{ق} & \text{ى} & \text{ر} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \text{جـ} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{و} & \text{هـ} & \text{ء} \\ \text{ك} & \text{ط} & \text{ح} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \text{أ ع+ب ن+جـ ق} & \text{أ ص+ب م+جـ ى} & \text{أ س+ب ل+جـ ر} \\ \text{ء ع+هـ ن+و ق} & \text{ء ص+هـ م+و ى} & \text{ء س+هـ ل+و ر} \\ \text{ح ع+ط ن+ك ق} & \text{ح ص+ط م+ك ى} & \text{ح س+ط ل+ك ر} \end{vmatrix}$$

(٦) (أ) لكي تكون س عامل ∴ الصفر جذر

أي أن: $\begin{vmatrix} \text{ك} & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$ صفر

وهذه المعادلة تتحقق لجميع قيم ك $\in$ ح

(ب) $\begin{vmatrix} \text{ك} & 0 \\ 2 & \text{ك} \end{vmatrix} =$ صفر

∴ $\text{ك}^2 = 0 \Leftarrow \text{ك}^2 = 0$ ∴ $\text{ك} = 0$

(جـ) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \\ -\text{ك} & 5 & \text{ك} \end{vmatrix} =$ صفر

وهذا يتحقق دائما بغض النظر ع قيمة ك وذلك لأن عناصر $\text{ع}_1 = -$ عناصر ع_3 فتنعدم قيمة المحدد

∴ المعادلة تتحقق لجميع قيم ك ∈ ح

(د) $\begin{vmatrix} -١ & ٣ & ٤ \\ ١ & ١ & ٢ \\ -١ & ٥ & ك \end{vmatrix} = \text{صفر}$

بإجراء ص٢ + ص١ ، ص٣ - ص١

∴ $\begin{vmatrix} -١ & ٣ & ٤ \\ ٠ & ٤ & ٦ \\ ٠ & ٢ & ك-٤ \end{vmatrix} = \text{صفر}$

بإجراء ص٣ - $\frac{١}{٢}$ ص٢

∴ $\begin{vmatrix} -١ & ٣ & ٤ \\ ٠ & ٤ & ٦ \\ ٠ & ٠ & ك-٧ \end{vmatrix} = \text{صفر}$

المحدد بالصورة المثلثية قيمته = حاصل ضرب القطر الرئيسي

∴ -٤(ك-٧) = ٠ ⟸ ك = ٧

(هـ) $\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ١ \\ ١ & ٠ & ك \\ ٠ & ك & ٠ \end{vmatrix} = \text{صفر}$ ص٢ - ص١

$- \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ١ \\ ٠ & ٠ & ك-١ \\ ٠ & ك & ٠ \end{vmatrix} = ٠$ بتبديل ص٢ ، ص٣

$- \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ١ \\ ٠ & ك & ٠ \\ ٠ & ٠ & ك-١ \end{vmatrix} =$ المحدد بالصورة المثلثية

∴ -ك (ك-١) = ٠ ⟸ ك = ٠ أو ك = ١

(و) $\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ١ \\ ٠ & ٠ & ك-١ \\ ٠ & ك & ٠ \end{vmatrix} = ٠$ بتبديل ص١ ، ص٢

$- \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ١ \\ ٢ & ١ & ك \\ ٠ & ك & ٣ \end{vmatrix} = ٠$ ص٢ - ٢ ص١

$- \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ك-٢ \\ ٠ & ك & ٣ \end{vmatrix} = \text{صفر}$

ص٣ - ك × ص٢

$- \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ك-٢ \\ ٠ & ٠ & ٣-ك^٢+٢ك \end{vmatrix} = \text{صفر}$

المحدد بالصورة المثلثية

∴ -٣(٣-ك² + ٢ك) = ٠

∴ ك² - ٢ك - ٣ = ٠

(ك-٣) (ك+١) = ٠

∴ ك = ٣ أو ك = -١ (يصحح الجواب بالكتاب)

حلول تمرين (١٤)

(١) (أ) ٢س + ص = ٢

٣س + ٢ص = ٥

$\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} = ٤ - ٣ = ١$

$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix} = ٤ - ٥ = -١$

$\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} ٢ & ٢ \\ ٣ & ٥ \end{vmatrix} = ١٠ - ٦ = ٤$

$س = \frac{\Delta_{س}}{\Delta} = \frac{-١}{١} = -١$

$ص = \frac{\Delta_{ص}}{\Delta} = \frac{٤}{١} = ٤$

(ب) - س + ص = ٢ ، ٢س + ٣ص = ١

$\Delta = \begin{vmatrix} -١ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} = -٥$

$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix} = ٥$

$\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} -١ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} = -٥$

$س = \frac{\Delta_{س}}{\Delta} = \frac{٥}{-٥} = -١$

$ص = \frac{\Delta_{ص}}{\Delta} = \frac{-٥}{-٥} = ١$

(جـ) س + ٥ص = ٥ ، ٢س + ص = ٠

$\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ٥ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} = -٩$

$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} ٥ & ٥ \\ ٠ & ١ \end{vmatrix} = ٥$

$\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} ١ & ٥ \\ ٢ & ٠ \end{vmatrix} = -١٠$

$س = \frac{\Delta_{س}}{\Delta} = \frac{٥}{-٩} = -\frac{٥}{٩}$

$ص = \frac{\Delta_{ص}}{\Delta} = \frac{-١٠}{-٩} = \frac{١٠}{٩}$

(د) ٢س − ٥ص = ١ ، − س + ص = ٢

$\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & -٥ \\ -١ & ١ \end{vmatrix} = -٣$

$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} ١ & -٥ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} = ١١$

$\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٢ \end{vmatrix} = ٥$

$س = \frac{\Delta_{س}}{\Delta} = \frac{١١}{-٣} = -\frac{١١}{٣}$

$ص = \frac{\Delta_{ص}}{\Delta} = \frac{٥}{-٣} = \frac{٥}{٣}$

(٢) (أ) س + ٣ص + ٢ع = ١٣

٢س − ص + ع = ٣

٣س + ص − ع = ٢

$\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ٣ & ٢ \\ ٢ & -١ & ١ \\ ٣ & ١ & -١ \end{vmatrix} = ٢٥$

$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} ١٣ & ٣ & ٢ \\ ٣ & -١ & ١ \\ ٢ & ١ & -١ \end{vmatrix} = ٢٥$

$\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} ١ & ١٣ & ٢ \\ ٢ & ٣ & ١ \\ ٣ & ٢ & -١ \end{vmatrix} = ٥٠$

$\Delta_{ع} = \begin{vmatrix} ١ & ٣ & ١٣ \\ ٢ & -١ & ٣ \\ ٣ & ١ & ٢ \end{vmatrix} = ٧٥$

$س = \frac{٢٥}{٢٥} = ١$ ، $ص = \frac{٥٠}{٢٥} = ٢$ ، $ع = \frac{٧٥}{٢٥} = ٣$

∴ مجموعة الحل (١، ٢، ٣)

(ب) ٢س + ص − ٢ع = ١٠

٣س + ٢ص + ٢ع = ١

٥س + ٤ص + ٣ع = ٤

$\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & -٢ \\ ٣ & ٢ & ٢ \\ ٥ & ٤ & ٣ \end{vmatrix} = -٧$

$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} ١٠ & ١ & -٢ \\ ١ & ٢ & ٢ \\ ٤ & ٤ & ٣ \end{vmatrix} = -٧$

$\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} ٢ & ١٠ & -٢ \\ ٣ & ١ & ٢ \\ ٥ & ٤ & ٣ \end{vmatrix} = -١٤$

$\Delta_{ع} = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ١٠ \\ ٣ & ٢ & ١ \\ ٥ & ٤ & ٤ \end{vmatrix} = ٢١$

س = $\frac{-7}{-7}$ ، ص = $\frac{-14}{-7}$ ، ع = $\frac{21}{-7}$

∴ مجموعة الحل (١ ، ٢ ، -٣)

(جـ) س + ٢ص - ٣ع = ٦

٢س - ص - ٤ع = ٢

٤س + ٣ص - ٢ع = ١٤

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -4 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -40$$

$$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -4 \\ 14 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -80$$

$$\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 2 & 2 & -4 \\ 4 & 14 & -2 \end{vmatrix} = -80$$

$$\Delta_{ع} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 14 \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

س = $\frac{-80}{-40}$ ، ص = $\frac{-80}{-40}$ ، ع = $\frac{\text{صفر}}{-40}$

∴ مجموعة الحل (٢ ، ٢ ، ٠)

(د) س + ٢ص + ٣ع = ٦

٢س - ص + ع = -٣

-س - ٢ص + ٢ع = -١

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -25$$

$$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 25$$

$$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -50$$

$$\Delta_{ع} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -25$$

س = $\frac{25}{-25}$ ، ص = $\frac{-50}{-25}$ ، ع = $\frac{-25}{-25}$

∴ مجموعة الحل (-١ ، ٢ ، ١)

(هـ) ٢س + ص + ٣ع = -٢

٣س - ٢ص - ٢ع = ٧

س - ص - ع = ١

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -16$$

$$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 7 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -16$$

$$\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & 7 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 16$$

$$\Delta_{ع} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 16$$

س = $\frac{-16}{-16}$ ، ص = $\frac{16}{-16}$ ، ع = $\frac{16}{-16}$

∴ مجموعة الحل (١ ، -١ ، -١)

(و) ٢ع = ٥ ، ٣ص = -١ ، ٥س = ١

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -30$$

$$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

$$\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 10$$

$$\Delta_{ع} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -75$$

س = $\frac{-6}{-30}$ ، ص = $\frac{10}{-30}$ ، ع = $\frac{-75}{-30}$

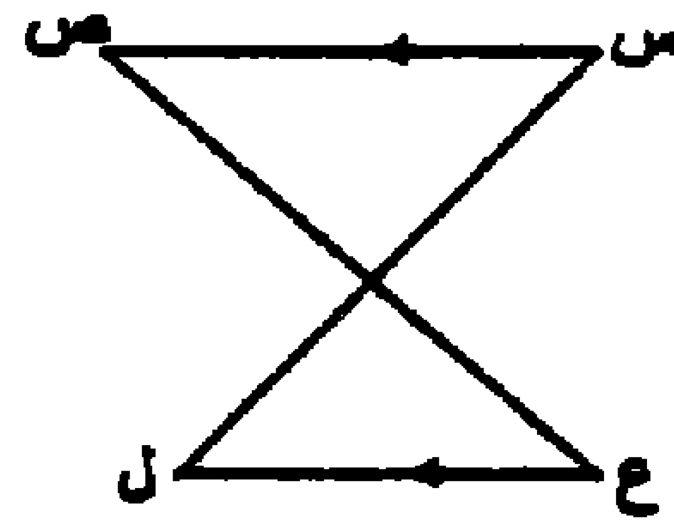
∴ مجموعة الحل = ($\frac{1}{5}$ ، $-\frac{1}{3}$ ، $\frac{5}{2}$)

ثانياً : إجابة تمارين الهندسة الفراغية

حلول تمرين (١)

(١) ١- ✓ ٢- ✓ ٣- ✓ ٤- ×
٥- ✓ ٦- × ٧- × ٨- ✓
٩- ✓ ١٠- ✓

(٢)



∵ س ص // ع ل

∴ س ص ، ع ل يعينان مستوياً وليكن ص

∴ س ص ⊂ ص ع

، ع ل ⊂ ص ∴ س،ص، ع، ل ∈ ص — (١)

∵ ص، ع ∈ ص ∴ ص ع ⊂ ص

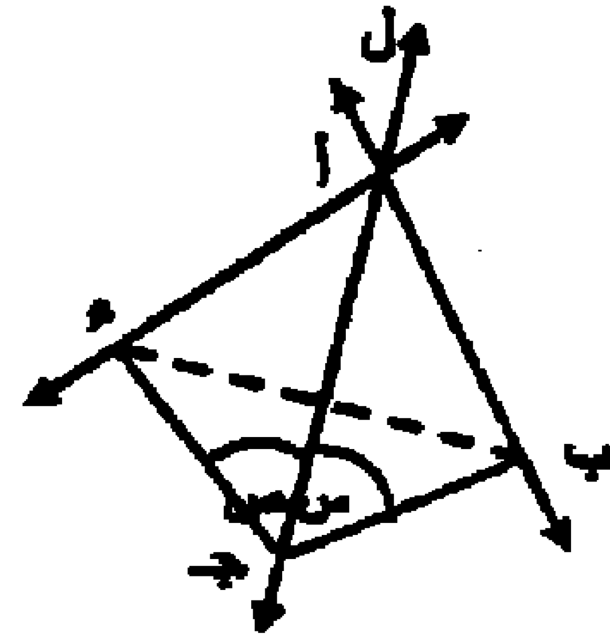
ع ، ل ∈ ص ∴ ع ل ⊂ ص

ل ، س ∈ ص ∴ ل س ⊂ ص

∴ س ص، ص ع ، ع ل ، ل س ⊂ ص

∴ س ص ،ص ع،ع ل،ل س يحويها مستوى واحد

(٣)



نفرض أن المستويات هي س، ص، ع والمستقيمات هي أ ب، أ جـ ، أ ء ∴ المطلوب إثبات أن أ ∈ للمستويين المتقاطعين في ل وهما س، ص

∵ أ ∈ ب أ (خط تقاطع المستويين س ، ع)

∴ أ ∈ س ، ∵ أ ∈ ء أ (خط تقاطع)

∴ أ ∈ ص ∴ أ ∈ للمستويين س، ص

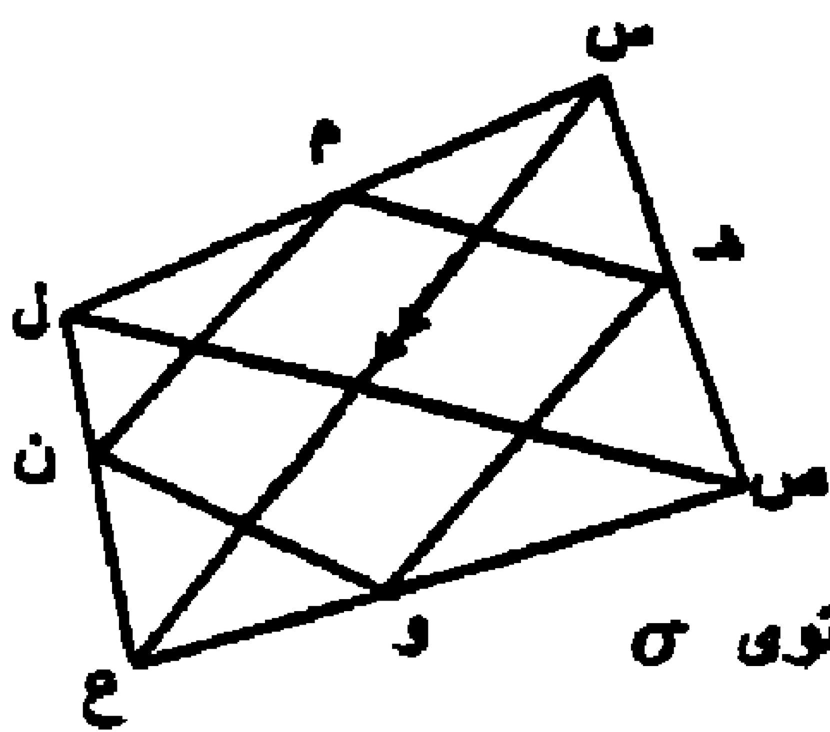
∴ أ ∈ خط التقاطع ل

(٤) ١. أ جـ ٢. ب جـ ٣. جـ ء
٤. أ ب ٥. ⊂ ، ⊂ ٦. {جـ}

حلول تمرين (٢)

(١) أ- ✓ ب- × جـ- × ء- ×
هـ - × و- ✓ س- ×

(٢)



∵ س ع // المستوى σ

، س ع ⊂ المستوى س ص ع

المستوى σ ∩ المستوى س ص ع = س ص ع = هـ و

∴ س ع // هـ و ∴ $\frac{هـ م}{ص ل} = \frac{هـ و}{س ع}$ — (١)

∵ ص ل // المستوى σ ، ص ل ⊂ المستوى س ص ل

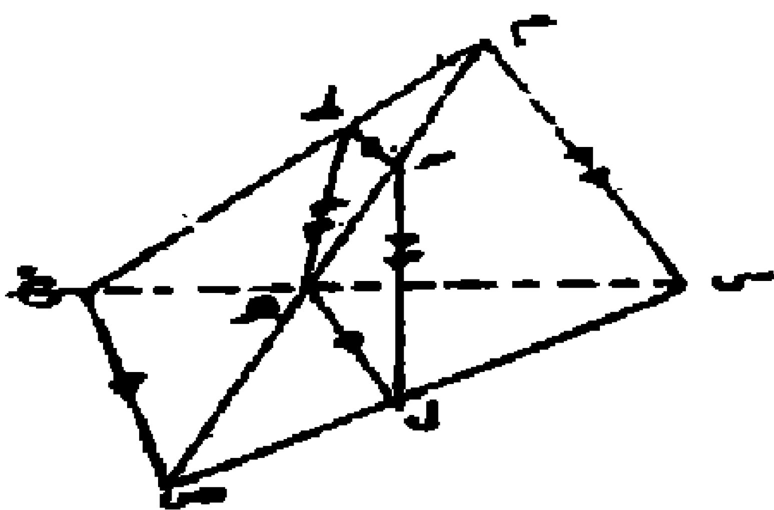
المستوى س ص ل ∩ المستوى σ = هـ م

∴ ص ل // هـ م

$\frac{س هـ}{س ص} = \frac{هـ م}{ص ل}$ —— (٢) من (١)، (٢) بالجمع

$\frac{هـ و}{س ع} + \frac{هـ م}{ص ل} = \frac{ص هـ}{ص س} + \frac{س هـ}{س ص} = \frac{س ص}{س ص} = ١$

(٣)



م س // المستوى ن ل هـ ط ، م س ⊂ المستوى م س ص

والمستوى م س ص ∩ المستوى ن ل هـ ط = $\overleftrightarrow{ن ل}$

∴ $\overleftrightarrow{م س}$ // $\overleftrightarrow{ن ل}$ بالمثل م س // ط هـ

∴ $\overleftrightarrow{ن ل}$ // $\overleftrightarrow{ط هـ}$ ——— (١)

∴ $\overleftrightarrow{ع ص}$ // المستوى ن ل هـ ط

$\overleftrightarrow{ع ص}$ ⊂ المستوى س ص ع ، المستوى ن ل هـ ط

∩ المستوى س ص ع = $\overleftrightarrow{ل هـ}$

∴ $\overleftrightarrow{ع ص}$ // $\overleftrightarrow{ل هـ}$

بالمثل $\overleftrightarrow{ع ص}$ // $\overleftrightarrow{ن ط}$ ∴ $\overleftrightarrow{ل هـ}$ // $\overleftrightarrow{ن ط}$ ——— (٢)

من(١) ، (٢) ∴ الشكل ل ن ط هـ متوازى أضلاع

من هندسة الشكل ∴ ل ن // س م ، ل ن = $\frac{١}{٢}$ م س

، ل هـ = $\frac{١}{٢}$ ص ع

محيط متوازى الأضلاع = ٢ [ل ن + ل هـ]

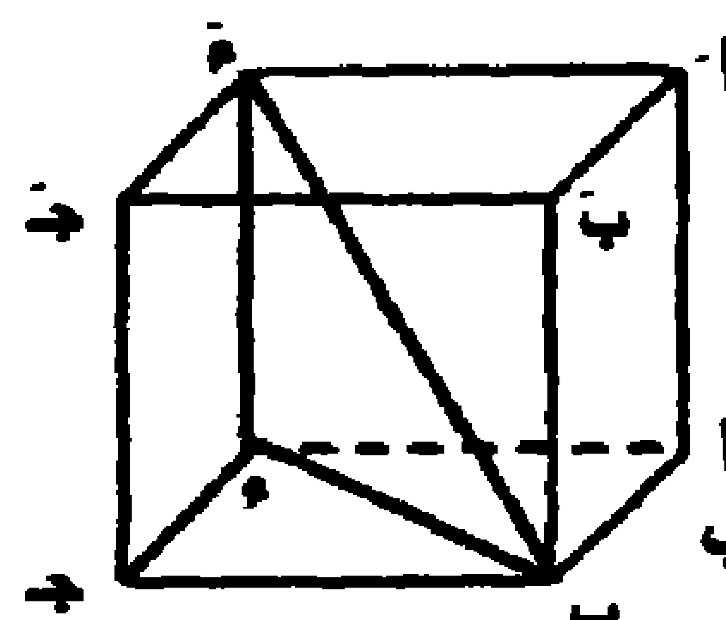
= ٢ [$\frac{١}{٢}$ م س + $\frac{١}{٢}$ ص ع] = ٢ × $\frac{١}{٢}$ [م س + ص ع]

= م س + ص ع ∴ ن ل = م س

، ل هـ = ص ع ∴ م س = ص ع

∴ ن ل = ل هـ وهما ضلعان متجاوران في متوازى الأضلاع

(٤)



∵ ء ءَ ⊥ المستوى

أ ب جـ ء ∴ ء ءَ ⊥ ء ب

$\overline{ب ءَ}^٢ = \overline{ء ءَ}^٢ + \overline{ء ب}^٢$

من Δ ب ء ءَ ، $\overline{ب ءَ}^٢ = \overline{ء ءَ}^٢ + (\overline{ء جـ}^٢ + \overline{جـ ب}^٢)$

القائم في جـ ، $\overline{ب ءَ}^٢ = \overline{ء ءَ}^٢ + \overline{ء جـ}^٢ + \overline{ء أ}^٢$

لأن جـ ب = ء أ

(٥) س ∈ المستوى أَ بَ جَـ لأن س ∈ $\overleftrightarrow{أَ جَـ}$ ، س ∈

المستوى أ ب جـ لأن س ∈ $\overleftrightarrow{أ جـ}$

∴ س ∈ لكل من المستويين أ ب جـ ، أَ بَ جَـ وبالمثل

ص ∈ لكل من المستويين أ ب جـ ، أَ بَ جَـ

∴ س ص هو خط تقاطع المستويين أ ب جـ ، أَ بَ جَـ

، ∵ ع ∈ المستوى أَ بَ جَـ لأن ع ∈ $\overleftrightarrow{بَ جَـ}$

، ع ∈ المستوى أ ب جـ لأن ع ∈ $\overleftrightarrow{ب جـ}$

∴ ع ∈ س ص

∴ س ، ع ، ص على إستقامة واحدة .

حلول تمرين (٣)

(١) أ) أ ب // جـ ء

ب) متوازى مستطيلات

جـ) شبه منحرف

(٢) ∵ أ ب // جـ ء ∴ أ ب ، جـ ء يعينان

مستوى ع وهو يقطع المستويين س ، ص المتوازيين

في أ جـ ، ب ء ∴ أ جـ // ب ء

∴ أ ب // جـ ء ، أ جـ // ب ء

الشكل أ ب جـ ء متوازى أضلاع ومنه أ ب = جـ ء

(٣) ء م = ويوازى هـ و

∴ الشكل م ء هـ و متوازي أضلاع

∴ م و // ء هـ الواقع في المستوى س

∴ م و // المستوى س

(٤) ء هـ مستقيم واصل بين منتصفي الضلعين ن أ ، ن ب

في Δ ن أ ب

∴ ء هـ // أ ب ويساوى نصفه

∴ ء هـ // المستقيم أ ب الواقع في المستوى م أ ب

∴ ء هـ // المستوى م أ ب .

(٥) ∵ ك ء // هـ م فهما يعينان مستوى ص

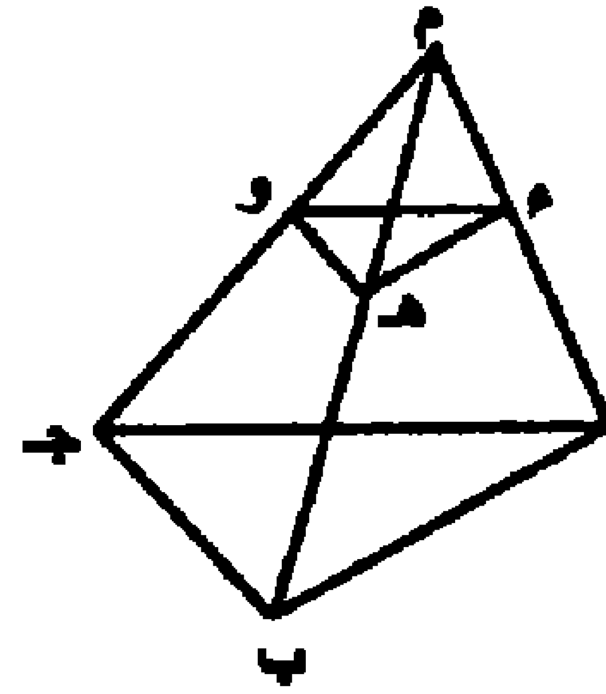
∵ ك هـ // المستوى س ومر به المستوى ص

الذى يقطع المستوى س في ء م

∴ ك هـ // ء م ∵ ك ء // هـ م ، ك ء // هـ م

∴ الشكل ك ء م هـ متوازي أضلاع

(٦)



∵ $\frac{م ء}{ء أ} = \frac{م هـ}{هـ ب}$

∴ $\overleftrightarrow{ء هـ} // \overleftrightarrow{أ ب}$ —— (١)

∴ $\frac{م هـ}{هـ ب} = \frac{م و}{و جـ}$

∴ $\overleftrightarrow{هـ و} = \overleftrightarrow{ب جـ}$ —— (٢)

من (١) ، (٢)

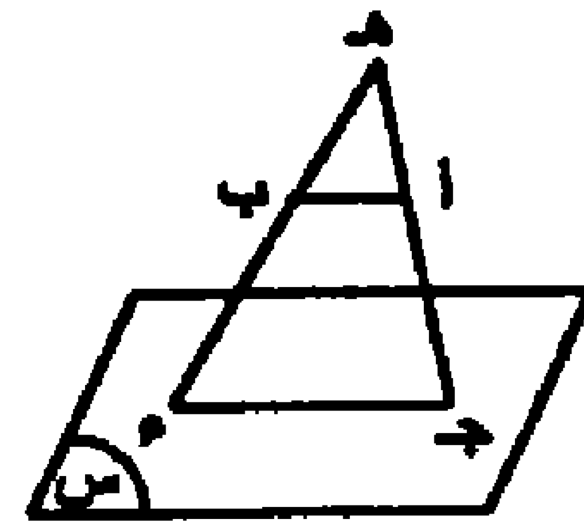
∴ المستقيمان $\overleftrightarrow{ء هـ}$ ، $\overleftrightarrow{هـ و}$ متقاطعان في هـ ، $\overleftrightarrow{أ ب}$

، $\overleftrightarrow{ب جـ}$ متقاطعان في ب

∴ المستوى ء هـ و // المستوى أ ب جـ

(٧) ∵ $\overleftarrow{هـ أ}$ ، $\overleftarrow{هـ ب}$

متقاطعان في هـ



∴ $\overleftarrow{هـ أ}$ ، $\overleftarrow{هـ ب}$ يعينان

مستوى واحد هو هـ جـ ء

∵ $\overleftrightarrow{أ ب}$ // المستوى س ، $\overleftrightarrow{أ ب}$ ⊂ المستوى هـ جـ ء

، المستوى س يقطع المستوى هـ جـ ء ، المستوى س

يقطع المستوى هـ جـ ء في $\overleftrightarrow{جـ ء}$ ∴ $\overleftrightarrow{أ ب} // \overleftrightarrow{جـ ء}$

∴ الشكل أ ب جـ ء شبه منحرف ∵ $\overleftrightarrow{أ ب} // \overleftrightarrow{جـ ء}$

في Δ هـ جـ ء ∴ Δ هـ أ ب يشابه Δ هـ جـ ء

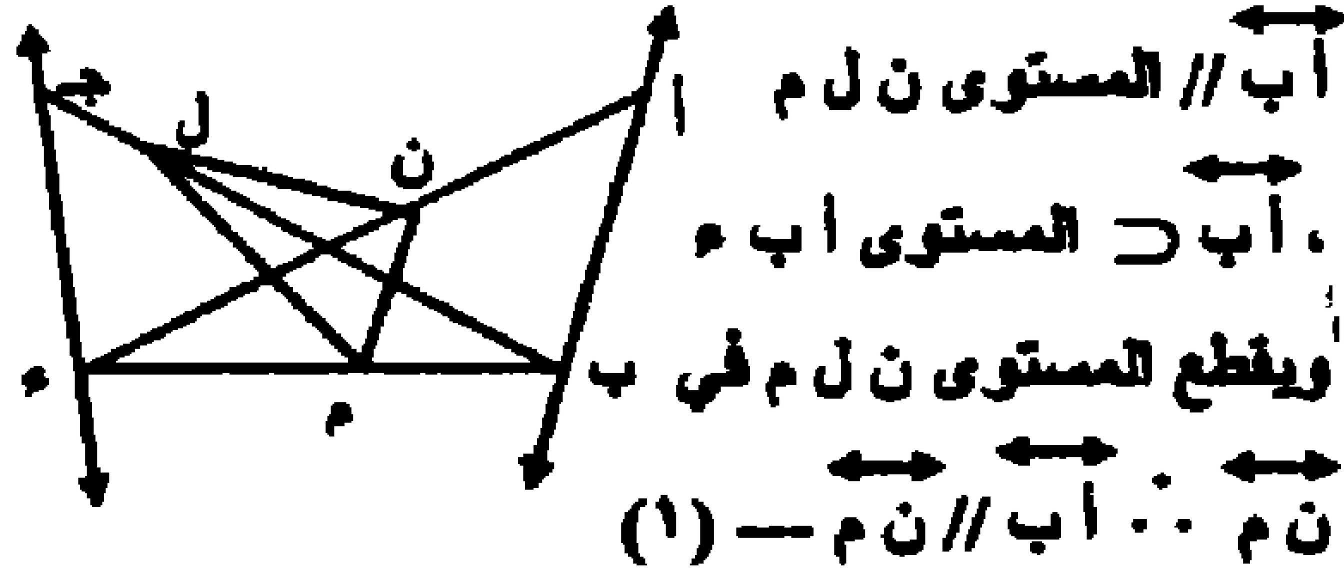
∴ $\frac{م \Delta هـ أ ب}{م \Delta هـ جـ ء} = (\frac{أ ب}{جـ ء})^٢$

$= \frac{م \Delta هـ أ ب}{٣٦} = (\frac{\frac{١}{٢} جـ ء}{جـ ء})^٢$

∴ $\frac{م \Delta هـ أ ب}{٤} = \frac{٤}{١}$ ∴ م Δ هـ أ ب = ١٦ سم^٢

∴ مساحة الشكل أ جـ ء ب = ٣٦ - ١٦ = ٢٠ سم^٢

(٨) أولاً:



$\overleftrightarrow{أ ب}$ // المستوى ن ل م

، $\overleftrightarrow{أ ب}$ ⊂ المستوى أ ب ء

ويقطع المستوى ن ل م في $\overleftrightarrow{ن م}$ ∴ $\overleftrightarrow{أ ب} // \overleftrightarrow{ن م}$ —— (١)

ثانياً: ∵ $\overleftrightarrow{جـ ء}$ // المستوى ن ل م ، $\overleftrightarrow{جـ ء}$ ⊂ المستوى

ب جـ ء ويقطع المستوى ن ل م في $\overleftrightarrow{ل م}$

∴ $\overleftrightarrow{جـ ء} // \overleftrightarrow{ل م}$ ∴ $\overline{جـ ء} // \overline{ل م}$ —— (٢)

ثالثاً: في Δ أ ب ء

∵ $\overline{ن م}$ تنصف $\overline{ب ء}$ ، $\overline{ن م} // \overline{أ ب}$

∴ $\overline{ن م}$ تنصف $\overline{أ ء}$ ، ن م = $\frac{١}{٢}$ أ ب —— (٣)

Δ ب جـ ء $\overline{ل م} // \overline{جـ ء}$ ، $\overline{ل م}$ تنصف $\overline{ب ء}$

∴ ل م تنصف ب جـ ∴ ل م = $\frac{١}{٢}$ جـ ء —— (٤)

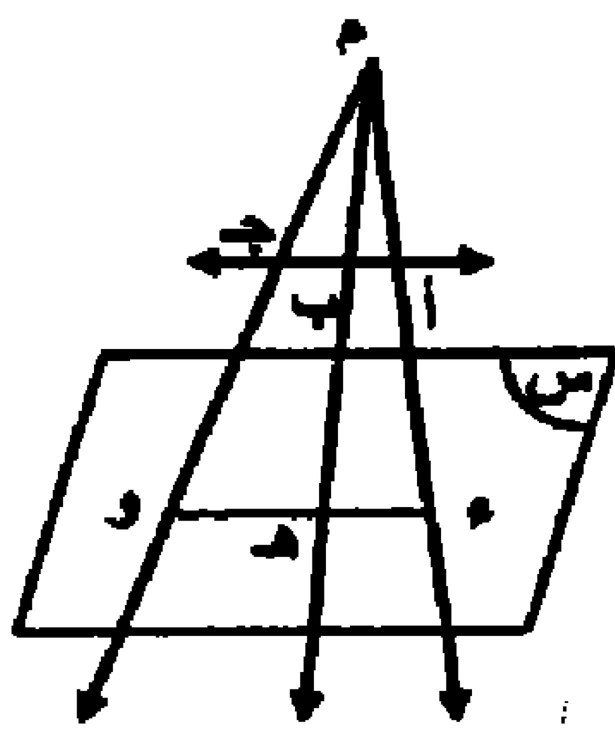
∴ بجمع (٣) ، (٤)

∴ ن م + ل م = $\frac{١}{٢}$ (أ ب + جـ ء)

في Δ ن م ل ن ل < (ن م + م ل)

∴ ن ل < $\frac{١}{٢}$ (أ ب + جـ ء)

(٩)



∵ $\overleftrightarrow{أ ب}$ // س

، $\overleftrightarrow{أ ب}$ ⊂ المستوى

م ء هـ ، ∵ س ∩

المستوى م ء هـ = $\overleftrightarrow{ء هـ}$

∴ $\overleftrightarrow{أ ب} // \overleftrightarrow{ء هـ}$

∴ $\frac{م أ}{م هـ} = \frac{م جـ}{م ن} = \frac{ب جـ}{هـ و}$ —— (١)

وبالمثل $\overleftrightarrow{ب جـ} // \overleftrightarrow{هـ و}$

∴ $\frac{م ب}{م هـ} = \frac{م جـ}{م ن} = \frac{ب جـ}{هـ و}$ —— (٢)

من (١) ، (٢) $\frac{أ ب}{ء هـ} = \frac{ب جـ}{هـ و}$ ∴ $\frac{أ ب}{ب جـ} = \frac{ء هـ}{هـ و}$

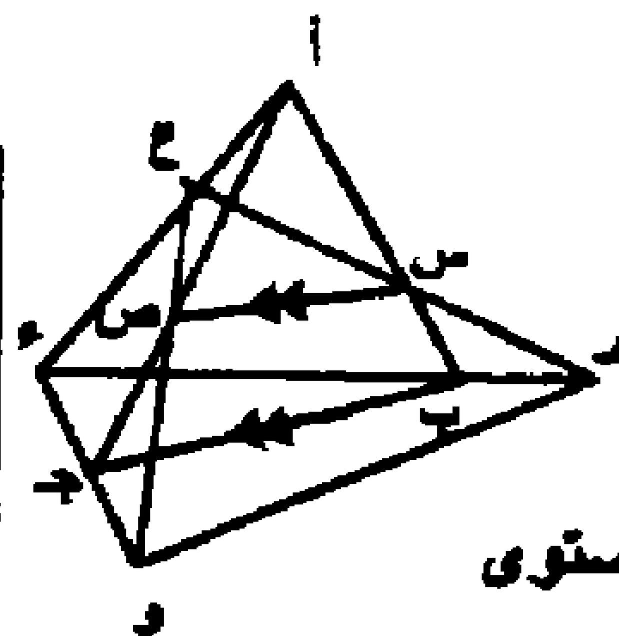
(١٠) ∵ $\overleftrightarrow{\text{س ص}} \parallel \overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$

، $\overleftrightarrow{\text{س ص}} \subset$ المستوى ع هـ و

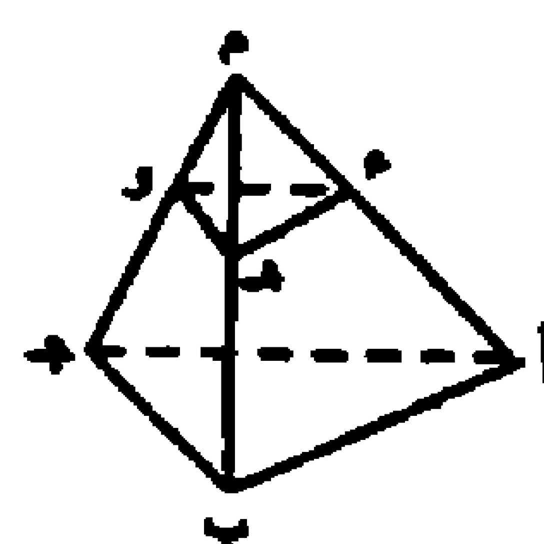
، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}} \subset$ المستوى ء هـ و

∴ المستوى ع هـ و ∩ المستوى ء هـ و = $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{س ص}} \parallel \overleftrightarrow{\text{ب جـ}} \parallel \overleftrightarrow{\text{هـ و}}$



حلول تمرين (٤)



(١) ∵ $\frac{\text{م ء}}{\text{ء أ}} = \frac{\text{م هـ}}{\text{هـ ب}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{ء هـ}} \parallel \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ — (١)

، ∵ $\frac{\text{م هـ}}{\text{هـ ب}} = \frac{\text{م و}}{\text{و جـ}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{هـ و}} \parallel \overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ — (٢)

∴ المستوى ء هـ و // المستوى أ ب جـ   **أولاً**

، في Δ م أ ب : ∵ $\overline{\text{ء هـ}} \parallel \overline{\text{أ ب}}$

∴ $\frac{\text{ء هـ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{م ء}}{\text{م أ}} = \frac{١}{٤}$ — (٣)

في Δ م ب جـ : ∵ $\overline{\text{هـ و}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$

∴ $\frac{\text{هـ و}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{م هـ}}{\text{م ب}} = \frac{١}{٤}$ — (٤)

في Δ م أ جـ : ∵ $\overline{\text{ء و}} \parallel \overline{\text{أ جـ}}$

∴ $\frac{\text{م ء}}{\text{م أ}} = \frac{\text{ء و}}{\text{أ جـ}} = \frac{١}{٤}$ — (٥)

من (٣)، (٤)، (٥)

∴ $\frac{\text{ء هـ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{هـ و}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{ء و}}{\text{أ جـ}}$

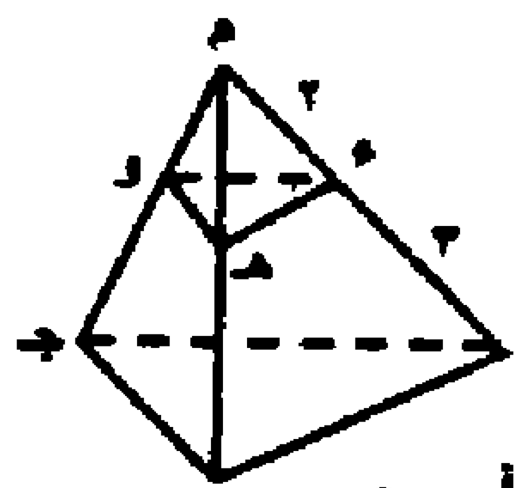
∴ ΔΔ ء هـ و ، أ ب جـ متشابهان

∴ $\frac{\text{م}\Delta\ \text{ء هـ و}}{\text{م}\Delta\ \text{أ ب جـ}} = \left(\frac{\text{ء هـ}}{\text{أ ب}}\right)^2 = \frac{١}{١٦}$

∵ م (Δ ء هـ و) = ٩ سم

∴ م (Δ أ ب جـ) = ٩ × ١٦ = ١٤٤

(٢)



∵ المستوى م أ ب قطع المستويين المتوازيين ء هـ و ، أ ب جـ في $\overline{\text{ء هـ}}$ ، $\overline{\text{أ ب}}$ ∴ $\overline{\text{ء هـ}} \parallel \overline{\text{أ ب}}$

∴ $\frac{\text{م ء}}{\text{م أ}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{أ ب}} = \frac{٢}{٥} = \frac{\text{م هـ}}{\text{م ب}}$ — (١)

، ∵ المستوى م ب جـ قطع المستويين المتوازيين ء هـ و ، أ ب جـ في $\overline{\text{هـ و}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ ∴ $\overline{\text{هـ و}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$

∴ $\frac{\text{م هـ}}{\text{م ب}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{٢}{٥}$ — (٢)

∵ المستوى م أ جـ قطع المستويين المتوازيين ء هـ و ، أ ب جـ في $\overline{\text{ء و}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ ∴ $\overline{\text{ء و}} \parallel \overline{\text{أ جـ}}$

∴ $\frac{\text{م ء}}{\text{م أ}} = \frac{\text{ء و}}{\text{أ جـ}} = \frac{٢}{٥}$ — (٣)

من (١)، (٢)، (٣)

∴ $\frac{\text{ء هـ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{هـ و}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{ء و}}{\text{أ جـ}}$

∴ Δ ء هـ و يشابه Δ أ ب جـ   **أولاً**

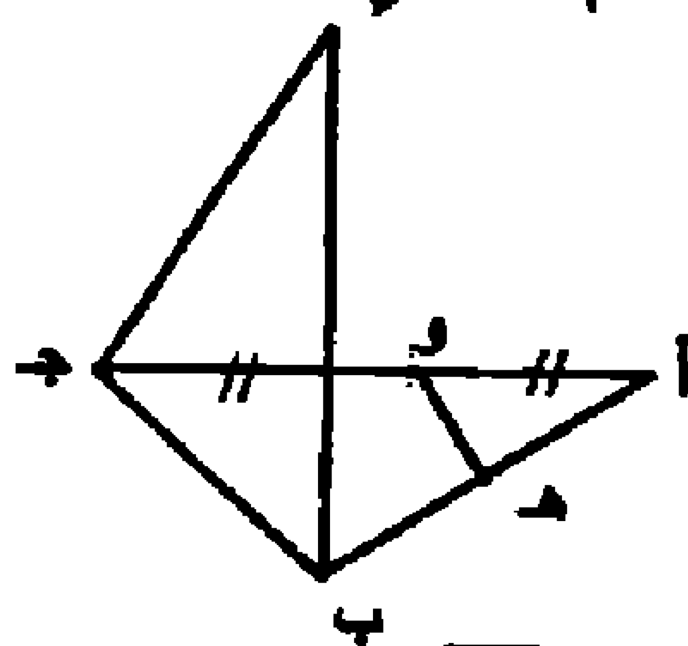
، ∵ ء هـ و يشابه Δ أ ب جـ

∴ $\frac{\text{م}\Delta\ \text{ء هـ و}}{\text{م}\Delta\ \text{أ ب جـ}} = \left(\frac{\text{ء هـ}}{\text{أ ب}}\right)^2 = \left(\frac{٢}{٥}\right)^2$

، ∵ $\frac{\text{م}\Delta\ \text{ء هـ و}}{١٥٠} = \frac{٤}{٢٥}$

∴ م (Δ ء هـ و) = ٢٤ سم^2

(٣) Δ أ ب جـ



∵ هـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

، و منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ ∴ $\overline{\text{هـ و}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$

∴ $\overline{\text{هـ و}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$ الواقع في المستوى ء ب جـ

∴ $\overline{\text{هـ و}}$ // المستوى ء ب جـ

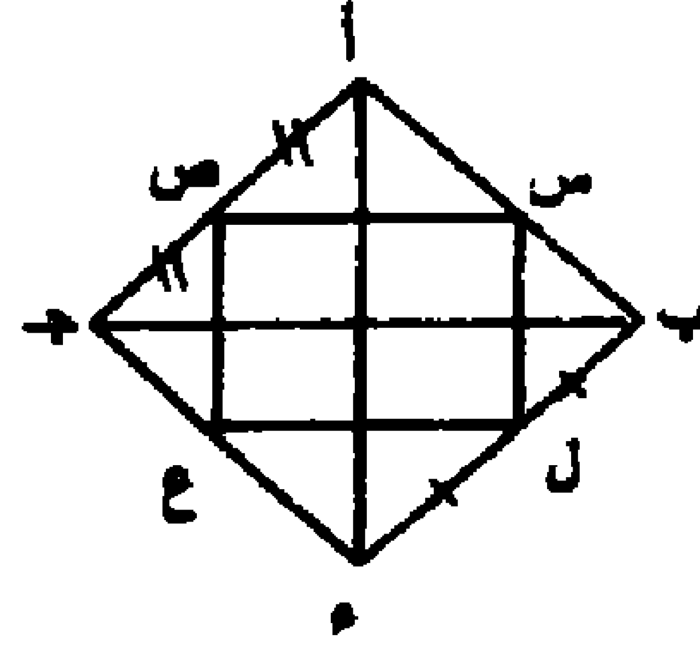
(٤) في Δ أ ب جـ ∵ س منتصف أب

، ص منتصف أجـ

∴ س ص // ب جـ

، س ص = $\frac{1}{2}$ ا جـ

وبالمثل Δ ء ب جـ



∴ ل ع // ب جـ ، ع ل = $\frac{1}{2}$ ب جـ

∴ س ص // ل ع ، س ص = ل ع

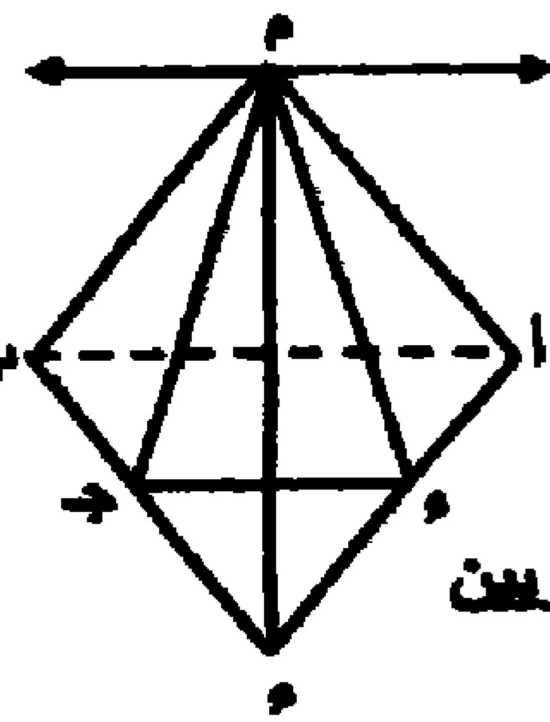
∴ الشكل س ص ع ل متوازى أضلاع

، ∵ ب جـ // س ص الواقع فى المستوى س ص ع ل

∴ ب جـ // المستوى س ص ع ل

وبنفس الطريقة نثبت أ ء // المستوى س ص ع ل

(٥) أ ء ∩ ب جـ = { هـ }



∴ هـ تقع في كل المستويين

م أ ء ، م ب جـ

، ∵ م تقع في كل من المستويين

∴ م هـ هو خط تقاطعهما

، ∵ أنهما يشتركن في رأس م

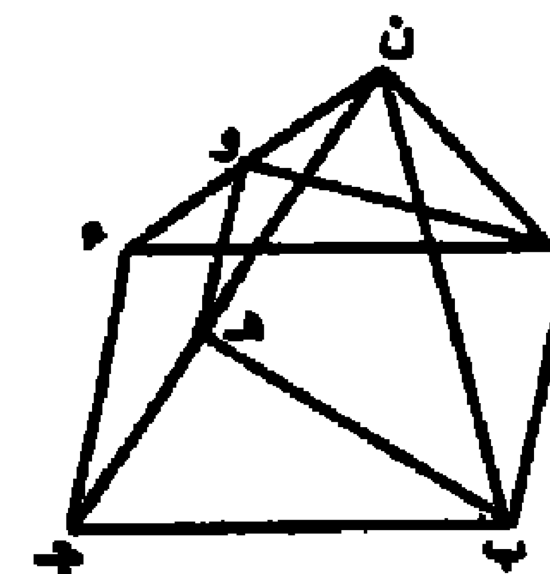
∴ يتقاطعان في مستقيم يمر بنقطة م

، ∵ أ ب // جـ ء ومر بهما المستويان

∴ خط تقاطعهما يوازى كلا منهما

∴ خط تقاطع المستويين هو مستقيم يمر بنقطة م

ويوازى كلا من أ ب ، جـ ء



(٦) أ ب // جـ ء الواقع

في المستوى ن جـ ء

∴ أ ب // المستوى ن جـ ء

∵ المستوى أ ب هـ و يحتوى أ ب ويقطع المستوى

ن جـ ء في هـ و ∴ أ ب // هـ و ∴ هـ و // جـ ء

∵ ن جـ = ن ء ∴ ن هـ = ن و

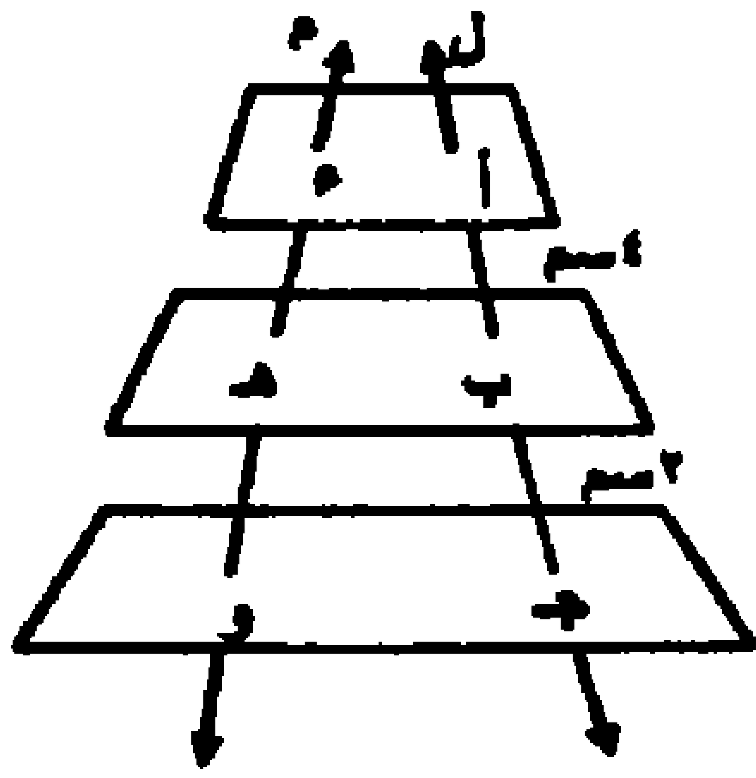
∵ ق(∠ ا ن و) = ق(∠ ب ن هـ) من تطابق

ΔΔ ن ا ء ، ن ب جـ ∴ Δ ا ن و ينطبق Δ ب ن هـ

∴ ا هـ = ب و

∴ ا ب هـ و شبه منحرف متساوى الساقين

(٧)

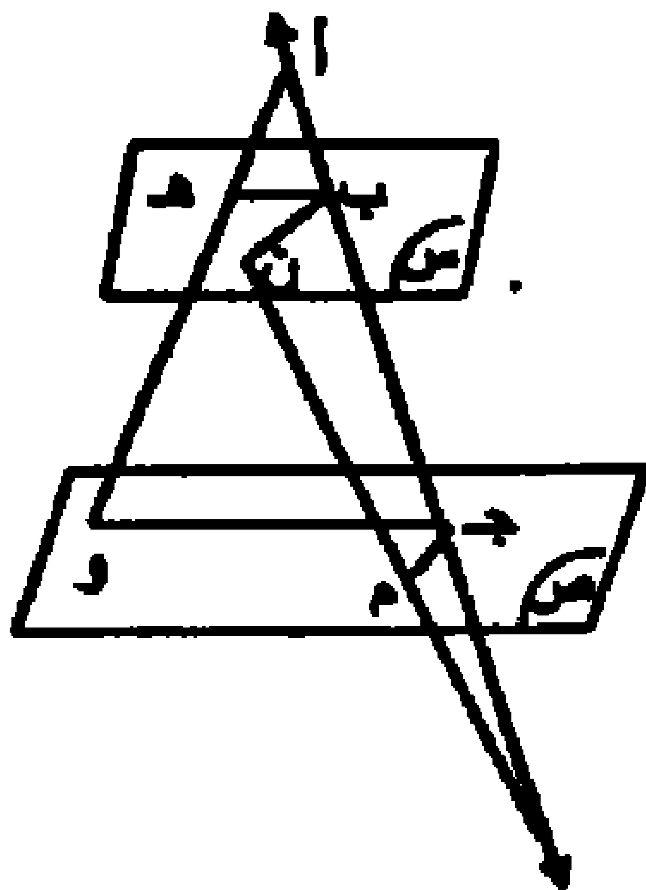


∴ س // ص // ع

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{هـ و}}$ ∴ $\frac{1}{2} = \frac{\text{ء هـ}}{3}$

∴ ء هـ = ٦ سم

(٨)



∵ المستوى أ جـ و قطع

المستويين المتوازيين

س، ص في ب هـ ، جـ و

∴ ب هـ // جـ و

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{جـ و}} = \frac{1}{3}$ —— (١)

∵ المستوى ء ب ن قطع المستويين المتوازيين س،

ص في جـ م ، ب ن ∴ جـ م // ب ن

∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{جـ ء}} = \frac{\text{ب ن}}{\text{جـ م}} = \frac{8}{5}$ —— (٢)

∴ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{جـ و}} \times \frac{\text{ب ن}}{\text{جـ م}} = \frac{2}{5}$

∴ ٥ ب هـ . ب ن = ٢ جـ و . جـ م

(١) [أ] أأَ ⊥ المستوى أ ب جـ ء

[ب] ءأَ ⊥ المستوى أ ب بَ أَ

[ج] بَ أَ ⊥ المستوى أ ء ءَ أَ

[ء] ∵ أأَ ⊥ المستوى أ ب جـ ء

∴ أأَ ⊥ أ مستقيم فيه

∴ أأَ ⊥ ب ء ∴ أأَ ⊥ بَ ءَ

(٢) ب جـ² = أ ب² + أ جـ²

م جـ² = أ م² + أ جـ²

∴ Δ م أ جـ قائم ∴ أ جـ ⊥ أ م

∵ أ جـ ⊥ أ ب ∴ أ جـ ⊥ كل من أ م ، أ ب

∴ أ جـ ⊥ المستوى أ م ب

أ جـ ⊥ المستوى أ م ب

(٣) أ ب جـ يطابق Δ ء ب جـ

ء ب = أ جـ ، ب جـ مشترك

فيهما ق(∠ أ ب جـ) = ق(∠ ء ب جـ) = ٩٠°

، ∵ ب جـ ⊥ أ ب ، ب جـ ⊥ ء ب

∴ ب جـ ⊥ كل من أ ب ، ء ب

∴ ب جـ ⊥ المستوى أ ب ء

، ∴ ب جـ ⊥ المستوى أ ب و

، في Δ أ ب ء: ب أ = ب ء

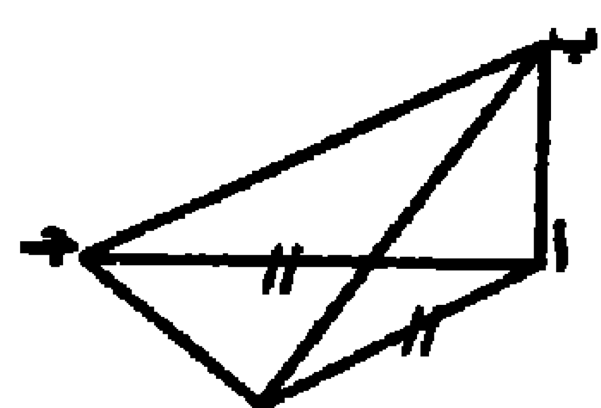
ب هـ تنصف أ ء في هـ ∴ ب هـ ⊥ أ ء

∴ ب هـ ⊥ أ ء ـــ (١)

∵ ب جـ ⊥ المستوى أ ب ء ∴ ب جـ ⊥ أ ء ـ (٢)

من (١)، (٢) ∴ أ ء ⊥ كل من ب جـ ، ب هـ

∴ أ ء ⊥ المستوى أ ب جـ



(٤) ∵ أ ب ⊥ المستوى أ جـ ء

∴ أ ب ⊥ أ جـ

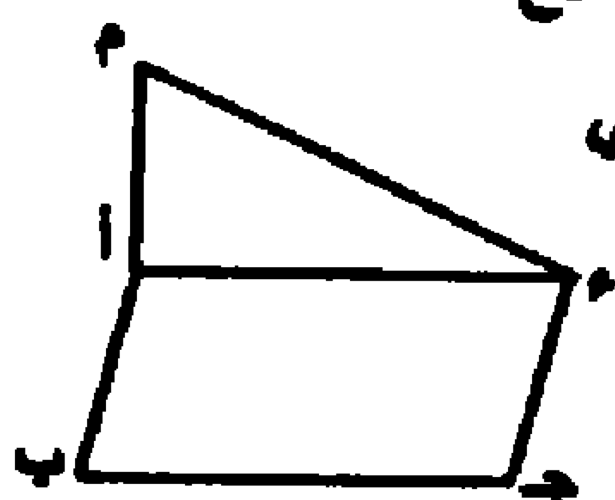
∴ ب جـ = ل√٢ ∵ أ جـ ⊥ المستوى ب أ ء

∴ أ جـ ⊥ أ ء ∴ جـ ء = ل√٢

∴ أ ء ⊥ المستوى ب أ جـ ∴ أ ء ⊥ أ ب

∴ ب ء = ل√٢ ∴ ب جـ = جـ ء = ب ء = ل√٢

∴ Δ ب جـ ء متساوي الأضلاع



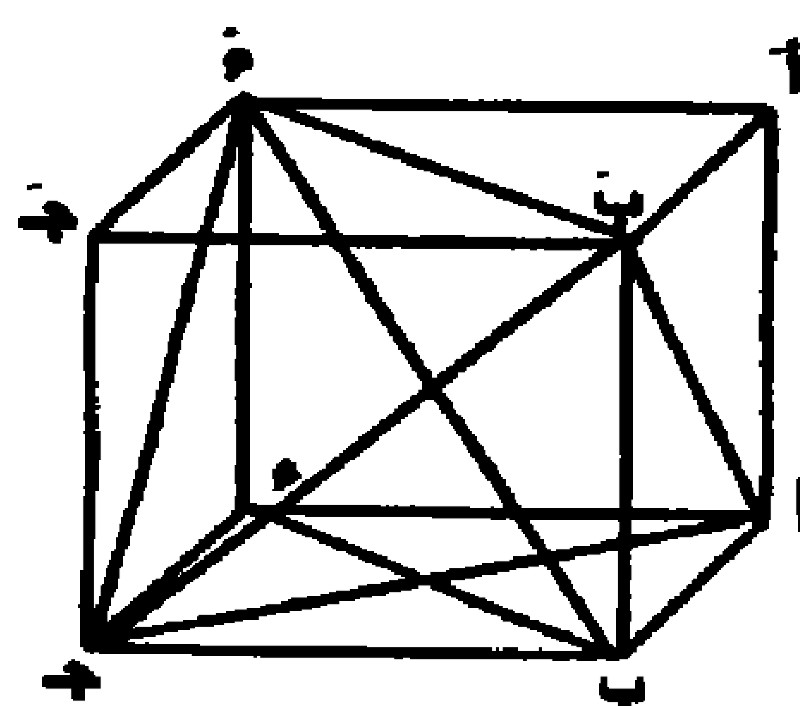
(٥) [أ] م أ ليست عمودية على المستوى أ ب جـ ء لأن م أ ⊥ أ ب الواقعة فيه فقط

[ب] ∵ أ ب ⊥ أ ء ، أ م

∴ أ ب ⊥ المستوى م أ ء

[ج] ء جـ // ب أ ، ب أ ⊥ المستوى م أ ء

∴ ء جـ ⊥ المستوى م أ ء



(٦) ١] من هندسة الشكل

ءَ أ = ءَ جـ

= جـ أ = ل√٢

∴ Δ ءَ أ جـ متساوي الأضلاع

مساحة Δ ءَ أ جـ = $\frac{\sqrt{3}}{4}$ × مربع طول ضلعه

= $\frac{\sqrt{3}}{4}$ × ٢ ل² = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ل²

٢] ∵ أ ب ⊥ ب بَ ، ب جـ من خواص المكعب

∴ أ ب ⊥ الوجه ب جـ جَ بَ ∴ أ ب ⊥ ب جَ

٣] ∵ ءَ ء ⊥ القاعدة أ ب جـ ء ∴ ءَ ء ⊥ أ جـ

أ جـ ⊥ ءَ ء ∴ أ جـ ⊥ ب ء

∴ أ جـ ⊥ كل من ب ء ، ءَ ء

∴ $\overline{أجـ}$ ⊥ المستوى ب ء ء ∴ $\overline{أجـ}$ ⊥ $\overline{ء ب}$

٤) في Δ أ أَ جـ: $أَ جـ^2 = ل^2 + ٢ ل^2 = ٣ ل^2$

∴ أَ جـ = ل $\sqrt{٢}$ ، Δ ء ءَ ب فيه

$(ءَ ب)^2 = \sqrt{ل^2 + ٢ ل^2} = ل\sqrt{٣}$

في Δ بَ ب جـ فيه ب ءَ = ل $\sqrt{٣}$

∴ أَ جـ = ءَ ب = بَ ء = ل $\sqrt{٣}$

(٧)



∵ $\overline{ب جـ}$ ⊥ كل من $\overline{ب بَ}$ ، $\overline{ب أ}$

∴ $\overline{ب جـ}$ ⊥ المستوى أ ب بَ أَ

∵ أَ ب ⊂ للمستوى أ ب بَ أَ

∴ أَ ب ⊥ $\overline{ب جـ}$

في Δ ب جـ ء: $(ب ء)^2 = س^2 + ص^2$

∵ ءَ ء ⊥ المستوى أ ب جـ ء

∴ ءَ ء ⊥ ب ء

في Δ ءَ ء ب: $(ءَ ب)^2 = (ب ء)^2 + (ءَ ء)^2$

$= س^2 + ص^2 + ع^2$

∴ $ءَ ب = \sqrt{س^2 + ص^2 + ع^2}$

∴ طول القطر $= \sqrt{٦٤ + ٣٦ + ٥٧٦} = ٢٦$ سم

(١) ∵ $\overline{جـ م}$ ⊥ المستوى أ ب جـ

∴ $\overline{جـ ب}$ مسقط م ب علي المستوى أ ب جـ

، ∵ $\overline{جـ ب}$ ⊥ $\overline{ب أ}$

∴ م ب ⊥ ب أ (نظرية) <u>أولاً</u>

في Δ م ب أ القائم في ب

∵ ء منتصف $\overline{م أ}$ ∴ ب ء = $\frac{١}{٢}$ أ م —— (١)

، ∵ $\overline{جـ م}$ ⊥ المستوى أ ب جـ ∴ $\overline{جـ م}$ ⊥ جـ أ

∴ م جـ أ قائم الزاوية في جـ

، ∵ ء منتصف أ م ∴ $\overline{جـ ء}$ = $\frac{١}{٢}$ م أ —— (٢)

من (١)، (٢) ∴ ب ء = جـ ء

∴ Δ ء جـ ب متساوي الساقين

(٢) ∵ بء ⊥ المستوى أ ب جـ ∴ $\overline{جـ ب}$ مسقط ءهـ علي المستوى أ ب جـ ، ∵ ء هـ ⊥ $\overline{ب أ}$

∴ $\overline{جـ ب}$ ⊥ $\overline{ب أ}$ ∴ ب هـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب

∴ ب هـ = ٨ سم

، ∵ $\overline{ب ء}$ ⊥ المستوى أ ب جـ ∴ $\overline{بء}$ ⊥ $\overline{ب هـ}$

∴ Δ ء ب هـ قائم الزاوية في ب

∴ $(م ب)^2 = (ء ب)^2 + (ب هـ)^2 = ٢٢٥ + ٦٤$

∴ م ب = ١٧ سم

(٣) $\overline{ب جـ}^2 = (١٥)^2 + (٢٠)^2 = ٦٢٥$ ، ∴ ب جـ = ٢٥

في Δ Δ أ ب ء ، جـ ب أ

$\frac{أ ب}{جـ ب} = \frac{١٥}{٢٥} = \frac{٣}{٥}$ ، $\frac{ب ء}{أ ب} = \frac{٩}{١٥} = \frac{٣}{٥}$

∴ $\frac{أ ب}{جـ ب} = \frac{ب ء}{أ ب}$ ، ∠ب مشتركة ∴ Δ Δ متشابهان

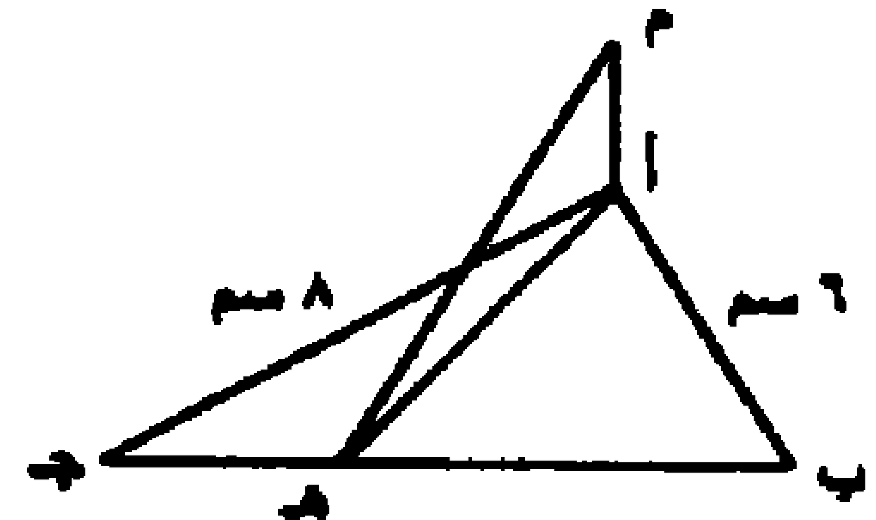
∴ ق(∠أ ء ب) = ق(∠جـ أ ب) = ٩٠

∴ أ ء ⊥ $\overline{ب جـ}$ ، أ ء هو مسقط م ء على مستو Δ أ ب جـ

∴ $\overline{م ء}$ ⊥ ب جـ ، $(أ ء)^2 = (١٥)^2 - (٩)^2 = ١٤٤$

في Δ أ ب ء ∴ أ ء = ١٢ سم ، أ م = أ ء في Δ القائم م أ ء ∴ ق(∠أ ء م) = ٤٥°

(٤)



∵ م أ ⊥ المستوى أ ب جـ ∴ م أ ⊥ أ هـ

، ∵ أ هـ هو مسقط المائل م هـ ، م هـ ⊥ ب جـ

∴ أ هـ ⊥ ب جـ في Δ أ ب جـ

∴ أ ب × أ جـ = ب جـ × أ هـ

∴ أ هـ = $\frac{٨ \times ٦}{١٠}$ = ٤,٨ سم

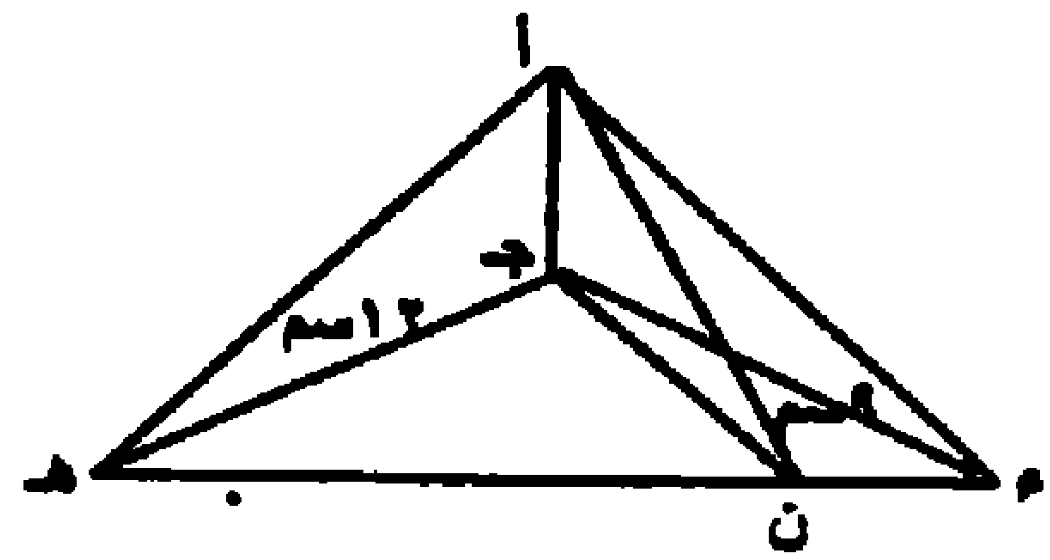
∵ Δ م أ هـ قائم في أ

∴ (م هـ)^2 = (م أ)^2 + (أ هـ)^2

= (٣,٦)^2 + (٤,٨)^2 = ٣٦

∴ م هـ = ٦ سم

(٥)



∵ (ء هـ)^2 = (٩)^2 + (١٢)^2 = ٢٢٥

∴ ء هـ = ١٥ سم

∵ مساحة Δ أ ء هـ = $\frac{١}{٢}$ هـ ء × أ ن

∴ ٩٦ = $\frac{١}{٢}$ × ١٥ × أ ن

∴ أ ن = ١٢,٨

∵ أ جـ ⊥ المستوى جـ ء هـ

∴ أ ن (المائل) ⊥ ء هـ ∴ مسقط جـ ن ⊥ ء هـ

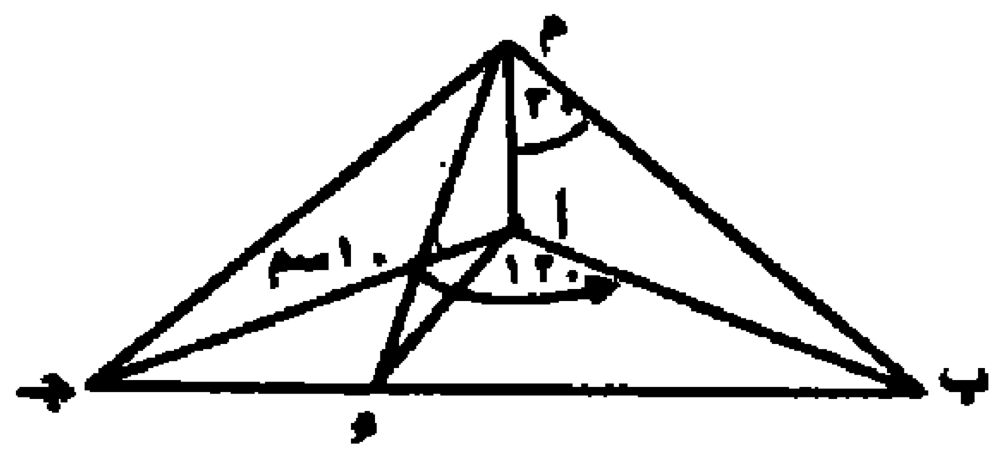
∴ جـ ن = $\frac{١٢ \times ٩}{١٥}$ = ٧,٢

∴ (أ جـ)^2 = (١٢,٨)^2 + (٧,٢)^2 = ١١٢

∴ أ جـ = √١١٢ = ١٠,٥٨

أ هـ = √(١١٢ + ١٤٤) = ١٦

(٦)



∵ م أ ⊥ المستوى ∴ م أ ⊥ أ ب

∴ م أ ب قائم الزاوية ∵ ق(< ب م أ) = ٣٠°

∴ م ب = ٢٠ سم ∴ م أ = ١٠√٣

∵ Δ أ ء ب قائم ، < ب أ ء = ٦٠°

∴ < أ ب ء = ٣٠° ∴ أ ء = ٥ سم

∵ م أ ⊥ المستوى ∴ م ء مائل

∵ مسقط أ ء ⊥ ب جـ ∴ م ء ⊥ ب جـ

∴ م ء يمثل ارتفاع Δ م ب جـ

∵ Δ م أ ء قائم ∴ (م ء)^2 = (١٠√٣)^2 + (٥)^2

∴ م ء = √٣٢٥ ، ∵ ب جـ = ١٠√٣

∴ مساحة Δ م ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٠√٣ × √٣٢٥

(٧) **أولاً** : (أ) ∵ ن أ ⊥ المستوى أ ب جـ ء

∵ ن أ ⊥ ب ء —— (١)

∴ القطران في المربع متعامدان

∴ أ جـ ⊥ ب ء —— (٢)

من(١) ، (٢) ∵ ب ء ⊥ كل من م أ ، أ ن

∴ ب ء ⊥ المستوى ن أ م

(ب) ∵ أ ب ⊥ ب جـ ، أ ب مسقط المائل ن ب

∴ ن ب ⊥ ب جـ

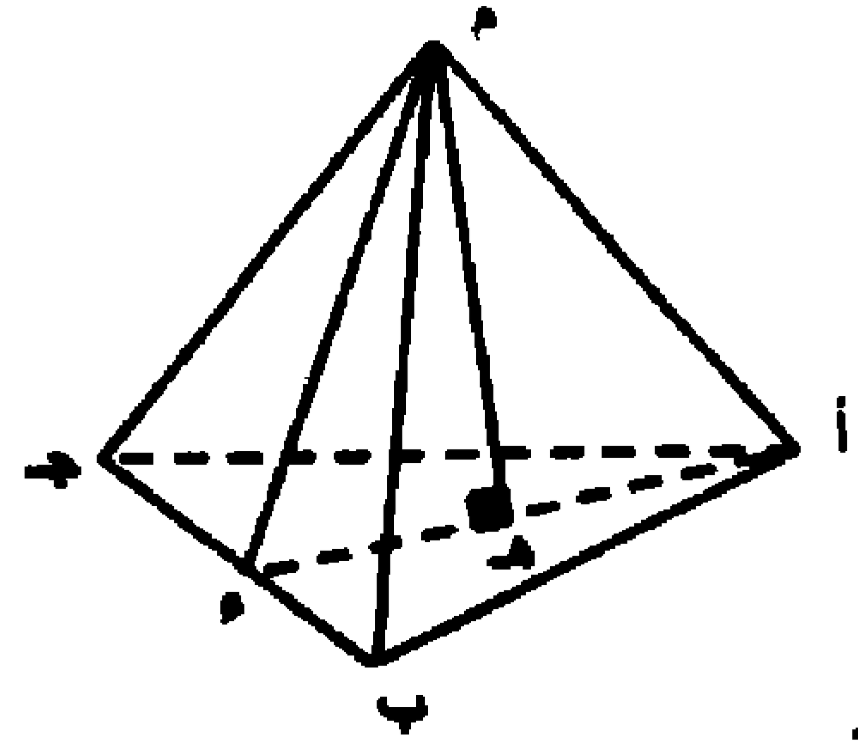
ثانياً: في Δ ن أ ب ق(< أ) = ٩٠°

∴ (ن ب)^2 = (ن أ)^2 + (أ ب)^2 = (٥)^2 + (١٢)^2

= ٢٥ + ١٤٤ = ١٦٩

∴ ن ب = ١٣ سم

(٨)



∵ م أ ⊥ كل من م ب ، م جـ

∴ م أ ⊥ المستوى م ب جـ **أولاً**

∴ م أ ⊥ م ء لأن م ء ⊂ المستوى م ب جـ

∵ م هـ ⊥ المستوى أ ب جـ ∴ م هـ ⊥ أ ء

∴ Δ م أ ء قائم في م ∴ م هـ ⊥ أ ء

∴ Δ (م هـ)² = أ هـ . ء هـ **ثانياً**

، ∵ م أ ⊥ المستوى م ب جـ

∴ م أ ⊥ ب جـ

∵ أ هـ مسقط أ م على المستوى أ ب جـ

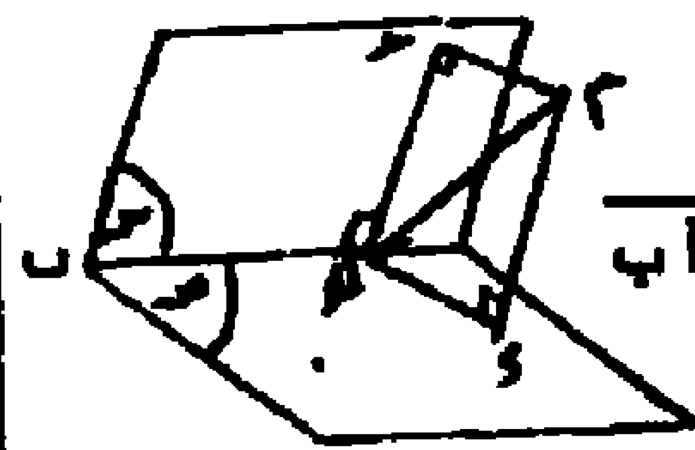
∴ أ هـ ⊥ ب جـ ∴ أ ء ⊥ ب جـ

، ∵ ء هـ مسقط م ء على المستوى أ ب جـ

، ء هـ ⊥ ب جـ ∴ م ء ⊥ ب جـ

حلول تمارين (٧)

(١) نرسم م هـ



∵ جـ هـ مسقط م هـ

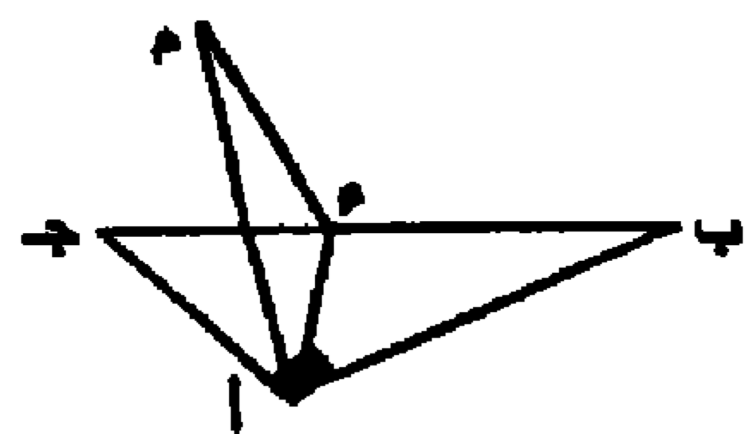
على س، ∵ جـ هـ ⊥ أ ب

∴ م هـ ⊥ أ ب

، ء هـ مسقط م هـ على ص

، ∵ م هـ ⊥ أ ب ∴ ء هـ ⊥ أ ب

(٢)



نفرض أن أ جـ = ل

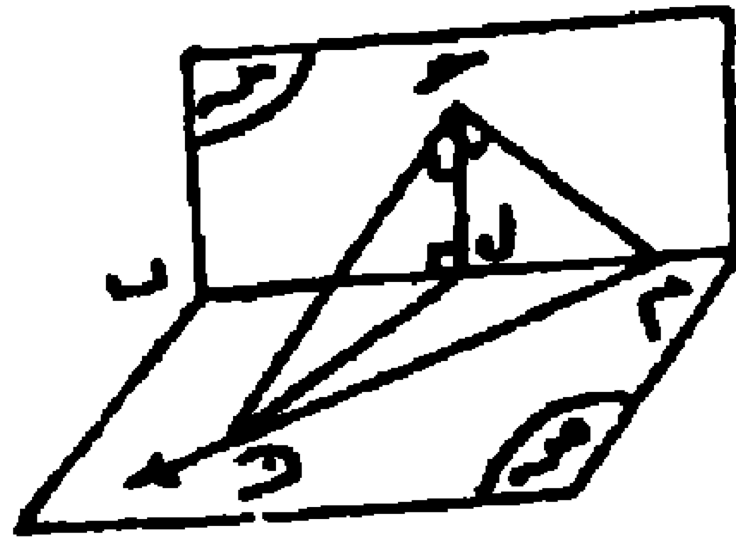
∴ أ ب = ٢ ل ∴ (ب جـ)² = ل² + ٤ل² = ٥ل²

∴ ب جـ = ل√٥ ، ء أ مسقط م ء

، ∵ م ء ⊥ ب جـ ∴ ء أ ⊥ ب جـ

، ∵ ق(< أ) = ٩٠° ∴ (ب أ)² = ب ء × ب جـ

(٣) ∵ ن جـ ⊥ س



∴ ن جـ ⊥ جـ م

، ن جـ ⊥ جـ ل

، جـ ل مسقط ن ل

∴ جـ ل ⊥ أ ب ∴ ن ل ⊥ أ ب

∴ جا(<ن م ل) × جا(<ن ل جـ)

$= \frac{ن ل}{ن م} \times \frac{جـ ن}{ن ل} = \frac{جـ ن}{ن م}$ ، جا(<ن م جـ) $= \frac{جـ ن}{ن م}$

(٤) ى ك مسقط ط ك

∵ ط ك ⊥ م ص

∴ ى ك ⊥ م ص

بالمثل ى ع ⊥ م س

∴ زوايا المضلع م ع ى ك قوائم

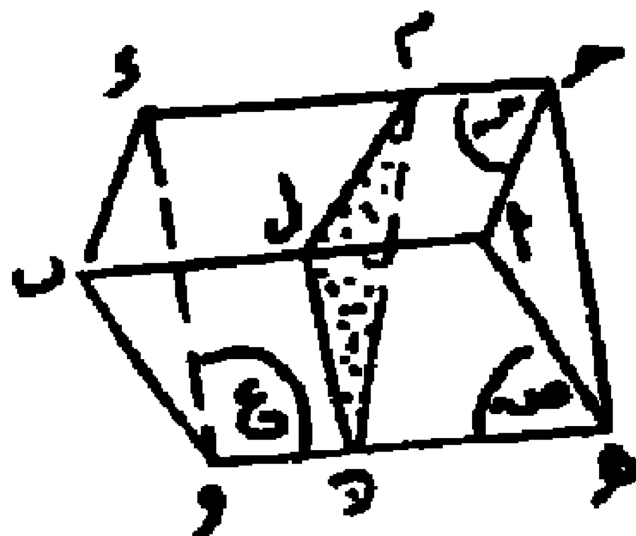
، ع م = م ك = ١٠ جتا ٦٠° = ٥ سم

∴ م ع ى ك مربع ∴ ى م = ٥√٢ سم

∴ جتا(<ط م ى) $= \frac{٥\sqrt{٢}}{١٠} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

∴ ق(<ط م ى) = ٤٥°

(٥)



∵ أ ب // ع

∴ أ ب // جـ ء

وبالمثل $\overline{أب} \parallel \overline{هـ و}$ $\therefore$ $\overline{جـ ء} \parallel \overline{هـ و}$

نرسم مستو عمودياً على أ ب فيكون عمودياً

على $\overline{جـ ء}$ ، $\overline{هـ و}$ ويقطعها في ل ، م ، ن

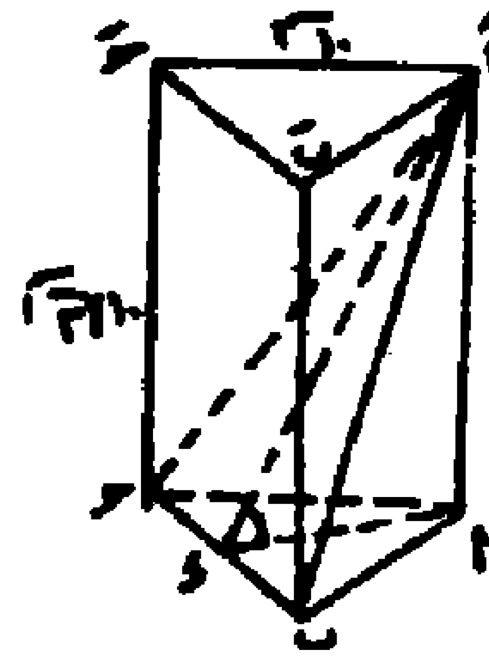
ويكون $\overline{أ ب} \perp$ كل من $\overline{ل م}$ ، $\overline{ل ن}$

، $\overline{جـ ء} \perp$ كل من $\overline{ن ل}$ ، $\overline{ن م}$

$\therefore$ الزوايا ل، م ، ن هى الزوايا المستوية

لمقاييس الزوايا الزوجية ومجموع قياساتها = ١٨٠°

(٦) $\because$ $\overline{أ أ'} \perp$ مستوى القاعدة



$\therefore$ $\overline{أ أ'} \perp \overline{أ جـ}$

$\therefore$ ظا (< أ' جـ أ) = $\frac{١٠\sqrt{٣}}{١٠}$

$= \sqrt{٣}$

$\therefore$ ق (< أ' جـ أ) = ٦٠°

نرسم $\overleftrightarrow{أ ء} \perp \overline{ب جـ}$ يقطعه في ء ثم نرسم أ' ء

$\because$ $\overline{أ ء} \perp \overline{ب جـ}$ $\therefore$ ء منتصف ب جـ

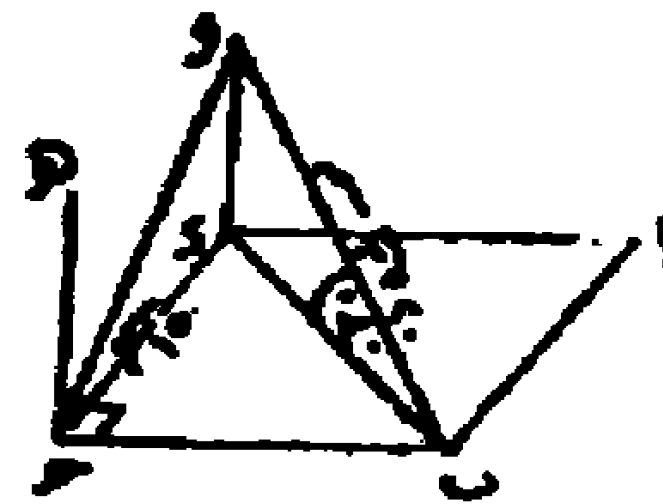
، $\because$ أ ب = أ جـ $\therefore$ $\overline{أ' ء} \perp \overline{ب جـ}$

$\therefore$ ق(< أ ـ $\overleftrightarrow{جـ ب}$ ـ أ') = ق(< أ' ء أ)

، $\because$ أ ء = ١٠ جا ٦٠° $\therefore$ أ ء = $٥\sqrt{٣}$

$\therefore$ ظا (< أ' ء أ) = $\frac{أ أ'}{أ ء} = \frac{١٠\sqrt{٣}}{٥\sqrt{٣}} = ٢$

(٧)



نرسم $\overline{ء ب}$ ، $\overline{و جـ}$

$\overline{ب ء}$ مسقط $\overline{ب و}$

ب ء = $٢٠\sqrt{٣}$ جتا ٣٠° = ٣٠ سم

$\because$ $\overline{ء و} \perp$ مستوى المستطيل

$\therefore$ $\overline{ء و} \perp \overline{ب ء}$ ، $\overline{ء و} \perp \overline{ء جـ}$

$\therefore$ < ب ء جـ هى الزاوية المستوية لمقياس الزاوية

الزوجية حيث :

جتا (< ب ء جـ) = $\frac{١٥}{٣٠} = \frac{١}{٢}$

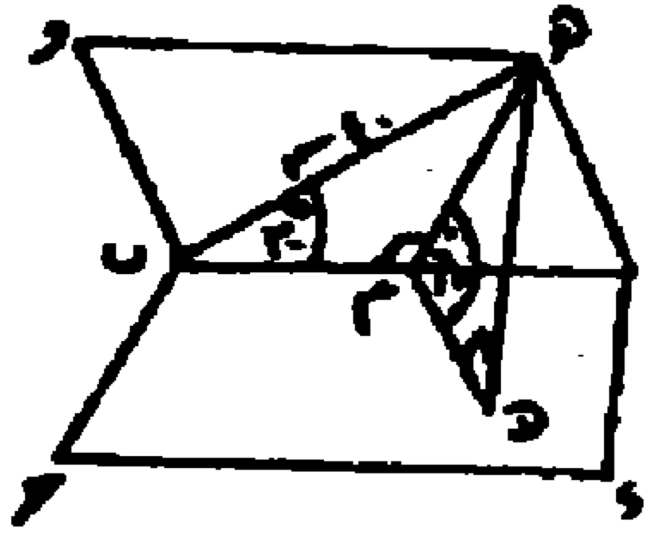
$\therefore$ ق (< ب ء جـ) = ٦٠°

$\because$ ء و = $٢٠\sqrt{٣}$ جا ٣٠° = $١٠\sqrt{٣}$ سم

$\therefore$ م (Δ ب ء و) = $\frac{١}{٢}$ × ٣٠ × $١٠\sqrt{٣}$

= $١٥٠\sqrt{٣}$ سم^٢

(٨)



نرسم $\overleftrightarrow{هـ م} \perp \overline{أ ب}$

يقطعه في م ــ ثم نرسم

$\overline{م ن}$ وهو مسقط $\overline{هـ م}$

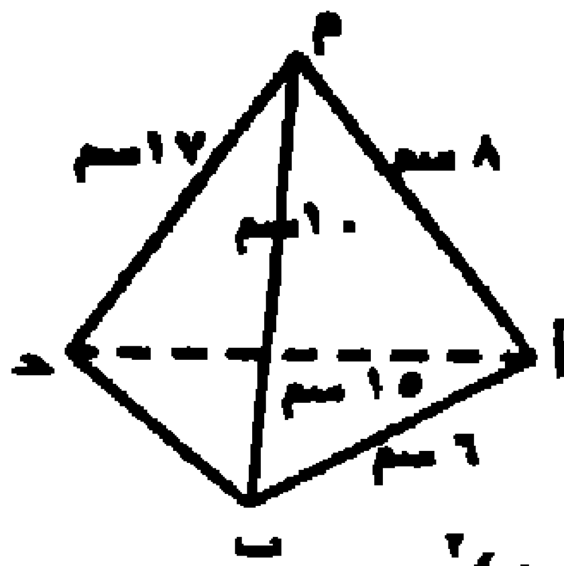
$\therefore$ $\overline{م ن} \perp \overline{أ ب}$

$\therefore$ ق (< هـ م ن) = ٦٠°

، هـ م = ٤٠ جا ٣٠ = ٢٠ سم ، هـ ن = هـ م جا ٦٠°

$\therefore$ هـ ن = ٢٠ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = $١٠\sqrt{٣}$ سم

(٩) (م أ)^٢ + (أ ب)^٢ = ٦٤+٣٦



= ١٠٠ = (م ب)^٢

$\therefore$ $\overline{م أ} \perp \overline{أ ب}$

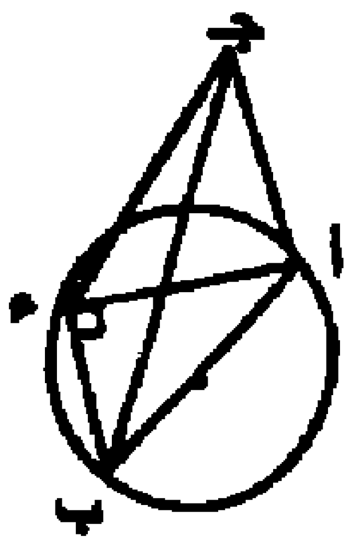
بالمثل (م أ)^٢+ (أ جـ)^٢ = (م جـ)^٢

$\therefore$ $\overline{م أ} \perp \overline{أ جـ}$ $\therefore$ $\overline{م أ} \perp$ المستوى أ ب جـ

$\because$ $\overleftrightarrow{م أ}$ محتوى في كل من المستويين م أ ب ، م أ جـ

$\therefore$ كل من المستويين م أ ب ، م أ جـ $\perp$ المستوى أ ب جـ

(١٠) $\overline{أ ب}$ قطر $\therefore$ $\overline{ب ء} \perp \overline{أ ء}$



، $\because$ $\overline{أ جـ} \perp$ مستوى الدائرة

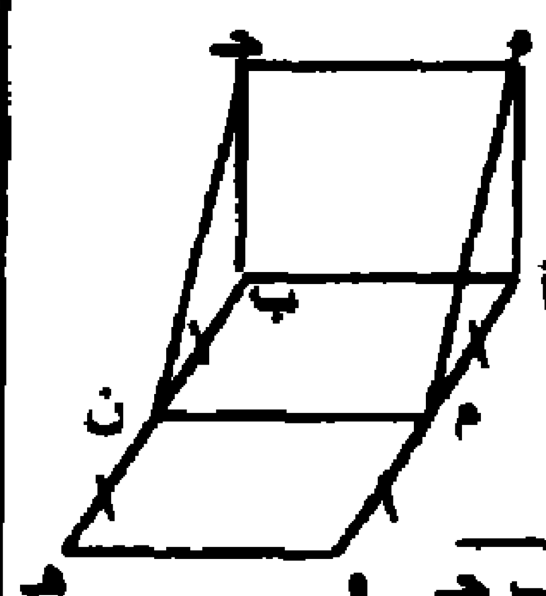
$\therefore$ $\overline{أ جـ} \perp \overline{ب ء}$

$\therefore$ $\overline{ب ء} \perp$ المستوى جـ أ ء

، ∵ $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ محتوى في المستوى ب ء جـ

∴ المستوى ب ء جـ ⊥ المستوى جـ أ ء

(١١) $\overline{\text{م ن}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{ء جـ}}$



∴ $\overline{\text{م ن}}$ // $\overline{\text{ء جـ}}$

، م ن = أ ب = ء جـ

∴ جـ ء م ن متوازي أضلاع

∵ $\overline{\text{أ ب}}$ ⊥ $\overline{\text{ب هـ}}$ ، $\overline{\text{أ ب}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ $\overline{\text{أ ب}}$ ⊥ المستوى جـ ب ن

∴ $\overline{\text{أ ب}}$ ⊥ $\overline{\text{ن جـ}}$ ∴ $\overline{\text{م ن}}$ ⊥ $\overline{\text{ن جـ}}$

∴ جـ ء م ن مستطيل

∵ $\overline{\text{ب جـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ء جـ}}$ ، $\overline{\text{ن جـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ء جـ}}$

∴ < ب جـ ن هي الزاوية المستوية لمقياس الزاوية الزوجية ، ظا (ب جـ ن) = $\frac{\text{ب ن}}{\text{ب جـ}} = \frac{١}{٢}$

(١٢) نرسم $\overleftrightarrow{\text{هـ م}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$

يقطعه في م حيث م منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ثم نرسم $\overline{\text{م و}}$

$\overline{\text{و م}}$ مسقط $\overline{\text{هـ م}}$

∴ $\overline{\text{و م}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$

∴ ق(< و ـ م ب ـ هـ) = ق(< هـ م و) = ٦٠°

∴ م و = $\frac{١}{٢}$ م هـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب

∴ $\overline{\text{أ و}}$ ⊥ $\overline{\text{و ب}}$ ، ∵ $\overline{\text{أ و}}$ ⊥ $\overline{\text{هـ و}}$

∴ $\overline{\text{أ و}}$ ⊥ المستوى ب هـ و

∴ المستوى هـ و أ ⊥ المستوى هـ و ب

(١٣) $\overline{\text{أ ء}}$ ⊥ المستوى س

∴ $\overline{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب ء}}$

، ∵ ق(< أ ب ء) = ٤٥°

∴ أ ء = ب ء ، أ جـ = ب جـ

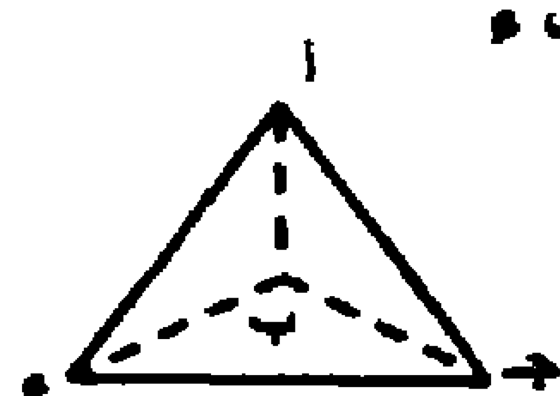
، $\overline{\text{ء جـ}}$ مشترك ∴ Δ أ ء جـ ≡ Δ ب ء جـ

∴ ق (< ب ء جـ) = ق(أ ء جـ) = ٩٠°

∴ $\overline{\text{جـ ء}}$ ⊥ المستوى أ ب ء

∴ المستوى أ ء ب ⊥ أ ء جـ

(١٤) ∵ المستويين أ ب جـ ، أ ب ء متقاطعان في $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ وعموديان علي المستوى ب جـ ء



∴ $\overline{\text{أ ب}}$ ⊥ المستوى ب جـ ء

∴ $\overline{\text{أ ب}}$ ⊥ $\overline{\text{جـ ب}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$

∴ (أ ب)^٢ = (أ جـ)^٢ - (جـ ب)^٢ = (أ ء)^٢ - (ب ء)^٢

∴ (أ جـ)^٢ - (أ ء)^٢ = (جـ ب)^٢ - (ب ء)^٢

(١٥) ∵ $\overline{\text{ن م}}$ ⊥ مستوى الدائرة

∴ $\overline{\text{ن م}}$ ⊥ $\overline{\text{جـ أ}}$ ، نصف القطر

$\overline{\text{م أ}}$ ⊥ المماس $\overleftrightarrow{\text{جـ أ}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{جـ أ}}$ ⊥ المستوى م أ ن

والمستوى ن جـ ب مار به

∴ المستوى ن جـ ب ⊥ المستوى م أ ن

ثالثاً : إجابة تمارين التفاضل والتكامل

حلول تمرين (١)

(١) نهاس ← (١)$^+$ د، (س) = نهاس ← ١$^+$ ٣ = ٣

نها د، (س) = نها س ← (١)$^-$ س + ٢ = ٣

∴ للدالة نهاية عندما س = ١

∴ نهاس ← ١ د(س) = ٣

(٢) نهاس ← -٢$^+$ د،(س) = نهاس ← -٢$^+$ ٢س+٣= -١

نهاس ← -٢$^+$ د،(س) = نهاس ← -٢$^+$ س^٢ +٢ = ٦

∴ الدالة ليس لها وجود

(٣) نهاس ← ١$^+$ د،(س) = ٣

نهاس ← ١$^-$ د،(س) = ٣

∴ نهاس ← ١ د(س) = ٣

(٤) نهاس ← ٢$^-$ د،(س) = ١

نهاس ← ٢$^+$ د، (س) = ٣

∴ الدالة ليس لها وجود

(٥) نهاس ← (١)$^-$ د(س) = ٣، نهاس ← (١)$^+$ د(س) = ٣

∴ نهاس ← ١ د (س) = ٣

(٦) نهاس ← (٠)$^-$ د(س) = -١، نهاس ← (٠)$^+$ د(س) = ١

∴ الدالة ليس لها وجود

(٧) مجال الدالة (-١، ٧) يوجد نهاية للدالة عند س = ٣، ٥ ، نها د(٢) ليس لها وجود ، ولا يمكن إيجاد النهاية لعدم معرفة سلوك الدالة في القيم أقل من -١ - لا توجد س فى النطاق كذلك عند د(٧)

(٨) د(٣)$^-$ = نهاس ← ٣$^-$ (س - ٣) × نها $\frac{\text{جا (س-٣)}^٢}{\text{(س - ٣)}^٢}$

= ٠ × ١ = ٠

د (٣)$^+$ = نهاس ← ٣$^+$ (س - ٣) × نها $\frac{\text{جا (س-٣)}^٢}{\text{(س - ٣)}^٢}$

= ٠ × ١ = ٠

∴ د(٣)$^-$ = د (٣)$^+$ ∴ نهاس ← ٣ د(س) = صفر

(٩) د(٠)$^-$ = نها $\frac{\text{ظا س}}{\text{س}}$ - نها $\frac{\text{٥ س}}{\text{س}}$ = $\frac{١ - ٥}{٣ + ١}$ = -١

نهاس ← ٠ $\frac{\text{س×٠}}{\text{س}}$ + نهاس ← ٠ $\frac{\text{جا س}}{\text{س}}$

، د(٠)$^+$ = نهاس ← ٠ (٣س - ١) = -١

∴ نهاس ← ٠ د(س) = -١

(١٠) د(-١)$^-$ ليس لها وجود، د(-١)$^+$ = نها (٥-٢س)=٧

∴ د(س) =٧ ، د(٢)$^-$ = ١ ، د(٢)$^+$ = -١٣

∴ لا يوجد نهاية عند س = ٢ ، د(٥)$^+$ ليس لها وجود ، د(٥)$^-$ = $\frac{١٣}{٨}$.

حلول تمرين (٢)

(١) نها س ← (١)$^+$ د،(س) = ٢×١ = ٢

نها س ← (١)$^-$ د، (س) =١-١ +٢ = ٢

∴ نهاس ← ١$^+$ د، (س) = نهاس ← ١$^-$ د، (س)

(٢) نعيد تعريف الدالة بدون مقياس

∴ د(س) = $\frac{\text{(س-٣) (س-٤)}}{\text{(س-٣)}}$ ∴ د(س)= س-٤

س > ٤ ، د(س) = ١ س = ٣

د(س) = -(س-٤) ٣< س< ٤

نهاس ← ٣$^+$ د(س) = نهاس ← ٣$^+$ (-س+ ٤) = ١

نهاس ← ٣$^-$ د(س) = -١ ، د(٣) = ١

∴ نها د(س) ≠ د (٣) الدالة غير متصلة من اليسار ، نهاس←٣ د(س) = د (٣)

(٣) نهاس←-١ س(س+١) / ((س+١)(س^{٢} - س+١)) = -١/٣

∴ ك = -١/٣

(٤) د(٣) = ٦ ∈ ح

∴ نهاس←٣ (س^{٢} - ٩)/(س - ٣) = ٦ = د(٣)

∴ د(س) متصلة عند س = ٣

(٥) د(٤) = ١/٣ ∈ ح

نهاس←٤ (√(٢س+١) - ٣)/(س - ٤) × (√(٢س-١) + ٣)/(√(٢س-١) + ٣)

= نهاس←٤ ٢/(√(٢س+١) + ٣) = ١/٣

∴ الدالة متصلة

(٦) نهاس←٢ (س^{٢} - ٤)/(٢س - ٤) = نهاس←٢ (س + ٢)/٢ = ٢

∴ ك = ٢

(٧) د(٢) = ٤ ∈ ح ، نهاس←٢$^{+}$ د(س) = ٢أ + ٢

∵ الدالة متصلة ∴ ٤ = ٢أ + ٢ ∴ أ = ١

(٨) د(س) = { س^{٢}/|س| ، (س > ٠) ؛ س^{٢}/-س ، س < ٠ }

= { س ، س > ٠ ؛ -س ، س < ٠ }

د(س) غير معرفة عند س = ٠ ∴ غير متصلة

د(س) = س^{٢} - |س|

∴ د(س) = { س^{٢} - س ، س ≥ ٠ ؛ س^{٢} + س ، س < ٠ }

نهاس←٠$^{+}$ (س^{٢} + س) = ٠ + ٠ = ٠

د(٠) = ٠ ∴ الدالة متصلة عند س = ٠

(٩) د(١)$^{-}$ = د(١) = ٢

نهاس←١$^{-}$ (س^{٢} + ب س + ٣)

= نهاس←١$^{+}$ (أس + ب) = ٧

∴ ٤ + ب = ٧ ، أ + ب = ٧

∴ ب = ٣ ، أ = ٤

(١٠) د(٣) = ٩ - ٩ + ٢ = ٢

، د(٣$^{-}$) = نهاس←٣ (س^{٢} - ٣س + ٢) = ٢

، د(٣)$^{+}$ = ٢ ∴ د متصلة عند س = ٣ ، د(٤) = ٢

د(٤$^{-}$) = ٢ ، د(٤$^{+}$) = ٢ ∴ الدالة متصلة

(١١) الدالة متصلة عند س = م

نهاس←م د(س) = ٧/٣ (م)^{٢} = ٢٨/٣

∴ م^{٢} = ٤ ∴ م = ± √٢

(١٢) د(س) = { (س - ٤)/(س + ٤) ؛ -٥/٣ } نهاس←-١ = -٥/٣ = د(-١)

∴ الدالة متصلة

حلول تمرين (٣)

(١) ∵ الدالة متصلة ∴ $د(٢^{-}) = د(٢^{+}) = د(٢)$

∴ $١ - \frac{١}{٤} \times ٢ = \frac{أ}{٢}$ ∴ $أ = ١$

$د'(٢^{-}) = \text{نها}_{هـ \leftarrow ٠^{-}} \frac{١ - \frac{١}{٤}(٢ + هـ) - \frac{١}{٢}}{هـ} = -\frac{١}{٤}$

$د'(٢^{+}) = \text{نها}_{هـ \leftarrow ٠^{+}} \frac{\frac{١}{٢ + هـ} - \frac{١}{٢}}{هـ} = -\frac{١}{٤}$

∴ $د'(٢^{-}) = د'(٢^{+})$ ∴ الدالة قابلة للإشتقاق

(٢) ∵ الدالة متصلة عند $س = ٢$

∴ $د(٢^{-}) = د(٢^{+}) = د(٢) = ٥$

$د(٢^{-}) = ٤ + ٢أ - ١ = ٥$ ∴ $أ = ١$

، $د(٢^{+}) = أ + ٢ب = ٥$ ∴ $ب = ٢$

$$∴ د(س) = \begin{cases} س^{٢} + س - ١ & \text{عندما } س < ٢ \\ ٥ & \text{عندما } س = ٢ \\ ١ + ٢س & \text{عندما } س > ٢ \end{cases}$$

∴ $د'(٢^{-}) = \text{نها}_{هـ \leftarrow ٠^{-}} \times$

$\frac{(٢ + هـ)^{٢} + (٢ + هـ) - ١ - ٥}{هـ} = \text{نها}_{هـ \leftarrow ٠^{-}} ٥ + هـ = ٥$

، $د'(٢)^{+} = \frac{٢ هـ}{هـ} = ٢$

، ∵ $د'(٢^{+}) \neq د'(٢^{-})$

∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق

(٣) ∵ الدالة متصلة عند $س = ١$ ∴ $د(٢^{-}) = د(٢^{+})$

∴ $١ + أ = ٢ \Leftarrow أ = ١$

، $د'(١^{+}) = \text{نها}_{هـ \leftarrow ٠^{+}} \frac{(١ + هـ) + ١ - ٢}{هـ} = ١$

$د'(١^{-}) = -١$ ∴ $د'(١^{+}) \neq د'(١^{-})$

∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق

(٤) ∵ الدالة قابلة للاشتقاق ∴ $د'(١^{+}) = د'(١^{-})$

∴ $٢ = ٢أ$ ∴ $أ = ١$

∵ الدالة قابلة للاشتقاق فإنها تكون متصلة عند

النقطة $س = ١$ ∴ $د(١^{+}) = د(١^{-})$

∴ $صفر = ٢أ + ب$ ∴ $ب = -٢$ ∴ $أ = ١$

(٥) $د(١^{-}) = ٢$ ، $د(١^{+}) = ٢$ ∴ $د(١) =$

$د(١^{-}) = د(١)$ ∴ الدالة متصلة عند $س = ١$

∴ $د'(١^{-}) = \text{نها}_{هـ \leftarrow ٠^{-}} \frac{(١ + هـ)^{٢} + ١ - ٢}{هـ} = ٢$

$د'(١^{+}) = \text{نها} \frac{١ + هـ + ١ - ٢}{هـ} = ١$

∴ الدالة متصلة وغير قابلة للإشتقاق

(٦) $د(١) = ١ = د(١^{-})$ ، $د(١^{+}) = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} = ١$

∴ $\text{نها}_{س \leftarrow ١} د(س) = ١ = د(١)$ ∴ الدالة متصلة

$د'(١^{-}) = \text{نها}_{هـ \leftarrow ٠^{-}} \frac{١ + هـ - ١}{هـ} = ١$ ،

، $د'(١^{+}) = \text{نها}_{هـ \leftarrow ٠^{-}} \frac{\frac{١}{٢} + هـ + \frac{١}{٢}هـ^{٢} + \frac{١}{٢} - ١}{هـ} = ١$

∴ $د'(١^{-}) = د'(١^{+})$

∴ الدالة قابلة للاشتقاق عند $س = ١$

$$، د'(س) = \begin{cases} ١ & س \leq ١ \\ س & س > ١ \end{cases}$$

، $د''(١^{-}) = \text{نها}_{هـ \leftarrow ٠^{-}} \frac{١ - ١}{هـ} = صفر$

$د''(١^{+}) = \text{نها} \frac{١ + هـ - ١}{هـ} = ١$

∴ $د''(١^{-}) \neq د''(١^{+})$

∴ الدالة غير قابلة للإشتقاق مرة ثانية

(٧) ∵ الدالة قابلة للاشتقاق مرتين عن س = ١

فهي متصلة عند س = ١ أي $\underset{س \leftarrow ١}{نها}$ د(س)

= $\underset{س \leftarrow ١^-}{نها}$ = د(١) = ١

، ∵ د(س) = أ $س^٢$ + ب + جـ = ١

∴ أ + ب + جـ = ١ —— (١)

، ∵ د(س) = $\begin{cases} س^٣ & س < ١ \\ أس^٢ + ب س + جـ & س \geq ١ \end{cases}$

∴ دَ(س) = $\begin{cases} ٣س & س < ١ \\ ٢ أ س + ب & س > ١ \end{cases}$

∵ الدالة قابلة للاشتقاق عند س = ١

∴ $\underset{هـ \leftarrow ٠^-}{نها}$ $\frac{د(١+هـ) - د(١)}{هـ}$ = $\underset{هـ \leftarrow ٠^+}{نها}$

∴ $\underset{هـ \leftarrow ٠^-}{نها}$ $\frac{(١+هـ)^٣ - ١}{(١+هـ) - ١}$ = $\underset{هـ \leftarrow ٠^+}{نها}$ د(س)

∴ ٣ = نها $\frac{أ+ب+جـ+٢أهـ+أهـ^٢+ب هـ - ١}{هـ}$

ولكن من (١) أ + ب + جـ = ١

∴ ٣ = $\underset{هـ \leftarrow ٠^+}{نها}$ $\frac{١+٢أهـ+أهـ^٢+ب هـ - ١}{هـ}$

٣ = نها $\frac{هـ(٢أ+أهـ+ب)}{هـ}$

∴ ٣ = ٢ أ + ب ∴ ٢أ + ب = ٣ —— (٢)

وتكون دَ(س) = $\begin{cases} ٣س^٢ & س < ١ \\ ٣ & س = ١ \\ ٢أس + ب & س > ١ \end{cases}$

لأن دَ(س) قابلة للاشتقاق عند س = ١

وتكون دَ(س) متصلة عند س = ١

، دً(١) = $\underset{هـ \leftarrow ٠^-}{نها}$ $\frac{٣(١+هـ)^٢ - ٣}{هـ}$

= $\underset{هـ \leftarrow ٠^+}{نها}$ $\frac{٢أ(١+هـ)+ب-٣}{هـ}$

∴ ٢أ = ٦ ∴ أ = ٣ بالتعويض في (٢)

∴ ٦ + ب = ٣ ∴ ب = -٣

بالتعويض في (١) ∴ ٣ - ٣ + جـ = ١

∴ جـ = ١

(٨) بحث اتصال الدالة عند س = ١

د(١) = ١ ، د(١^-) = ١ ، د(١^+) = ١

∴ $\underset{س \leftarrow ١}{نها}$ د(س) = ١ = د(١) ∴ الدالة متصلة

بحث الاشتقاق : دَ(١^-) = صفر

، دَ(١^+) = صفر ∴ الدالة قابلة للاشتقاق

عند س = ١ ، دَ(١) = ٠

(٩) د(١) = ٢$(١)^٢$ - ٣ = -١

∴ دَ(١^-) = $\underset{هـ \leftarrow ٠^+}{نها}$ $\frac{هـ(٤+٢هـ)}{هـ}$ = ٤ —— (١)

دَ(١^-) = ٤ ∴ الدالة قابلة للاشتقاق

∴ فهي متصلة عند س = ١

(١٠) بالقسمة المطولة ينتج أن :

د(س) = $\frac{(س-٣)(س^٢+٢س+١)}{س-٣}$

= $س^٢$+٢س+١ ، $\underset{س \leftarrow ٣}{نها}$ $س^٢$+٢س+١ = ١٦

∴ أ = ١٦ ∴ د(س) = $س^٢$+٢س+١

دَ(س) = ٢س+٢ ∴ دَ(٣) = ٨

د(٣) = ١٦ ∴ النقطة (٣، ١٦)

∴ ميل العمودى = - $\frac{١}{٨}$ ∴ معادلة العمودى

ص - ١٦ = - $\frac{١}{٨}$ (س - ٣)

٨ ص + س = ١٣١

(١) $٢س + ٢ص \frac{ءص}{ءس} - ٥ + ٣ \frac{ءص}{ءس} = ٠$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{٥ - ٢س}{٢ص + ٣}$

(٢) $٢س + (س \frac{ءص}{ءس} + ص × ١) - ٣ص^٢ \frac{ءص}{ءس} = ٠$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{٢س + ص}{٣ص^٢ - س}$

$\therefore$ صَ عند (٢، ٣) $= \frac{٢×٢+٣}{٣×٩-٢} = \frac{٧}{٢٥}$

(٣) $\frac{ءص}{ءر} = صَ = س^٤ + ٣س^٣ - ٦س^٢ + ٧$

$\therefore صً = ٤س^٣ + ٩س^٢ - ١٢س$

$\therefore صً = -٤ + ٩ + ١٢ = ١٧$

(٤) $٣ص^٢ صَ = \frac{(س^٢+١)×٠ - ٢×٢س}{(س^٢+١)^٢}$

$٣ص^٢ صَ = \frac{-٤س}{(س^٢+١)^٢}$

$ص^٦ = (\frac{٢}{س^٢+١})^٢ = \frac{٤}{(س^٢+١)^٢}$

الطرف الأيمن $= ٣ص^٢ صَ + س ص^٦ = ٠$

$\frac{-٤س}{(س^٢+١)^٢} + \frac{٤س}{(س^٢+١)^٢} =$ صفر

(٥) $\frac{ءص}{ءس} = ٢ جـ (س - جـ)$

الأيمن $= ٨جـ^٣ (س - جـ)^٣ - ٤س جـ (س - جـ)^٢$

$× ٢ جـ (س - جـ) + ٨ جـ^٢ (س - جـ)^٤$

$= ٨جـ^٣ (س - جـ)^٣ [جـ - س + س - جـ] =$ صفر

(٦) $س ص = أ س^٢ + ب$

$س صً + ص × ١ = ٢أس \quad س صً + صَ × ١ + صَ = ٢أ$

$\therefore س صً + ٢صَ = ٢أ$

(٧) $٦ص^٢ صَ = ٦س$

$ص^٢ صً + صَ × ٢ص \frac{ءص}{ءس} = ١$

$\therefore ص^٢ صً + ٢ص (صَ)^٢ = ١$

$ص^٢ صً + ٢ص = \frac{١}{ص}$

(٨) $صً \sqrt{١ + س^٢} + \frac{س صَ}{\sqrt{١ + س^٢}} = ٠$

$(١ + س^٢) صً + س صَ = ٠$

$\therefore ٢س صَ + صً (١ + س^٢) + س صً + صَ = ٠$

$\therefore (١ + س^٢) صً + ٣س صً + صَ = ٠$

(٩) $\because ٣ص جاس + ٥ص^٢ جتاس - س^٣ = ٠$

$٣ (ص جتاس + جاس \frac{ءص}{ءس}) + ٥$

$[ص^٢ (- جاس) + جتا × ٢ص \frac{ءص}{ءس}] - ٣س^٢ = ٠$

$(٣جاس + ١٠ص جتاس) \frac{ءص}{ءس} = ٥ص^٢ جاس$

$- ٣ص جتاس + ٣س^٢$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{٥ص^٢ جاس - ٣ص جتاس + ٣س^٢}{٣جاس + ١٠ص جتاس}$

(١٠) $\because س^٢ + ٤ص^٢ = ٢٠٠$ —— (١)

$٢س + ٨ص \frac{ءص}{ءس} = ٠$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{-س}{٤ص}$ —— (٢)

وعند (٢، ٢) $\therefore صَ = -\frac{١}{٤}$ —— (٣)

$\therefore$ معادلة المماس

$(ص - ٢) = -\frac{١}{٤} (س - ٢)$

معادلة العمودي $ص - ٢ = ٤ (س - ٢)$

(١) $\frac{ءص}{ءس}$ = ٤س^{٢} + ٦س

∴ $(\frac{ءص}{ءس})_{(١،-٢)}$ = ٤×١ + ٦×١ = ١٠

(٢) $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-١}{٢\sqrt{س^{٢}}}$

∴ $(\frac{ءص}{ءس})_{(١،١)} = \frac{-١}{٢}$

(٣) بإجراء الاشتقاق للطرفين بالنسبة إلى س

∴ ٢س- (س× $\frac{ءص}{ءس}$+ ص×١) +٢ص× $\frac{ءص}{ءس}$= ٠

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ (- س+ ٢ص) ص- ٢س

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ص- ٢س}{٢ص- س}$

∴ $(\frac{ءص}{ءس})_{(٦،٣)} = \frac{٣-١٢}{٦-٦} = \frac{-٩}{٠}$ = غير معرف

(٤) لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات نضع ص= ٠

∴ صفر = (س-١) (س+٢) (س- ٣)

∴ س= ١ أ، س= -٢ أ، س= ٣

∴ نقط التقاطع هى (١،٠) ، (-٢،٠) ، (٣،٠)

∵ ص = س^{٣}- ٢س^{٢}- ٥س +٦

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣س^{٢}- ٤س- ٥

∴ ميل المماس عند (١،٠) $م_{١}$ =٣-٤-٥ = ٦

∴ ميل المماس عند (-٢،٠) $م_{٢}$ =١٢+٨-٥= ١٥

∴ ميل المماس عند (٣،٠) $م_{٣}$ = ٢٧-١٢-٥= ١٠

(٥) $\frac{ءص}{ءس}$= ٣س^{٢}- ٢س ولكن ميل المماس = ظا هـ

∴ ظا $هـ_{١}$ = ٣-٢= ١ ق(< $هـ_{١}$) = ٤٥°

∴ س= ١ أ، س= ٤

، ظا $هـ_{٢}$ = ٠-٠ = ٠ ق(< $هـ_{٢}$) = صفر°

(٦) $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-٤}{(س+١)^{٢}}$

∴ ظا هـ = $\frac{-٤}{(١+١)^{٢}} = \frac{-٤}{٤}$ = -١

∴ ق(< هـ) = ١٣٥°

(٧) بإجراء الإشتقاق بالنسبة إلى س

∴ ٢س+ ٢ص× $\frac{ءص}{ءس}$ -٢+٦ $\frac{ءص}{ءس}$= ٠

∴ $\frac{ءص}{ءس}$(٢ص+٦) = ٢-٢ س

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٢-٢س}{٢ص+٦}$

عند (٣،-١) $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-٤}{٤}$ = -١

∴ ظا هـ = -١ ∴ ق(< هـ) = ١٣٥°

(٨) $\frac{ءص}{ءس}$ = ٦س^{٢}- ٦س- ١٢

عندما يكون المماس // محور السينات ∴ $\frac{ءص}{ءس}$= ٠

∴ ٦س^{٢}- ٦س- ١٢ = ٠ بالقسمة ÷ ٦ والتحليل

∴ (س-٢) (س+ ١) = ٠

∴ س= ٢ أ، س= -١

من معادلة المنحنى ∴ النقط هى (٢،-١٩) ، (-١،٨)

(٩) بإجراء الإشتقاق بالنسبة إلى س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = (٢س-٣) (٢س- ٦)+ س^{٢}- ٦س+٣)×٢

لاحظ أن مشتقة حاصل ضرب دالتين =

الأولى × مشتقة الثانية + الثانية × مشتقة الأولى

∴ صفر= ٤س^{٢}- ١٨س + ١٨ + ٢س^{٢}- ١٢س + ٦

صفر = ٦(س^{٢}- ٥س+٤) ∴ (س-١) (س-٤) = ٠

أي أن : ٣أ + ٢ب- ٢ = طا١٣٥° = -١

من معادلة المنحنى ∴ النقط هي (١، ٢) ، (٤، -٢٥)

(١٠) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{(س-٢)} \times \text{-٢} - \text{(١-٢س)} \times \text{١}}{\text{(س-٢)}^{٢}}$

∵ المماس // المستقيم

∴ ميل المماس = ميل المستقيم

لاحظ أن ميل المستقيم = $\frac{\text{- معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{\text{-٣}}{\text{-١}} = \text{٣}$

∴ $\text{٣} = \frac{\text{٣}}{\text{(س-٢)}^{٢}}$ ∴ $\text{(س-٢)}^{٢} = \text{١}$

∴ (س-٢) = ± ١ ⟸ س=٣ أ، س= ١

من معادلة المنحنى ∴ النقط هي (٣، -٥) ، (١، ١)

(١١) صَ = ٣س^{٢} - ٣

<u>أولاً:</u> ميل المستقيم ٣س+ ص= ٥ هو -٣

∴ ٣س^{٢}-٣ = -٣ ⟸ س= ٠

من معادلة المنحنى ∴ النقطة هي (٠، ٥)

<u>ثانياً:</u> ميل المستقيم س+٩ص- ٤٨= ٠ هو $\frac{\text{-١}}{\text{٩}}$

∴ ميل العمودى هو ٩

∴ ٣س^{٢}-٣ = ٩ ⟸ س^{٢}= ٤ ∴ س = ± ٢

من معادلة المنحنى ∴ النقط هي (٢، ٧) ، (-٢، ٣)

(١٢) ∵ النقطة (١، ٢) ∈ للمنحنى ∴ تحقق معادلته

∴ ٢ = أ + ب- ٢ +٦

∴ أ+ ب = -٢ ----- (١)

صَ= ٣أ س^{٢}+ ٢ب س -٢

ميل المماس عند (١، ٢) هو م = ٣أ + ٢ب- ٢

∴ م = ظا هـ ⟸ ٣أ + ٢ب- ٢ = ظا $\frac{\text{٣ ط}}{\text{٤}}$

∴ ٣أ+ ٢ ب = ١ ---- (٢)

بضرب طرفى (١) × -٢ والجمع مع طرفى (٢)

∴ أ = ٥ من (١) ∴ ب = -٧

(١٣) المنحنى الأول = صَ = ٣أ س^{٢} + ب

ميل المماس عند (-١، ٢) م$_{١}$ = ٣أ+ ب

المنحنى الثاني = صَ = ٢ جـ س- ١

ميل المماس عند (-١، ٢) م$_{٢}$ = -٢جـ - ١

∵ المماس مشترك ∴ م$_{١}$ = م$_{٢}$

٣ أ+ ب = -٢جـ -١ ----- (١)

∵ (-١، ٢) ∈ للمنحنى الأول ∴ تحقق معادلته

∴ ٢ = - أ - ب ⟸ أ + ب = -٢

∵ (-١، ٢) ∈ للمنحنى الثانى ∴ تحقق معادلته

∴ ٢ = جـ + ١ ⟸ جـ = ١

بطرح (٢) من (١) ∴ ٢أ = -٢ جـ + ١

∴ ٢أ = -١ ، أ = $\frac{\text{-١}}{\text{٢}}$ من (٢) ∴ ب = $\frac{\text{-٣}}{\text{٢}}$

(١٤) [أ] صَ = ٣س^{٢}+ ٤س-٤

ميل المماس م = صَ$_{(١، -٤)}$ = ٣

∴ متجه إتجاه المماس هو (١، ٣)

∴ المعادلة المتجهة للمماس هي رَ = (١، -٤) + ك (٣، ١)

ميل العمودى = $\frac{\text{-١}}{\text{٣}}$

∴ متجه إتجاه العمودى هو (٣، -١)

∴ المعادلة المتجهة للمماس هي رَ = (١، -٤) + ك (٣، -١)

[ب] $ص' = \frac{(١-س)\times ١ - (١+س)\times -١}{(١-س)^٢}$

$ص'_{(٢،-٣)} = \frac{٢}{١} = ٢$

معادلة المماس هى $ص + ٣ = ٢(س - ٢)$

أى: $٢س - ص - ٧ = ٠$

معادلة العمودى هى $ص + ٣ = -\frac{١}{٢}(س - ٢)$

أى: $س + ٢ص + ٤ = ٠$

[ج] عندما $س = ٢أ$ ∴ $ص = \frac{٨أ^٣}{٤أ^٢ + ٤أ^٢} = أ$

∴ النقطة هى (٢أ، أ)

$ص' = \frac{-٨أ^٣ \times ٢س}{(٤أ^٢ + ٤أ^٢)^٢}$

∴ ميل المماس عند (٢أ، أ) $م = \frac{-٣٢أ^٤}{٦٤أ^٤} = \frac{-١}{٢}$

∴ متجه إتجاه المماس هو (٢، -١)

∴ متجه إتجاه العمودى هو (١، ٢)

∴ المعادلة المتجهة للمماس هى $\vec{ر} = (٢أ، أ) + ك(٢، -١)$

∴ المعادلة المتجهة للعمودى هى $\vec{ر} = (٢أ، أ) + ك(١، ٢)$

[ء] بإجراء الإشتقاق بالنسبة إلى س

∴ $٢س + ٢ص ص' + ٢ - ٣ص' = ٠$

∴ $ص' = \frac{-٢س - ٢}{٢ص - ٣}$

ميل المماس $م = ص'_{(-٢، ١)} = -٢$

معادلة المماس هى $ص - ١ = -٢(س + ٢)$

أى: $٢س + ص + ٣ = ٠$

معادلة العمودى هى $ص - ١ = \frac{١}{٢}(س + ٢)$

أى: $س - ٢ص + ٤ = ٠$

[هـ] عندما $س = ٣$ ∴ $ص = -٨$

∴ النقطة هى (٣، -٨)

$ص' = ٣س^٢ - ٦س - ١$

ميل المماس $م = ٢٧ - ١٨ - ١ = ٨$

∴ متجه إتجاه المماس هو (١، ٨)

∴ المعادلة المتجهة للمماس هى $\vec{ر} = (٣، -٨) + ك(١، ٨)$

∴ متجه إتجاه العمودى هو (٨، -١)

∴ المعادلة المتجهة للعمودى هى $\vec{ر} = (٣، -٨) + ك(٨، -١)$

(١٥) $ص' = ٢ - ٥س^٢$

$ص'_{(١، \frac{١}{٣})} = ٢ - ٥ = -٣$

∴ ميل المماس = -٣ ∴ ميل العمودى = $\frac{١}{٣}$

∴ معادلة العمودى هى $ص - \frac{١}{٣} = \frac{١}{٣}(س - ١)$

أى: $س - ٣ص = ٠$

∵ (٠،٠) تحقق معادلة العمودى

∴ فهو يمر بنقطة الأصل

(١٦) بإجراء الإشتقاق بالنسبة إلى س ∴ $٢ص ص' = ٢٠$

∴ $ص ص' = ١٠$

∵ المماس يصنع مع السينات زاوية $\frac{ط}{٤} = ٤٥°$

∴ $ص' = ظا ٤٥° = ١$ ∴ $ص = ١٠$

من معادلة المنحنى: $س = ٥$ ∴ النقطة هى (٥، ١٠)

∴ معادلة المماس هى: $ص - ١٠ = ١ \times (س - ٥)$

أى: $س - ص - ٥ = ٠$

(١٧) بإجراء الإشتقاق بالنسبة إلى س

∴ $٢س + ٢ص ص' = ٠$ ⟸ $ص' = \frac{-س}{ص}$

متجه إتجاه المستقيم هو (٣، -٢) ∴ ميله = $\frac{-٢}{٣}$

∴ المماس // المستقيم ∴ ميل المماس = ميل المستقيم

∴ $\frac{-س}{ص} = \frac{-٢}{٣}$ ∴ $ص = \frac{٣}{٢}س$

بالتعويض فى معادلة الدائرة

∴ س^{٢} + ($\frac{٣}{٢}$ س)^{٢} = ٥٢ ⟸ ٣س^{٢} = ٥٢×٤

∴ س^{٢} = ١٦ ⟸ س = ± ٤ ، ص = ± ٦

∴ النقطة هى (± ٤ ، ± ٦)

معادلة المماس هى : ص- ٦ = $\frac{-٢}{٣}$ (س-٤)

أى : ٢س+ ٣ص- ٢٦ = ٠

معادلة المماس الثانى هى : ص+ ٦ = $\frac{-٢}{٣}$ (س+٤)

أى : ٢س+ ٣ص+ ٢٦= ٠

(١٨) صَ = ٤س^{٣} ـ ٣

ميل المستقيم = $\frac{\text{- معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\frac{-٢}{٢٩}$

∵ المماس ⊥ المستقيم ∴ ميل المماس = ٢٩

∴ ٢٩ = ٤س^{٣} ـ ٣ ⟸ س^{٣} = ٨

∴ س = ٢ من معادلة المنحنى ∴ ص= ١٠

∴ معادلة المماس هى : ص-١٠ = ٢٩ (س-٢)

أى : ٢٩س- ص- ٤٨ = ٠

(١٩) المنحنى الأول صَ = ٤س- ٣

المنحنى الثانى صَ = ٢س- ٣ عند النقطة (١ ،٧)

ميل المماس للمنحنى الأول م$_{١}$ = ٤-٣= ١

ميل المماس للمنحنى الثانى م$_{٢}$ = ٢-٣ = -١

∴ م$_{١}$ × م$_{٢}$ = ١ × -١ = -١

∵ م$_{١}$ × م$_{٢}$ = -١ ∴ المماسان متعامدان

أى أن المنحنيان على التعامد عند النقطة (١ ،٧)

لاحظ أن (١ ،٧) تحقق المعادلتين فهى نقطة تقاطع

(٢٠) في البداية نوجد نقطة التقاطع

∴ س^{٢}- س+٢= ٣س- س^{٢}

∴ ٢س^{٢}- ٤س + ٢ = ٠

أى أن : س^{٢}- ٢س + ١ = ٠

(س-١)^{٢} = س-١ = ٠ ∴ س= ١

∴ المنحنيان يتقاطعان في نقطة واحدة

بالتعويض في أى من المنحنيين ∴ ص= ٢

∴ نقطة التقاطع هى (١ ،٢)

المنحنى الأول ص= س^{٢}- س+٢

∴ صَ = ٢س- ١

ميل المماس عند (١ ،٢) م$_{١}$ = ٢-١= ١

المنحنى الثانى ص= ٣س- س^{٢}

∴ صَ = ٣- ٢س

ميل المماس عند (١ ،٢) م$_{٢}$ = ٣- ٢= ١

∵ م$_{١}$ = م$_{٢}$ ∴ المنحنيان تماسان

معادلة المماس المشترك

ص- ٢ = ١ × (س-١) أى : س- ص+١ = ٠

حلول تمرين (٦)

(١) بإجراء الإشتقاق للطرفين بالنسبة إلى ن

∴ م س×$\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$+ س×$\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$+ص×$\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$+٢ص× $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$=٠

عند النقطة (-١، ٣) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ = ٠,١

∴ ٢×-٢×٠,١+(-١)×$\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$+٣×٠,١+٢×٣ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$=٠

∴ ٥ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ = -٠,١ ⟸ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ = - ٠,٠٢

(٢) $\frac{ءص}{ءن}$ = ٢س × $\frac{ءس}{ءن}$ + ٤ × $\frac{ءس}{ءن}$

∵ سرعة الإحداثي الصادي = ضعف سرعة الإحداثي السيني

∴ $\frac{ءص}{ءن}$ = ٢ × $\frac{ءس}{ءن}$

∴ ٢ × $\frac{ءس}{ءن}$ = ٢س × $\frac{ءس}{ءن}$ + ٤ × $\frac{ءس}{ءن}$

بقسمة الطرفين ÷ $\frac{ءس}{ءن}$ ∴ س = -١

من معادلة المنحنى ∴ ص = -٦

∴ النقطة هي (-١ ، -٦)

(٣) بإجراء الاشتقاق للطرفين بالنسبة إلى ن

∴ ٢س × $\frac{ءس}{ءن}$ + ٢ص × $\frac{ءص}{ءن}$ + ٤ $\frac{ءس}{ءن}$ - ٨ $\frac{ءص}{ءن}$ = ٠

∵ $\frac{ءص}{ءن}$ = $\frac{ءس}{ءن}$ بالقسمة على أي منها

∴ ٢س + ٢ص + ٤ - ٨ = ٠

∴ ص = ٢ - س ، من معادلة المنحنى

∴ $س^{٢}$ + $(٢ - س)^{٢}$ = ٤س - ٨(٢ - س) = ١٠٨

∴ ٢$س^{٢}$ + ٨س - ١٢٠ = ٠

∴ $س^{٢}$ + ٤س - ٦٠ = ٠

∴ (س + ١٠) (س - ٦) = ٠

∴ س = -١٠ أو س = ٦

من معادلة المنحنى ص = ١٢ أو ص = -٤

∴ النقط هي (-١٠ ، ١٢) أو (٦ ، -٤)

(٤) نفرض أن الطول س ، العرض (س - ٢٠)

∵ الطول ينكمش بمعدل ٠,٠٢٥ سم/ث

∴ $\frac{ءس}{ءن}$ = -٠,٠٢٥ عندما س - ٢٠ = ٨٠

أي أن : $\frac{ءس}{ءن}$ = -٠,٠٢٥ عندما س = ١٠٠

نفرض أن المساحة م = س(س - ٢٠)

∴ م = $س^{٢}$ - ٢٠ س

بإجراء الإشتقاق بالنسبة إلى ن

∴ $\frac{ءم}{ءن}$ = ٢س $\frac{ءس}{ءن}$ - ٢٠ $\frac{ءس}{ءن}$

∴ $\frac{ءم}{ءن}$ = ٢ × ١٠٠ × -٠,٠٢٥ - ٢٠ × -٠,٠٢٥

= -٥ + ٠,٥ = -٤,٥ $سم^{٢}$/ث

(٥) مساحة الموجة الدائرية م = ط $نق^{٢}$ حيث ط ثابت

∴ $\frac{ءم}{ءن}$ = ٢ ط نق × $\frac{ءنق}{ءن}$

∵ $\frac{ءنق}{ءن}$ = ٢ سم/ث

بعد ١٠ ثانية نق = صفر + ٢ × ١٠ = ٢٠

لاحظ أن نصف قطر الموجة في البداية = صفر

∴ $\frac{ءم}{ءن}$ = ٢ط × ٢٠ × ٢ = ٨٠ ط $سم^{٢}$/ث

(٦) نفرض أن الطرف السفلي للسلم يبتعد عن الحائط بمقدار س

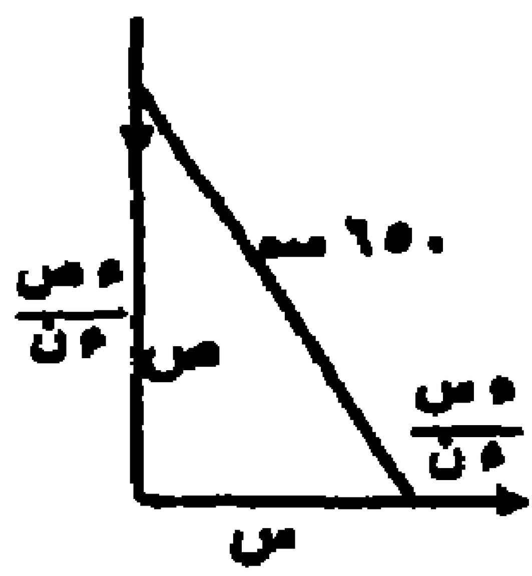
وأن الطرف العلوي للسلم يبتعد عن الأرض بمقدار ص

∴ سرعة الطرف السفلي $\frac{ءس}{ءن}$ = + ٣٠ سم/ث

، سرعة الطرف العلوي $\frac{ءص}{ءن}$

∴ $\frac{ءس}{ءن}$ = + ٣٠ سم/ق عندما س = ٢٥٠سم

المطلوب $\frac{ءص}{ءن}$



من الشكل

$س^{٢}$ + $ص^{٢}$ = $(٦٥٠)^{٢}$

∴ ٢س $\frac{ءس}{ءن}$ + ٢ص $\frac{ءص}{ءن}$ = ٠

∴ $\frac{ءص}{ءن}$ = - $\frac{س}{ص}$. $\frac{ءس}{ءن}$ ——— (١)

عندما س = ٢٥٠

∴ $ص^{٢}$ = $(٦٥٠)^{٢}$ - $(٢٥٠)^{٢}$ ∴ ص = ٦٠٠

∴ $\frac{عص}{عن} = -\frac{250}{600} \times 30 = -\frac{25}{2}$ سم/ق

عندما $\frac{عس}{عن} = -\frac{عص}{عن}$

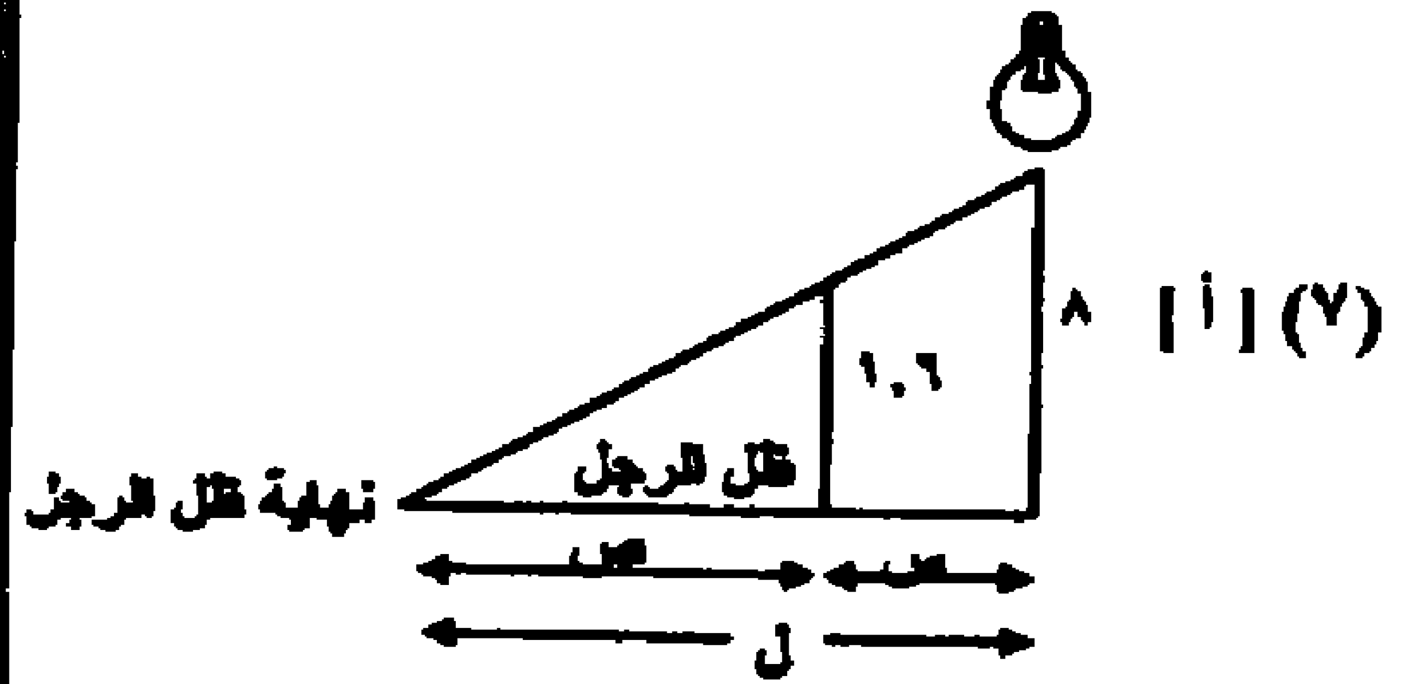
من (1) $1 = \frac{س}{ص}$ ∴ ص = س

∴ $ص^2 + ص^2 = (650)^2$

∴ $2ص^2 = (650)^2$

∴ $ص = \frac{650}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 325\sqrt{2}$ سم

(7) [أ]



نفرض أن الرجل بعد عن الحائط بمقدار س

∴ سرعة الرجل $\frac{عس}{عن} = 2$ متر/ق

ونفرض أن طول ظل الرجل = ص

∴ المطلوب معدل إزدياد طول الرجل $\frac{عص}{عن}$

من تشابه المثلثين بالشكل ∴ $\frac{ص}{س+ص} = \frac{1,6}{8}$

∴ $\frac{ص}{س+ص} = \frac{1}{5}$ ⟸ 4 ص = س

∴ $4 \frac{عص}{عن} = \frac{عس}{عن}$

∴ $\frac{عص}{عن} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ متر/ق

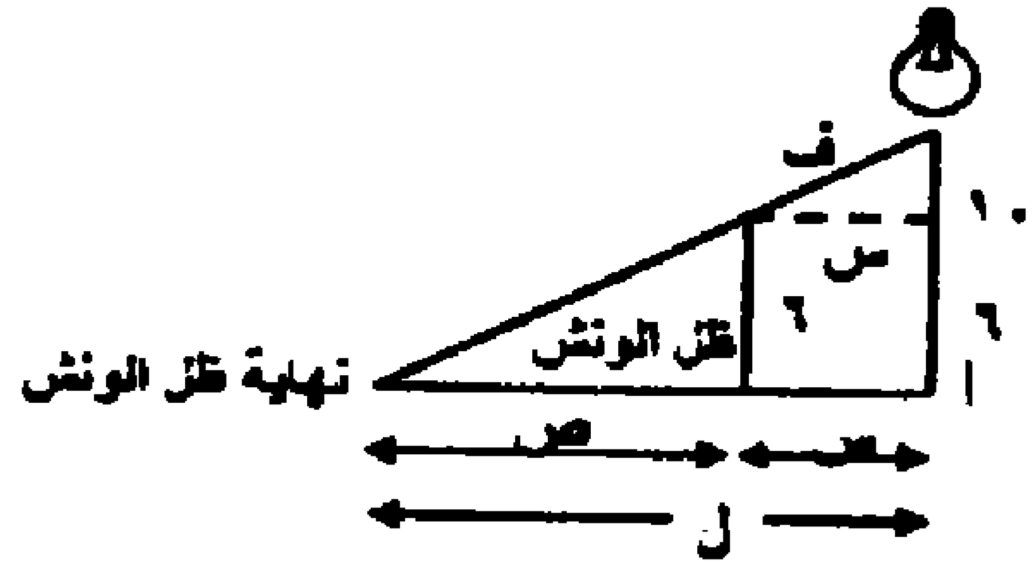
[ب] نفرض أن نهاية ظل الرجل تبعد عن الحائط بمقدار ل

∴ ل = س+ ص

∴ $\frac{عل}{عن} = \frac{عس}{عن} + \frac{عص}{عن}$

∴ $\frac{عل}{عن} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ متر/ دقيقة

(8) [أ]



نعوض أن الونش يبعد عن النقطة الثابتة أ (أسفل المصباح) بمقدار س

∴ سرعة الونش $\frac{عس}{عن} = -5$ متر / ث

لاحظ أن الونش يتحرك في اتجاه أ أي أن س تتناقص فتكون $\frac{عس}{عن}$ سالبة .

المطلوب : معدل تحرك نهاية ظل الونش أي $\frac{عل}{عن}$

من الشكل $\frac{س}{ل} = \frac{10}{16}$ ⟸ ل = $\frac{8}{5}$ س

∴ $\frac{عل}{عن} = \frac{8}{5} \times -5 = -8$ متر / ث

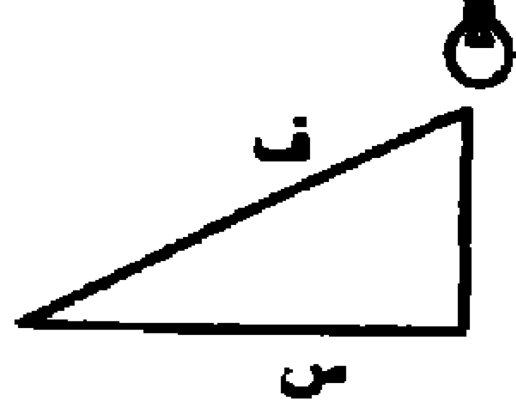
[ب] المطلوب : معدل تحرك طول ظل الونش أى $\frac{عص}{عن}$

من التشابه $\frac{ص}{ل} = \frac{6}{16}$ ⟸ ص = $\frac{3}{8}$ ل

∴ $\frac{عص}{عن} = \frac{3}{8} \frac{عل}{عن}$

∴ $\frac{عص}{عن} = \frac{3}{8} \times -8 = -3$ متر/ ث

[ج] المطلوب $\frac{عف}{عن}$ عندما س = 10 متر



من الشكل : $ف^2 = س^2 + 100$

∴ $2ف \frac{عف}{عن} = 2 س \frac{عس}{عن}$

∴ $\frac{عف}{عن} = \frac{س}{ن} \times \frac{عس}{عن}$

عندما س= 10 ⟸ $ف^2 = 200$ ∴ $ف = 10\sqrt{2}$

∴ $\frac{عف}{عن} = \frac{10}{10\sqrt{2}} \times -5 = -\frac{5}{2}\sqrt{2}$ متر/ ث

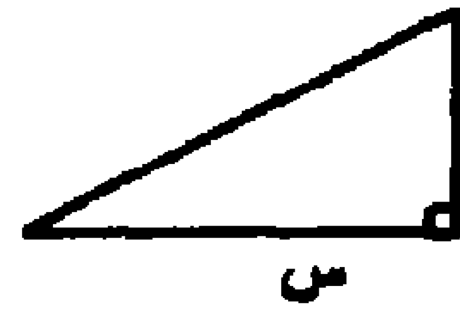
(9) $ح = ط نق_2^2 - ط نق_1^2 = ط (نق_2^2 - نق_1^2)$

$\frac{عح}{عن} = ط(2نق_2 \frac{عنق_2}{عن} - 2 نق_1 \frac{عنق_1}{عن})$

$= ط(2\times7\times -0,1 - 2\times4\times 0,2)$

∴ $\frac{عح}{عن} = -3ط$ سم²/ث

(١٠) بعد ن ثانية يكون :



س = ٨ - ١ × ن

ص = ٦ + ٢ × ن

مساحة المثلث م = $\frac{١}{٢}$ س ص

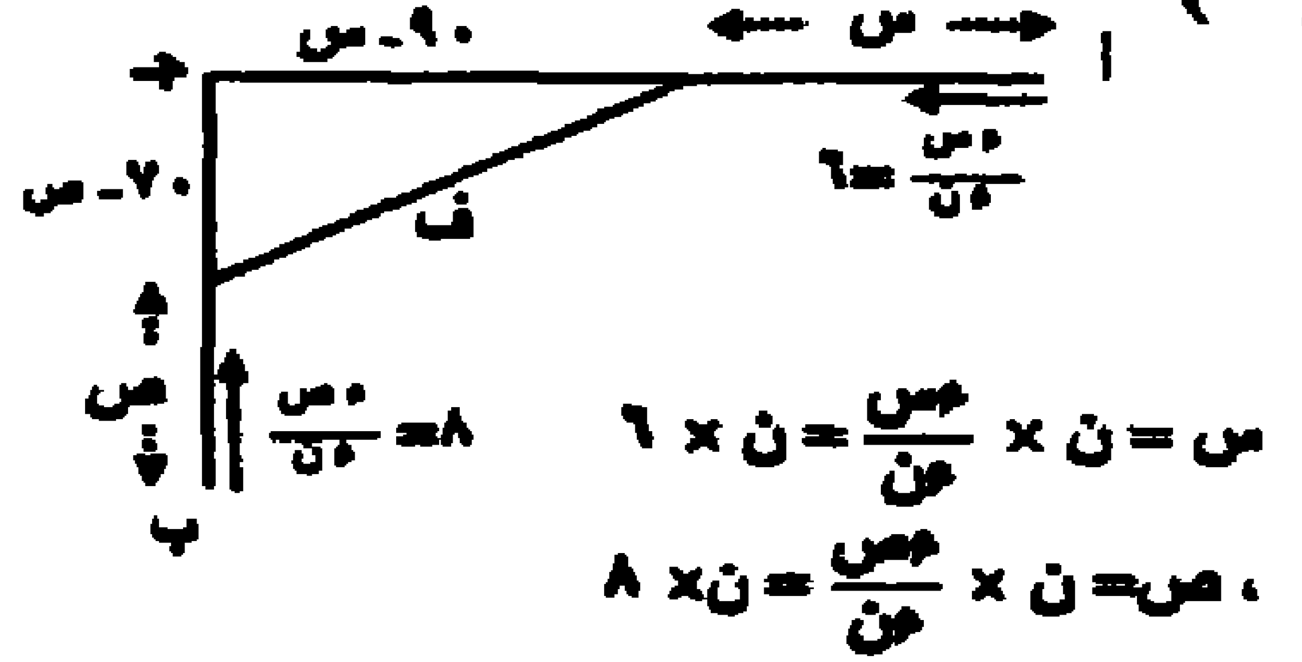
م = $\frac{١}{٢}$ (٨-ن) (٦+ ٢ن)

∴ م = ٢٤ + ٥ن - $ن^٢$

∴ $\frac{ءم}{ءن}$ = ٥ - ٢ن

بعد دقيقتين ∴ $\frac{ءم}{ءن}$ = ٥ - ٢ × ٢ = ١ $سم^٢$/ث

(١١)



س = ن × $\frac{ءس}{ءن}$ = ن × ٦

، ص = ن × $\frac{ءص}{ءن}$ = ن × ٨

من الشكل : $ف^٢$ = $(٩٠ - س)^٢$ + $(٧٠ - ص)^٢$

= $(٩٠-٦ن)^٢$ + $(٧٠ - ص)^٢$

∴ $ف^٢$ = ١٠٠ ($ن^٢$ - ٢٢ن + ١٣٠) —— (١)

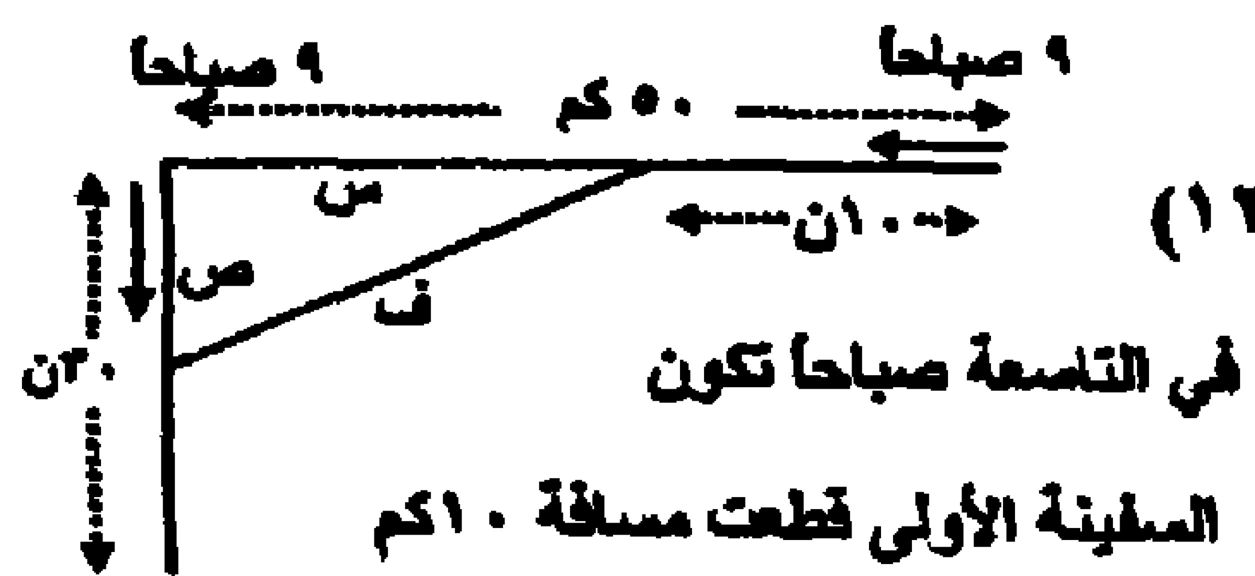
∴ ٢ ف . $\frac{ءف}{ءن}$ = ١٠٠ (٢ن - ٢٢)

∴ $\frac{ءف}{ءن}$ = $\frac{١٠٠}{ف}$ (ن - ١١)

عندما ن = ٨ من (١) ∴ ف = ٣٠ ٢

∴ $\frac{ءف}{ءن}$ = $\frac{١٠٠}{٣٠\sqrt{٢}}$ (٨-١١) = - ٥ $\sqrt{٢}$ متر/ث

(١٢)



في التاسعة صباحاً تكون

السفينة الأولى قطعت مسافة ١٠كم

فتكون المسافة بينها وبين الميناء ٥٠كم

وتكون إزاحة الأولى ١٠ن و إزاحة الثانية ٣٠ن

$ف^٢$ = $س^٢$ + $ص^٢$

∴ $ف^٢$ = $(٥٠ - ١٠ن)^٢$ + $(٣٠ن)^٢$

∴ $ف^٢$ = ١٠٠٠$ن^٢$ - ١٠٠٠ن + ٢٥٠٠ —— (١)

∴ ٢ف $\frac{ءف}{ءن}$ = ٢٠٠٠ن - ١٠٠٠

في الساعة العاشرة صباحاً تكون ن = ١

من (١) ∴ $ف^٢$ = ٢٥٠٠ ⇐ ف = ٥٠

∴ ٢ × ٥٠ $\frac{ءف}{ءن}$ = ٢٠٠٠ - ١٠٠٠

∴ $\frac{ءف}{ءن}$ = ١٠ كم / ساعة (الإشارة موجبة أي أنهما يتباعدان)

(١٣)



المطلوب هو : $\frac{ءص}{ءن}$

من الشكل $\frac{ص - ١٢}{ص}$ = $\frac{ف}{١٥}$

∴ ص ف = ١٥ ص - ١٨٠

ص (ف - ١٥) = - ١٨٠

∴ ص = - $\frac{١٨٠}{ف - ١٥}$

∴ $\frac{ءص}{ءن}$ = + $\frac{١٨٠}{(ف - ١٥)^٢}$ × $\frac{ءف}{ءن}$

عند منتصف الثانية الأولى

المسافة المقطوعة ف = السرعة $\frac{ءف}{ءن}$ عند منتصف تلك الثانية

∴ $\frac{ءص}{ءن}$ = $\frac{١٨٠}{(ف - ١٥)^٢}$ × ٥ = ٩ مترات تقريباً

الجواب تقريبي لأننا اعتبرنا أن سرعة الكرة ثابتة تقريباً

(١٤) [أ] نفرض أن نصف القطر الخارجي $نق_١$

و أن نصف القطر الداخلي $نق_٢$

∴ ح = $\frac{٤}{٣}$ ط ($نق_١$ - $نق_٢$)

∴ $\frac{ءح}{ءن}$ = $\frac{٤}{٣}$ ط (٣ $نق_١^٢$ $\frac{ءنق_١}{ءن}$ - ٣ $نق_٢^٢$ $\frac{ءنق_٢}{ءن}$)

$= \frac{4}{3}$ ط × ٣ (نق$_1^2$ $\frac{\text{ءنق}_1}{\text{ءن}}$ - نق$_2^2$ $\frac{\text{ءنق}_2}{\text{ءن}}$)

ولكن حجم المادة ثابت ∴ $\frac{\text{ءح}}{\text{ءن}}$ = صفر

∴ نق$_1^2$. $\frac{\text{ءنق}_1}{\text{ءن}}$ = نق$_2^2$. $\frac{\text{ءنق}_2}{\text{ءن}}$

∴ ٨١ $\frac{\text{ءنق}_1}{\text{ءن}}$ = ٩ × ١

∴ $\frac{\text{ءنق}_1}{\text{ءن}} = \frac{1}{9}$ سم / ث

[ب] مساحة السطح الخارجي م = ٤ ط نق$_1^2$

∴ $\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}}$ = ٤ط × ٢ نق × $\frac{\text{ءنق}_1}{\text{ءن}}$

= ٤ ط × ٢ × ٩ × $\frac{1}{9}$

∴ $\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}}$ = ٨ ط سم^2/ث

[ج] نفرض أن سمك مادة الكرة س سم

∴ س = نق$_2$ − نق$_1$

∴ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = \frac{\text{ءنق}_2}{\text{ءن}} - \frac{\text{ءنق}_1}{\text{ءن}}$

$= \frac{1}{9} - 1 = -\frac{8}{9}$ سم / ث

(١٥) نفرض أن عرض القاعدة س فيكون طولها (س+٢) ويكون ارتفاع متوازى المستطيلات ٣ س

حجم متوازى المستطيلات ح = س(س+٢) × ٣ س

∴ ح = ٣س^3 + ٦س^2

∴ $\frac{\text{ءح}}{\text{ءن}}$ = ٩س^2 . $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ + ١٢ س . $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$

∴ ٠,٦ = (٩س^2 + ١٢س) × ٠,٠١

∴ ٣س^2 + ٤س − ٢٠ = ٠

∴ (س-٢) (٣س+١٠) = ٠

∴ س = ٢ أ، س = $-\frac{10}{3}$ مرفوض

∴ الأبعاد هى ٢، ٤، ٦

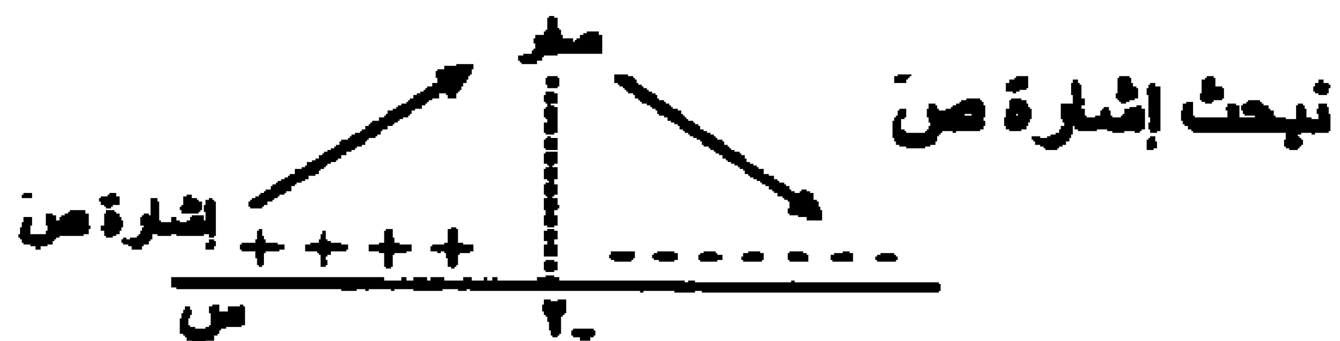
حلول تمارين (٧)

(١) ص = ١ - ٤س - س^2

صَ = -٤ - ٢س

صَ = ٠ عندما س = -٢

نبحث إشارة صَ

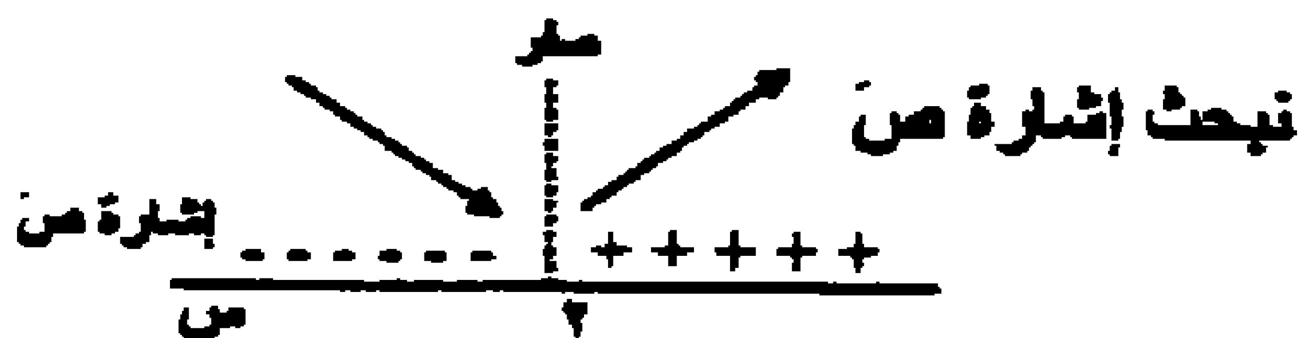


الدالة متزايدة فى]-∞ ، -٢[ومتناقصة فى]-٢، ∞[

(٢) ص = (س-٢)^2 ، صَ = ٢(س-٢)

صَ = ٠ عندما س = ٢

نبحث إشارة صَ



متناقصة فى]-∞، ٢[ومتزايدة فى]٢، ∞[

(٣) صَ = ٣(س+٤)^2 مربع كامل موجب واضح أن

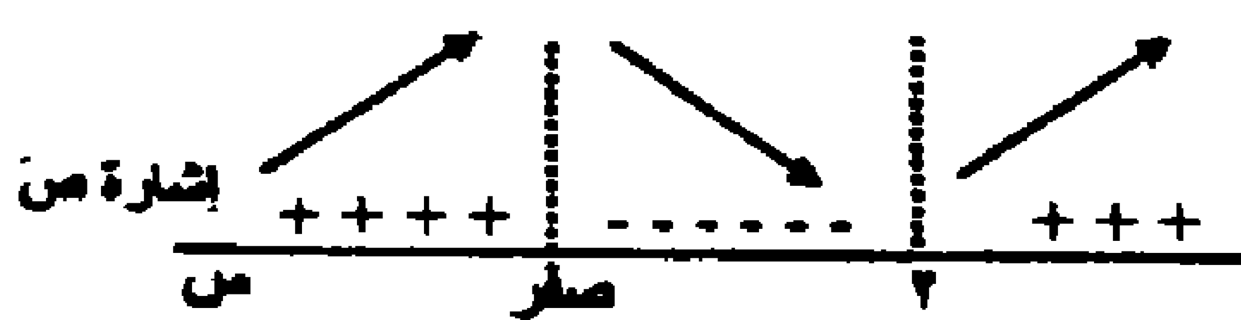
صَ ≥ ٠ لكل س ∈ ح

∴ الدالة متزايدة على ح

(٤) د(س) = س^3 - ٣س^2

دَ(س) = ٣س^2 - ٦س ، دَ(س) = ٣س(س-٢)

دَ(س) = ٠ عندما س = ٠، ٢



متزايدة فى]-∞، ٠[∪]٢، ∞[

متناقصة فى]٠، ٢[

(٥) ص = $\frac{\text{س}}{\text{س}-2}$ حيث س ≠ ٢

صَ = $\frac{(\text{س}-2)\times 1 - \text{س}\times 1}{(\text{س}-2)^2}$

∴ $ص = \frac{-٢}{(س-٢)^٢}$ لاحظ المقام موجب

∴ ص < ٠ لكل س ∈ ح

∴ الدالة متناقصة علي ح- {٢}

(٦) $ص = \frac{١}{٢}س - \sqrt[٣]{س}$

$صَ = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣\sqrt[٣]{س^٢}}$ حيث س ≠ ٠

$صَ = \frac{\sqrt[٣]{س^٢}-١}{٣\sqrt[٣]{س^٢}}$

صَ = ٠ عندما $\sqrt[٣]{س^٢} - ١ = ٠$

أى $(\sqrt[٣]{س} - ١)(\sqrt[٣]{س}+١) = ٠$

أى س= ١ أ، س= -١



متزايدة فى]- ∞،-١[U] ١، ∞ [

متناقصة فى]-١ ، ١[

(٧) ص = س | س |

∴ ص = { س^٢ س ≥ ١ ، - س^٢ س< ١ }

∴ صَ = { ٢س س > ٠ ، - ٢س س < ٠ }

من ذلك فإن صَ ≥ ٠ لكل س ∈ ح

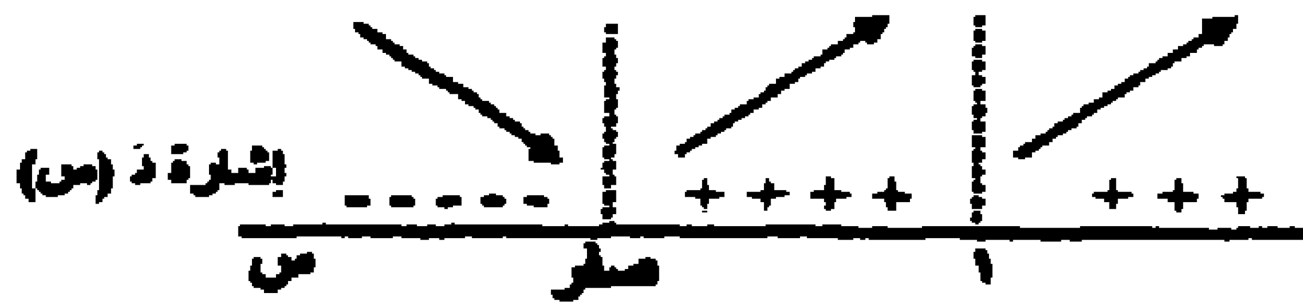
∴ الدالة متزايدة على ح

(٨) د (س) = { س^٢+٢ س ≤ ١ ، ٢ س+١ س > ١ }

∴ دَ (س) = { ٢س س < ١ ، ٢ س > ١ }

دَ (س) = ٠ عندما ٦(س+٢) (س-١) = ٠

نبحث إشارة د (س)



متناقصة فى]- ∞، ٠[

متزايدة فى] ٠، ١[U] ١، ∞ [

حلول تمرين (٨)

(١) [i] ص= س^٢ + ٤س+ ٦

∴ صَ = ٢س+٤ ، صً = ٢

صَ = ٠ عندما س= $-\frac{١}{٢}$ ، صً > ٠

∴ عند س = توجد عظمى محلية هى:

$ص = ٢+ \frac{١}{٢} - \frac{١}{٤} = \frac{٩}{٤}$

∴ القيمة العظمى المحلية = $\frac{٩}{٤}$

[ii] ص = س^٣- ٣س^٢+ ٣ س+ ٢

∴ صَ = ٣س^٢- ٦س+ ٣ ، صً = ٦س- ٦

صَ= ٠ عندما ٣(س-١)^٢ = ٠

أى س = ١ ولكن صً = ٦- ٦= ٠

∴ لا توجد عظمى أو صغرى محلية عند نقطة الإنقلاب صً = ٠

صً = ٠ عندما س = ١

ص = ١-٣+٣+٢ = ٣

∴ النقطة (١، ٣) نقطة إنقلاب

[iv] د(س) = ٢س^٣+ ٣س^٢- ١٢ س + ٥

∴ دَ(س) = ٦س^٢ +٦س- ١٢

∴ دً (س) = ١٢س + ٦

[vi] د(س) = س (س-١)^٢

أى : س= -٢ أ، س= ١

عند س= -٢ دً(س) = -١٨ <٠

∴ توجد قيمة عظمى محلية هى د(-٢) = ٢٥

عند س = ١ دً (س) = ١٨ >٠

∴ توجد قيمة صغرى محلية هى د(١) = -٢

∴ القيمة العظمى المحلية = ٥

، الصغرى المحلية = -٢

عند نقطة الإنقلاب دً(س) = ٠

دً (س) = ٠ عندما س = - $\frac{١}{٢}$

د(- $\frac{١}{٢}$) = ٢×- $\frac{١}{٨}$ +٣× $\frac{١}{٤}$ - ٦+٥ = $\frac{٢٣}{٢}$

∴ نقطة الانقلاب هى (- $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٢٣}{٢}$)

[v] ص= ٢س^{٣} - ٣س^{٢} + ١

∴ صَ = ٦س^{٢} - ٦س ، صً = ١٢س - ٦

صَ = ٠ عندما ٦س (س-١) = ٠

أى : س= ٠ أ، س= ١

عند س =٠ صً = -٦ <٠

∴ عند س= ٠ توجد قيمة عظمى محلية هى ص=١

∴ القيمة العظمى المحلية= ١، الصغرى المحلية = ٠

عند الانقلاب صً = ٠

∴ ١٢س- ٦ = ٠ ∴ س= $\frac{١}{٢}$

عند س= $\frac{١}{٢}$ ∴ ص = $\frac{١}{٢}$

∴ نقطة الانقلاب ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$)

[viii] ٣ص= س^{٣}-٣س^{٢}- ٩س + ١٥

∴ د(س) = س(س^{٢}-٢س+١)

∴ د(س) = س^{٣}- س^{٢}+ س

دَ (س) = ٣س^{٢}- ٤س + ١ ، دً (س) = ٦س- ٤

دَ (س) = ٠ عندما ٣س^{٢}- ٤س + ١ = ٠

أى : (٣س-١) (س- ١) = ٠

أى : س= $\frac{١}{٣}$ أ، س= ١

∴ عند س = $\frac{١}{٣}$ توجد قيمة عظمى محلية هى

د($\frac{١}{٣}$) = $\frac{٤}{٢٧}$ عند س =١ ، دً(١)= ٢ >٠

∴ عند س = ١ توجد قيمة صغرى محلية هى د(١)=٠

عند نقطة الانقلاب دً(س) = ٠ أى ٦س-٤= ٠

أى س = $\frac{٢}{٣}$ د($\frac{٢}{٣}$) = $\frac{٢}{٢٧}$

[vii] د(س) = $\frac{س^{٢}}{س-١}$ حيث س ≠ ١

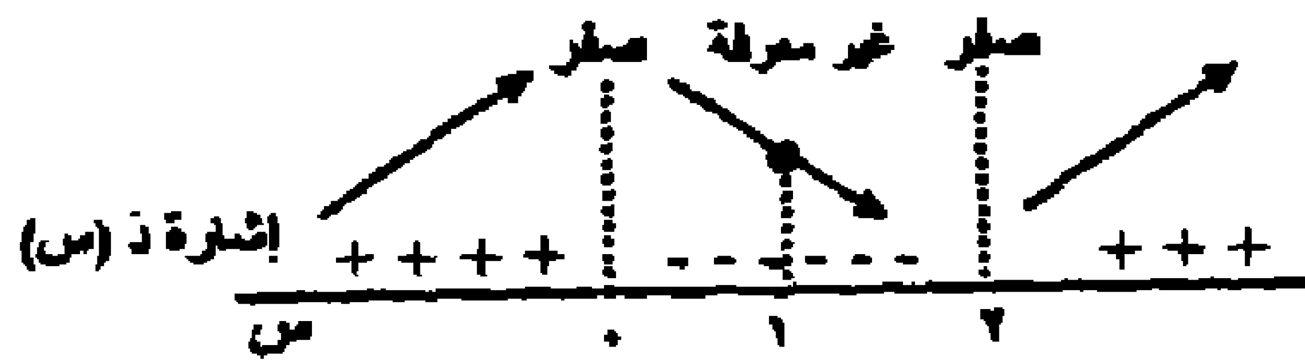
∴ دَ (س) = $\frac{(س-١)\times ٢س- س^{٢}\times ١}{(س-١)^{٢}}$

∴ دَ(س) = $\frac{س(س-٢)}{(س-١)^{٢}}$

∴ دَ(س) = ٠ عندما س(س-٢) = ٠

أى س= ٠ أ، س= ٢

نبحث إشارة دَ(س) على خط الأعداد



عند س= ٠ توجد قيمة عظمى محلية هى د(٠) = ٠

عند س=٢ توجد قيمة صغرى محلية هى د(٢) = ٤

دً (س) = $\frac{٢}{(س-١)^{٣}}$ ≠ ٠ لكل س ∈ ح

∴ لا توجد نقطة انقلاب

د(٣) = ٢٧ - ٨١ + ٤٥ = -٩

∴ ٣ ص = ٣س^{٢} - ٦س - ٩

∴ ص = س^{٢} - ٢س - ٣

ص' = ٢س - ٢

ص'= ٠ عندما س^{٢} - ٢س - ٣ = ٠

أى : (س-٣) (س+١) = ٠

أى : س= ٣ أ، س= -١

عند س= ٣ ∴ ص'' = ٤ > ٠

∴ عند س= ٣ توجد صغرى محلية = -١٢

عند س= -١ ∴ ص'' = -٤ < ٠

∴ عند س= -١ توجد عظمى محلية = $\frac{٢٠}{٣}$

توجد نقطة انقلاب عندما ص'' = ٠

أى عندما ٢س-٢ = ٠ أى س= ١

عند س =١ ∴ ص = $\frac{٤}{٣}$

∴ نقطة الانقلاب هو (١، $\frac{٤}{٣}$)

[ix] د(س) = س^{٣} - ٩س^{٢} + ١٥س

∴ د'(س) = ٣س^{٢} - ١٨س + ١٥

، د''(س) = ٦س - ١٨

د'(س) = ٠ عندما ٣(س-١) (س-٥)

أى: س= ١ أ، س= ٥

عند س = ١ ∴ د''(١) = -١٢ < ٠

∴ توجد عظمى محلية = د(١) = ٧

عند س= ٥ ∴ د''(٥) = ١٢ > ٠

∴ توجد صغرى محلية = د(٥) = -٢٥

عند نقطة الانقلاب د''(س) = ٠ أى س= ٣

∴ نقطة الانقلاب هى (٣، -٩)

[x] د(س) = س + $\frac{٤}{س-١}$ حيث س ≠

∴ د'(س) = ١ - $\frac{٤}{(س-١)^{٢}}$ = $\frac{(س-١)^{٢} -}{(س-١)}$

د''(س) = + $\frac{٨}{(س-١)^{٣}}$

د'(س) = ٠ عندما (س-١)^{٢} - ٤ = ٠

أى : س^{٢} - ٢س - ٣ = ٠

أى : (س-٣) (س+١) = ٠

∴ د'(س) = ٠ عندما س= ٣ أ، س= -١

عند س= ٣ ∴ د''(٣) = ١ > ٠

∴ عند س = ٣ توجد صغري محلية = د(٣) = ٥

عند س = -١ ∴ د''(-١) = -١ < ٠

∴ عند س= -١ توجد عظمى محلية = د(-١) = -٣

د''(س) ≠ ٠ لكل س ∈ ح

∴ لا توجد نقطة انقلاب

[xi] د (س) = س|س-٤|

∴ د (س) = { س(س-٤) حيث س ≥ ٤ ، -س(س-٤) حيث س < ٤ }

∴ د (س) = { س^{٢} - ٤س ، س ≥ ٤ ، -س^{٢} + ٤ ، س < ٤ }

∴ د'(س) = { ٢س-٤ ، س > ٤ ، -٢س+٤ ، س < ٤ }

د'(س) = ٠ عندما س =٢

د''(س) = { ٢ ، س > ٤ ، -٢ ، س < ٤ }

∴ د''(٢) = -٢ < ٠

∴ عند س =٢ توجد قيمة عظمى محلية = د(٢) = ٤

[iii] ص= ٢س^{٣} +٣س^{٢} - ١٢س + ١ فى [-١٠، ١٢]

ولا توجد قيمة صغرى محلية "تصحح إجابة الكتاب"

واضح أن دَ(س) ≠ ٠ لكل س ∈ ح

∴ لا توجد نقطة انقلاب

لاحظ أن عند س = ٤ دَ(٤^+) = ٤

، دَ(٤^-) = -٤

∴ عند س =٤ توجد نقطة حرجة ولكنها ليست عظمى أو صغرى محلية

(٢) [i] ص = $س^٣$ في [-١، ٣]

∴ صَ = $٣س^٢$

صَ = ٠ عندما س = ٠

عند س= ٠ ص = ٠

عند س= -١ ص = -١

عند س =٣ ص= ٢٧

∴ القيمة الصغرى المطلقة= -١، العظمى المطلقة= ٢٧

[ii] ص= $٢س^٣$+ $٣س^٢$ - ١٢س + ١ في [-١، ٥]

∴ صَ = $٦س^٢$ +٦س -١٢

صَ = ٠ عندما ٦(س-١) (س+٢) = ٠

أي عندما س= ١ أ، س= -٢

عند س =١ ص= -٦

عند س= -٢ ص = ٢١

عند س =-١ ص= ١٤

عند س= ٥ ص= ٢٦٦

∴ القيمة الصغرى المطلقة= -٦، العظمى المطلقة= ٢٦٦

∴ ص = $٦س^٢$+ ٦س -١٢

صَ = ٠ عندما ٦($س^٢$+ س-٢) = ٠

أي : ٦(س+٢) (س-١) = ٠

أي: س= -٢ أ، ١

عند س = ١ ∴ ص = -٦

عند س = -٢ ص= ٢١

عند س = -١٠ ص= -١٥٧٩

عند س = ١٢ ص = ٣٧٤٥

∴ القيمة الصغرى المطلقة= -١٥٧٩، العظمى المطلقة= ٣٧٤٥

[iv] ص= $\frac{س}{س-١}$ في [٢، ٤]

∴ صَ = $\frac{(س-١)\times١ - س\times١}{(س-١)^٢} = \frac{-١}{(س-١)^٢}$

نلاحظ أن صَ ≠ ٠

∴ عند س= ٢ ص= ٢

عند س= ٤ ص = $\frac{٤}{٣}$

∴ القيمة الصغرى المطلقة $\frac{٤}{٣}$ ، العظمى المطلقة =٢

[v] ص = س + $\frac{س}{س+٢}$ في [٠، ٣]

∴ صَ = ١- $\frac{س}{(س+٢)^٢}$، = $\frac{س^٢+ ٤س+ ٣}{(س-١)^٢}$

صَ = ٠ عندما $س^٢$+ ٤س+ ٣ = ٠

أي : (س+١) (س+٣) = ٠ أي : س= -١ أ، -٣

ولكن {-١،-٣} ∉ [٠، ٣]

عند س= ٠ ص = $\frac{١}{٢}$

عند س = ٣ ص = ٣ $\frac{١}{٥}$

∴ القيمة الصغرى المطلقة $\frac{١}{٢}$ ، العظمى المطلقة $\frac{١٦}{٥}$

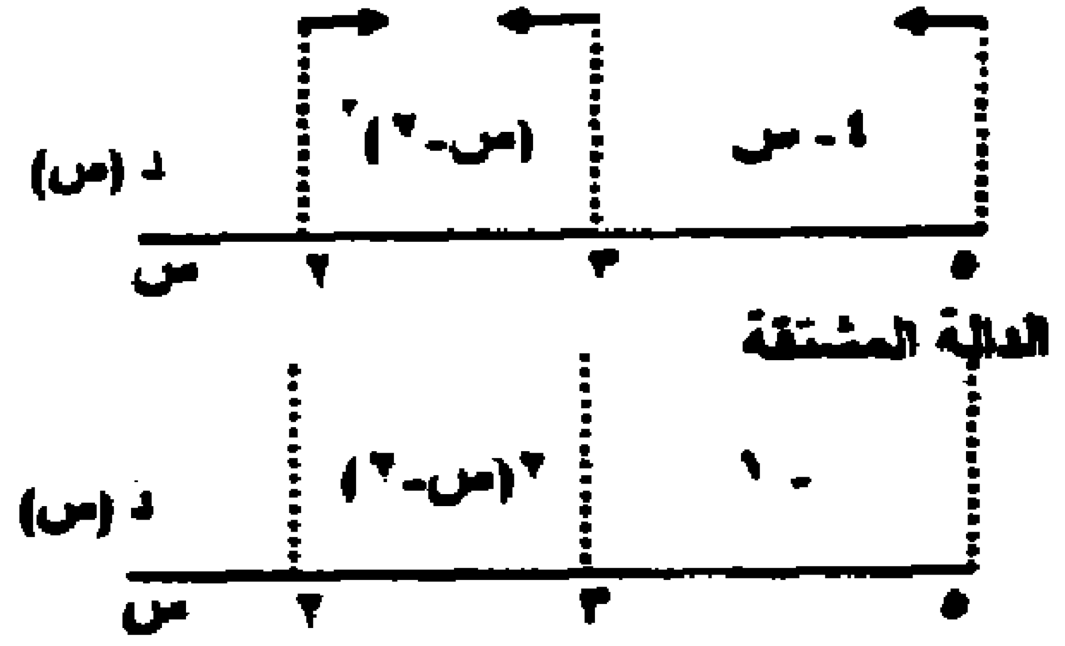
(س-٢)^٢ ، س ≤ ٣

٤-س ، س > ٤

[vi] د(س) =

في [٢، ٥]

هنا يجب تعريف الدالة على خط الأعداد



لاحظ أن د(٣) غير موجودة

حيث دَ (٣^+) = -١ ، دَ (٣^-) = ٢

أي أن دَ (٣^+) ≠ دَ (٣^-)

دَ(س) = ٠ عندما ٢(س-٢) = ٠

أي س = ٢

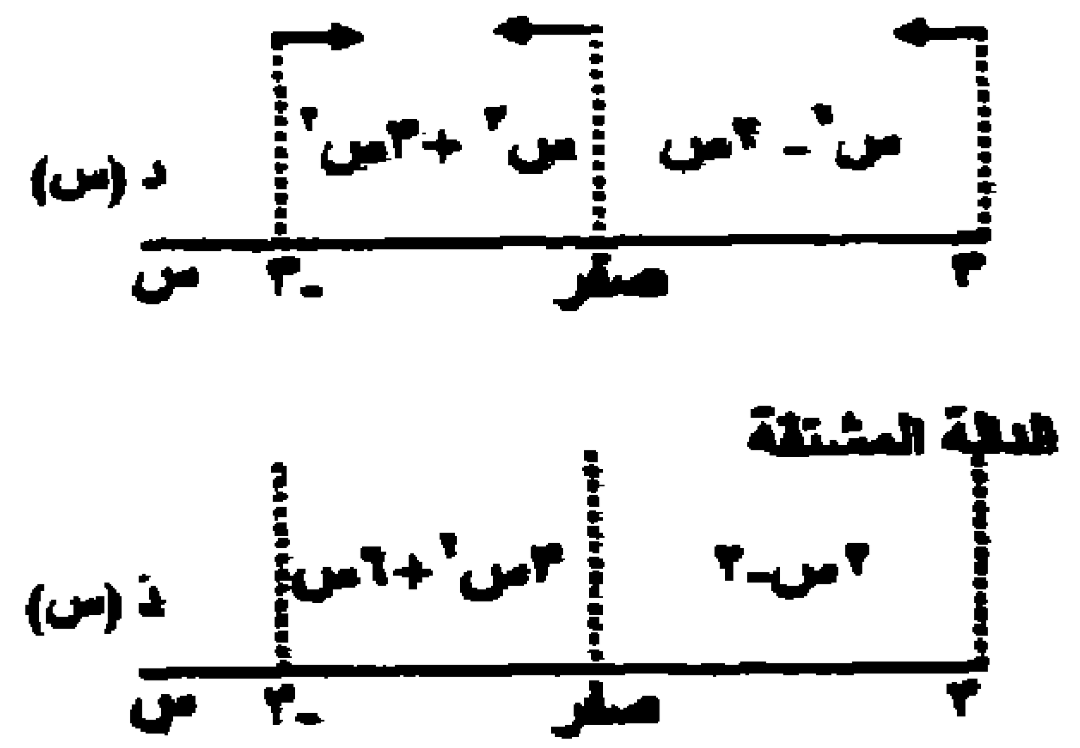
عند س = ٢ د(٢) = ٠

عند س = ٣ د(٣) = ١

عند س = ٥ د(٥) = -١

∴ القيمة الصغرى المطلقة = -١، العظمى المطلقة = ١

[vii] نعرف الدالة على خط الأعداد



دَ(س) = ٠ عندما ٢س-٢ = ٠ أي س= ١

، عندما ٣س² + ٦س = ٠ أي ٣س (س+٢) = ٠

أي س=٠ أ، س=-٢

عند س= ١ د(١) = -١

عند س = ٠ د(٠) = ٠

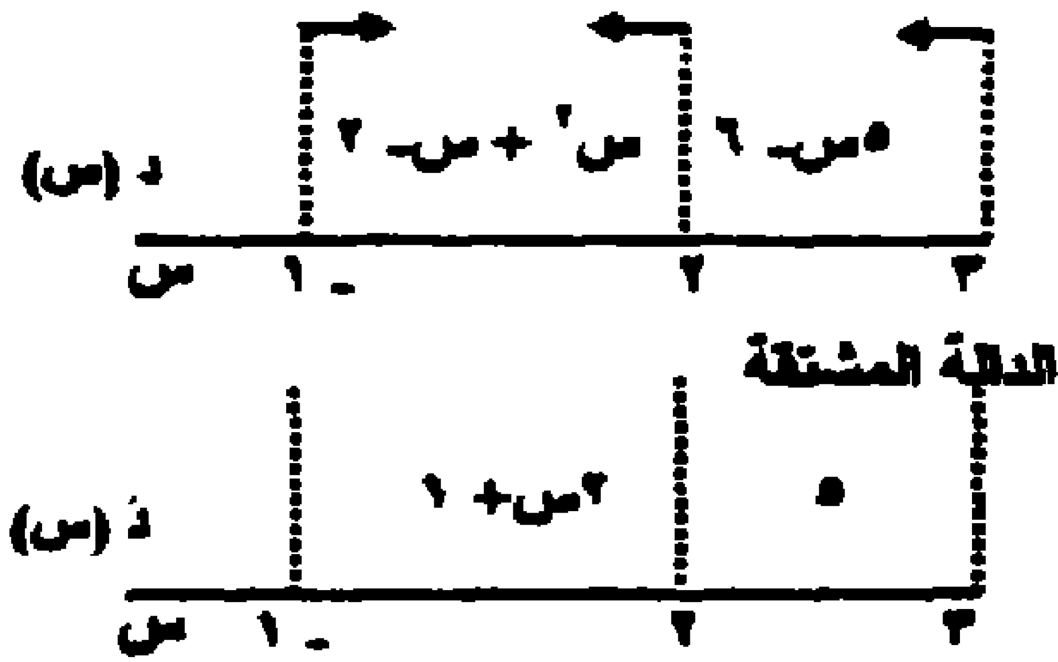
عند= -٢ د(-٢)= ٤

عند س= -٣ د(-٣) = ٠

عند س= ٣ د(٣) = ٣

∴ القيمة الصغرى المطلقة = -١ ، العظمى المطلقة = ٤

[viii] نعرف الدالة على خط الأعداد



دَ (س) = ٠ عندما ٢س+ ١ = ٠

أي س = - $\frac{١}{٢}$

عند س = - $\frac{١}{٢}$ د(س) = - ٢ $\frac{١}{٤}$

عند س = -١ د(س) = -٢

عند س= ٢ د(٢) = ٤

عند س = ٣ د(٣) = ٩

∴ القيمة الصغرى المطلقة = - ٢ $\frac{١}{٤}$ ، العظمى المطلقة = ٩

(٣) نفرض أن ص = س + $\frac{١}{س}$ حيث س> ٠

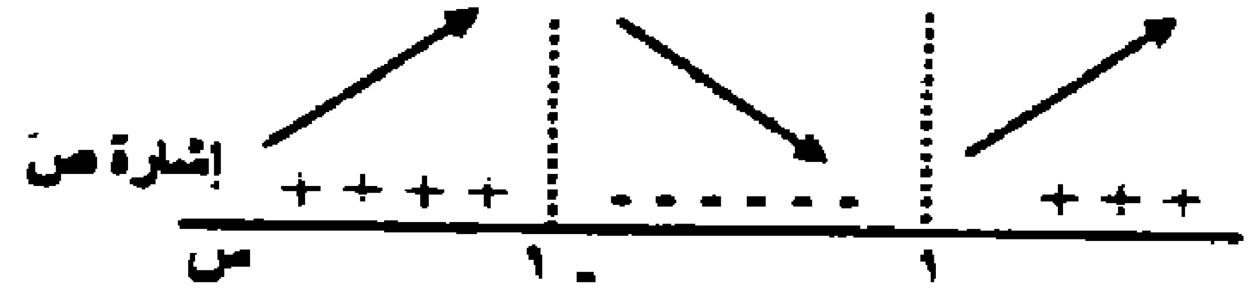
∴ صَ = ١ - $\frac{١}{س^٢}$ = $\frac{س^٢-١}{س^٢}$

صَ = ٠ عندما س²-١ = ٠

أي (س-١) (س+١) = ٠

أي س=١ أ، س=-١ ولكن س

نبحث إشارة صَ على خط الأعداد



من إشارة صَ فإن ص أصغر ما يمكن

عندما س = ١

وعندئذ ص = ١ + $\frac{١}{١}$ = ٢

أي أقل قيمة لـ ص = ٢

∴ س + $\frac{١}{س}$ > ٢

(٤) ∵ د(س) = س^{٢} + ل س + م

∴ القيمة الصغرى = ٣ عندما س = ١

∴ النقطة (١، ٣) ∈ لمنحنى الدالة

∴ ٣ = ١ + ل + م

∴ ل + م = ٢ —— (١)

دَ (س) = ٢س + ل

عند القيمة الصغرى المحلية دَ(١) = ٠

∴ ٠ = ٢ + ل ⟸ ل = -٢

من (١) ∴ م = ٤

(٥) ∵ س^{٢}ص + أ س + ب ص = ٠

∵ (٢، $\frac{٥}{٢}$) نقطة انقلاب ∴ ∈ للمنحنى

∴ ٤ × $\frac{٥}{٢}$ + ٢أ + $\frac{٥}{٢}$ ب = ٠

∴ ٤أ + ٥ ب = -٢٠ —— (١)

ص(س^{٢} + ب) = - أ س

∴ ص = $\frac{- أ س}{س^{٢} + ب}$

∴ صَ = $\frac{أ س^{٢} - أ ب}{(س^{٢} + ب)^{٢}}$

، صً = $\frac{٢ أ س(س^{٢} + ب) (س^{٢} - ٣ب)}{(س^{٢} + ب)^{٤}}$

∴ صً = $\frac{٢ أ س(س^{٢} - ٣ب)}{(س^{٢} + ب)^{٣}}$

∵ (٢، ٥) نقطة انقلاب

∴ صً = ٠ عندما س = ٢

∴ ٠ = $\frac{٤ أ (٤ - ٣ب)}{(٤ + ب)^{٣}}$

∴ ٤ أ (٤ - ٣ب) = ٠

∴ ب = $\frac{٤}{٣}$ ، أ = ٠

من (١) أ = - $\frac{٢٠}{٣}$

من (١) ب = -٤

وهذا مرفوض لأنه في هذه الحالة ص غير معرفة عند س = ± ٢

∴ ص = $\frac{٢٠ س}{٣(س^{٢} + \frac{٤}{٣})}$ أي أن ص = $\frac{٢٠ س}{٣ س^{٢} + ٤}$

(٦) نفرض أن عدد الأجهزة الزائدة س وأن الربح ص

الربح = عدد الأجهزة × ربح الجهاز الواحد

∴ ص = (٥٠ + س) (٣٠ - $\frac{١}{٢}$ س)

∴ ص = ١٥٠٠ + ٥ س - $\frac{١}{٢}$ س^{٢}

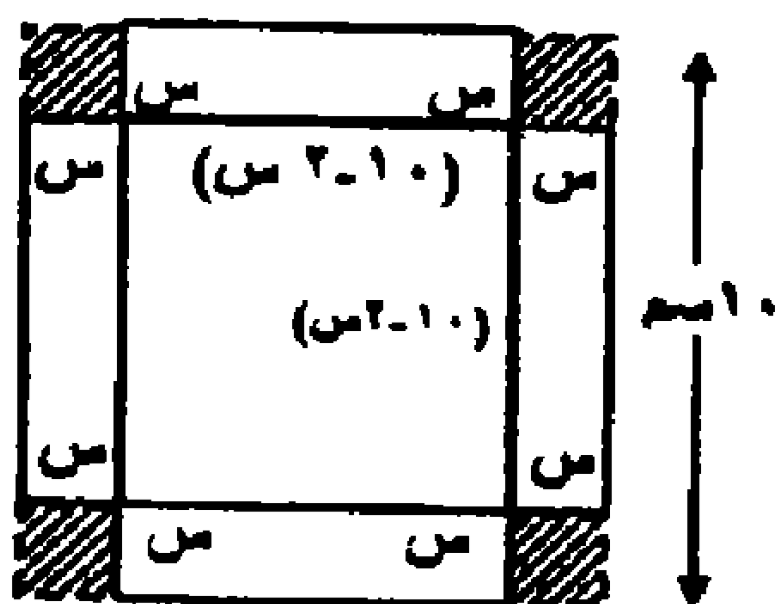
صَ = ٥ - س ∴ صً = -١

صَ = ٠ عندما س = ٥ ، ∵ صً سالب

∴ ص أكبر ما يمكن عندما س = ٥

∴ عدد الأجهزة الذي تحقق أكبر ربح = ٥٠ + ٥ = ٥٥

(٧) نفرض أن طول ضلع المربع المقطوع س



حجم العلبة ح = س(١٠-٢س)^{٢}

حَ = س×٢(١٠-٢س) × -٢ + (١٠-٢س)^{٢} × ١

∴ حَ = (١٠-٢س) (١٠ - ٦س)

حً = (١٠-٢س)× -٦ + (١٠ - ٦س)× -٢

أي أن حً = ٢٤ س - ٨٠

حَ = ٠ عندما (١٠-٢س) (١٠ - ٦س) = ٠

أي س = ٥ أ، س = $\frac{٥}{٣}$

عند س = ٥ ∴ حً موجب

، عند س = $\frac{٥}{٣}$ ∴ حً سالب أي أن ح عظمى

∴ حجم العلبة أكبر ما يمكن عندما يكون

طول ضلع المربع = $\frac{٥}{٣}$

(٨) نفرض أن العددين هما س، ١٦ - س لاحظ أن

مجموعهما ١٦ وأن مجموع مربعيهما هو ص

∴ ص = س^{٢} + (١٦ - س)^{٢}

∴ ص = ٢س^{٢} - ٣٢س + ٢٥٦

صَ = ٤س - ٣٢ ، صً = ٤

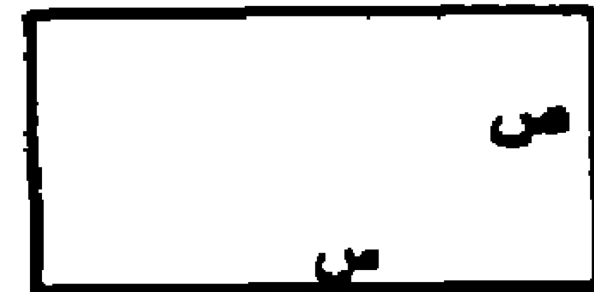
∴ صَ = ٠ عندما ٤س - ٣٢ = ٠

أي س = ٨ ∵ صً موجب

∴ ص أصغر ما يمكن عندما س = ٨

∴ العددان هما ٨ ، ٨

(٩) نفرض أن أبعاد المستطيل س، ص



∴ ٢س + ٢ص = ل لاحظ أن ل(طول السلك) ثابت

∴ ص = $\frac{١}{٢}$ (ل - ٢س)

نفرض مساحة المستطيل م = س ص

= س × $\frac{١}{٢}$ (ل - ٢س)

∴ م = $\frac{١}{٢}$ ل س - س^{٢}

∴ مَ = $\frac{١}{٢}$ ل - ٢س ، مً = -٢

مَ = ٠ عندما $\frac{١}{٢}$ ل - ٢س = ٠

أي س = $\frac{١}{٤}$ ل

∵ مً سالب

∴ م أكبر ما يمكن عندما س = $\frac{١}{٤}$ ل

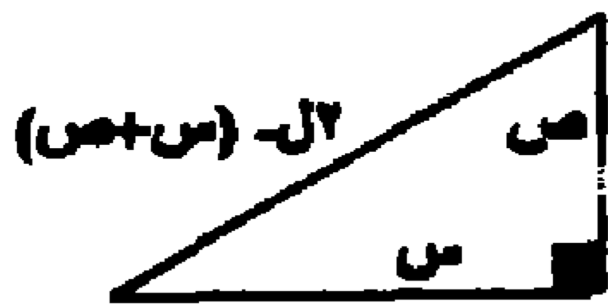
∴ ص = $\frac{١}{٢}$ (ل - $\frac{٢}{٤}$ ل) = $\frac{١}{٤}$ ل

∴ أبعاد المستطيل $\frac{١}{٤}$ ل ، $\frac{١}{٤}$ ل

(١٠) نفرض أن طول ضلعي القائمة س، ص

∴ طول الضلع الثالث = ٢ل - (س+ص)

∵ المثلث قائم الزاوية



∴ س^{٢} + ص^{٢}

= [٢ل - (س+ص)]^{٢}

∴ س^{٢} + ص^{٢} = ٤ل^{٢} - ٤ل(س+ص) + (س+ص)^{٢}

∴ ٤ل ص - ٢س ص = ٤ل^{٢} - ٤ل س

∴ ص = $\frac{٢ل(ل-س)}{(٢ل-س)}$ حيث ل ثابت —— (١)

مساحة المثلث م = $\frac{١}{٢}$ س × ص

= $\frac{١}{٢}$ س × $\frac{٢ل(ل-س)}{(٢ل-س)}$

∴ م = $\frac{ل^{٢}س - ل س^{٢}}{(٢ل-س)}$

∴ مَ = $\frac{(ل^{٢} - ٢ل س)(٢ل-س) + (ل^{٢}س - ل س^{٢})}{(٢ل-س)^{٢}}$

∴ مَ = $\frac{ل(س^{٢} - ٤ل س + ٢ل^{٢})}{(٢ل-س)^{٢}}$

مَ = ٠ عندما ل(س^{٢} - ٤ل س + ٢ل^{٢}) = ٠

أي $س^2 - ٤ل س + ٢ل^2 = ٠$

$$س = \frac{٤ل \pm \sqrt{١٦ل^2 - ٤\times١\times٢ل^2}}{٢\times١}$$

$$س = \frac{٤ل \pm ٢ل\sqrt{٢}}{٢\times١}$$

$س = ل(٢ \pm \sqrt{٢})$

ولكن $س < ٢ل$ طول السلك

∴ $س = ل(٢ - \sqrt{٢})$

من (١) ∴ $ص = ل(٢ - \sqrt{٢})$

∴ طول الضلع الثالث $= ٢ل(\sqrt{٢} - ١)$

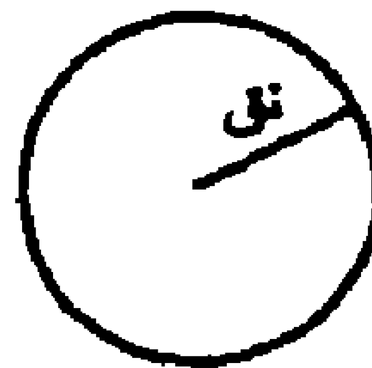
(١١) نفرض أن طول جزئي السلك س، ٣٤ - س

نق

∴ $٢ط نق = س$

∴ $نق = \frac{س}{٢ط}$

مساحة الدائرة $م_١ = ط\left(\frac{س}{٢ط}\right)^2$



∴ $م_١ = \frac{١}{٤ط}س^2$

محيط المربع = ٣٤ - س

∴ طول ضلعه $= \frac{١}{٤}(٣٤ - س)$

مساحة المربع $م_٢ = \frac{١}{١٦}(٣٤ - س)^2$

مجموع مساحتي الشكلين $م = م_١ + م_٢$

∴ $م = \frac{١}{٤ط}س^2 + \frac{١}{١٦}(٣٤ - س)^2$

∴ $م' = \frac{١}{٢ط}س + \frac{١}{٨}(٣٤ - س)\times -١$

∴ $م' = \frac{١}{٢ط}س + \frac{١}{٨}(س - ٣٤)$

$م' = \frac{١}{٢ط}\left(\frac{١}{٢} + \frac{١}{٤}\right)س - \frac{١٧}{٤}$

$م' = ٠$ عندما $س = \frac{٣٤ط}{ط + ٤}$

$م'' = \frac{١}{٢}\left(\frac{١}{ط} + \frac{١}{٤}\right)$ موجب

∴ مجموع مساحتي الشكلين أقل ما يمكن عندما يكون

طول الجزء المثنى على شكل مربع $= \frac{٣٤ط}{ط + ٤}$

وطول الجزء المثنى على شكل دائرة $= ٣٤ - \frac{٣٤ط}{ط + ٤}$

$= \frac{١٣٦}{ط + ٤}$ "يصحح جواب الكتاب"

(١٢) ∵ التكاليف α $ع^2$

∴ التكاليف $= أ ع^2$ حيث أ ثابت

∴ $٢٥ = أ \times (٢٥)^2$ ∴ $أ = \frac{١}{٢٥}$

∴ التكاليف $= \frac{١}{٢٥}ع^2$

التكاليف الفعلية في الساعة $= \frac{١}{٢٥}ع^2 + ١٠٠$

لاحظ أن التكلفة الإضافية ١٠٠

∴ تكاليف الكيلومتر الواحد $ت = \left(\frac{١}{٢٥}ع^2 + ١٠٠\right) \div ع$

حيث ع هى المسافة المقطوعة من الساعة

∴ $ت = \frac{١}{٢٥}ع + \frac{١٠٠}{ع}$

∴ $ت' = \frac{١}{٢٥} - \frac{١٠٠}{ع^2}$

$ت'' = + \frac{١٠٠\times٢ع}{ع^4} = \frac{٢٠٠}{ع^3}$

$ت' = ٠$ عندما $\frac{١}{٢٥} - \frac{١٠٠}{ع^2} = ٠$

أي $ع^2 = ٢٥٠٠$ $ع = \pm ٥٠$

عندما $ع = ٥٠$ ∴ $ت''$ موجب

∴ التكلفة للكيلومتر الواحد أقل ما يمكن عندما تكون سرعة القاطرة ٥٠كم/ ساعة

(١٣) المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

∴ $٢٤ط = ٢ط نق ع + ٢(ط نق^2)$

بالقسمة على ٢ط ∴ $ع = \frac{١٢ - نق^2}{نق}$

حجم الأسطوانة $ح = ط نق^2 ع$

$= ط نق^2 \times \frac{١٢ - نق^2}{نق}$

∴ ح = ١٢ ط نق - ط نق^{٣}

∴ حَ = ١٢ط - ٣ط نق^{٢}

حً = - ٦ط نق سالب دائماً

حَ = ٠ عندما ١٢ط - ٣ط نق^{٢}

أى نق = ± ٢ السالب مرفوض

∴ الحجم أكبر ما يمكن عندما نصف القطر القاعدة = ٢

وارتفاعها ع = $\frac{١٢ - ٤}{٢}$ = ٤

أكبر حجم ح = ط × (٢)^{٢} × ٤ = ١٦ ط سم^{٣}

(١٤) نفرض أن عرض العلبة س

∴ الارتفاع ٢س الحجم (السعة) = ٩٠٠٠

∴ س × ٢س × ص = ٩٠٠٠ حيث ص طول قاعدتها

∴ ص = $\frac{٤٥٠٠}{س^{٢}}$

المساحة الكلية = ٢(س ص) + ٢(س×٢س)

+ ٢(ص × ٢س)

م = ٤س^{٢} + ٦س ص

∴ م = ٤س^{٢} + ٦س × $\frac{٤٥٠٠}{س^{٢}}$

م = ٤س^{٢} + $\frac{٤٥٠٠×٦}{س}$

مَ = ٨ س - $\frac{٤٥٠٠×٦}{س^{٢}}$

مً = ٨ + $\frac{٤٥٠٠×١٢}{س^{٣}}$ موجب دائماً

مَ = ٠ عندما ٨س - $\frac{٤٥٠٠×٦}{س^{٢}}$ = ٠

أى عندما س = ١٥

∴ م أقل ما يمكن عندما تكون الأبعاد

١٥، ٢٠، ٣٠

(١٥) نفرض أن نصف القطر نق

∵ مجموع مساحتى الكرة والإسطوانة = ٢٥٠ط

∴ ٤ط نق^{٢} + ٢ط نق ع + ٢ط نق^{٢} = ٢٥٠ ط

لاحظ المقصود هو المساحة الكلية للاسطوانة بالقسمة على ٢ ط

∴ نق ع = ١٢٥ - ٣نق^{٢}

∴ ع = $\frac{١٢٥}{نق}$ - ٣ نق

مجموع الحجمين ح = $\frac{٣}{٤}$ ط نق^{٣} + ط نق^{٢} ع

∴ ح = $\frac{٣}{٤}$ ط نق^{٣} + ١٢٥ط نق - ٣ ط نق^{٣}

∴ حَ = ٤ط نق^{٢} + ١٢٥ط - ٩ط نق^{٢}

∴ حَ = ١٢٥ط - ٥ط نق^{٢}

حً = - ١٠ط نق سالب دائماً

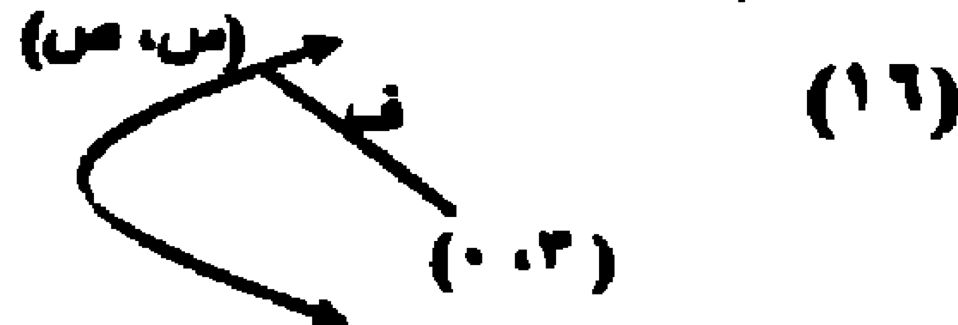
حَ = ٠ عندما ٤ط نق - ١٢٥ط - ٥ط نق^{٢} = ٠

أى عندما نق = ± ٥

ولكن نق = -٥ مرفوض

∴ ح أكبر ما يمكن عندما نق = ٥

(١٦)



نفرض أن النقطة هى (س، ص) والمسافة ف

∴ ف^{٢} = (س - ٣)^{٢} + (ص - ٠)^{٢}

∴ ف^{٢} = س^{٢} - ٦س + ٩ + ص^{٢}

(س،ص) ∈ للمنحنى ∴ تحقق معادلته

∴ ص^{٢} = ٤س + ٥ —— (١)

∴ ف^{٢} = س^{٢} - ٦س + ٩ + ٤س + ٥

∴ ف^{٢} = $\sqrt{س^{٢} - ٢س + ١٤}$

∴ فَ = $\frac{٢س - ٢}{٢\sqrt{س^{٢} - ٢س + ١٤}}$

فَ = ٠ عندما ٢س - ٢ = ٠ أى س = ١

فً = $\frac{١٣}{(س^{٢} - ٢س + ١٤)^{\frac{٣}{٢}}}$ موجب دائماً

∴ ف أقل ما يمكن عندما س = ١

من (١) ص² = ٩ ∴ ص = ± ٣

∴ النقط هي (١، ٣) ، (١، -٣)

(١٧) نفرض أن نصف قطر الدائرة = نق

وأن طول النافذة = س

محيط النافذة = ٦

∴ ٢نق + ٢س + ط نق = ٦

∴ س = (٦ - ط نق - ٢نق) × $\frac{١}{٢}$

مساحة النافذة م = ٢ نق × س + $\frac{١}{٢}$ ط نق²

∴ م = نق (٦ - ط نق - ٢ نق) + $\frac{١}{٢}$ ط نق²

∴ م = ٦ نق - ٢نق² - $\frac{١}{٢}$ ط نق

مَ = ٦ - ٤ نق - ط نق

مً = -٤ - ط سالب دائماً

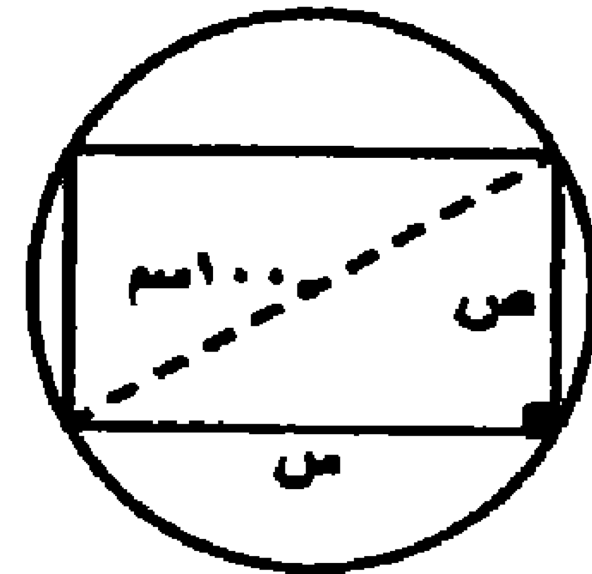
مَ = ٠ عندما ٦ - ٤نق - ط نق = ٠

أي نق (٤ + ط) = ٦

∴ نق = $\frac{٦}{ط + ٤}$

م أكبر ما يمكن عندما نصف القطر = $\frac{٦}{٤ + ط}$

(١٨) نفرض أن بعدي المستطيل هما س، ص



من هندسة الشكل س² + ص² = ١٠٠٠٠ —— (١)

نفرض أن قوة الاحتمال ق

∴ ق α س × ص²

∴ ق = أ س ص² حيث أ ثابت

من (١) ص² = ١٠٠٠٠ - س²

∴ ق = أ س (١٠٠٠٠ - س²)

∴ ق = ١٠٠٠٠ أ س - أ س³

قَ = ١٠٠٠٠ أ - ٣ أ س²

قً = -٣أ × ٢س = -٦ أ س سالب

قَ = ٠ عندما ١٠٠٠٠أ - ٣أس² = ٠

أي عندما س² = $\frac{١٠٠٠٠}{٣}$

أي س = ± $\frac{١٠٠}{\sqrt{٣}}$

" الجواب السالب مرفوض حيث س طول "

س = $\frac{١٠٠}{\sqrt{٣}}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}}$ = $\frac{١٠٠\sqrt{٣}}{٣}$

والبعد الآخر ص = + ١٠٠٠٠ -

= ١٠٠ $\sqrt{\frac{٢}{٣}}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}}$ = $\frac{١٠٠\sqrt{٦}}{٣}$

∴ بعدي المستطيل $\frac{١٠٠\sqrt{٣}}{٣}$ ، $\frac{١٠٠\sqrt{٦}}{٣}$ سم

(١٩) [أ]

ص = س³ - ٣س² + ٣س

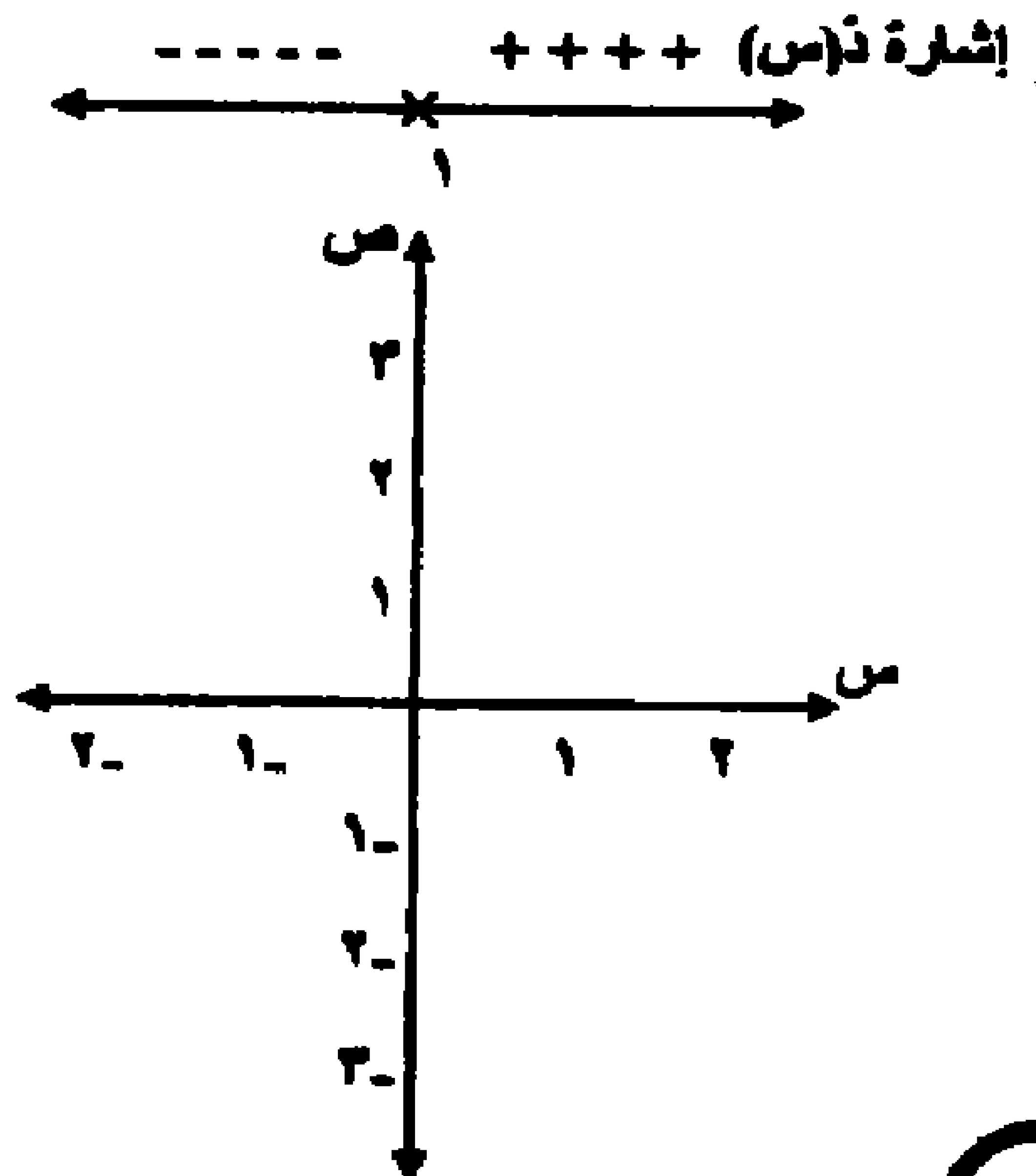
صَ = ٣س² - ٦س + ٣

٣(س² - ٢س + ١) = ٣(س - ١)² > ٠ حيث س ≠ ١

صَ = ٠ عندما س = ١ صً = ٦ (س - ١)

صً = ٠ عندما س = ١ ∴ (١، ١) نقطة إنقلاب

إشارة ذ(س) ++++ -----

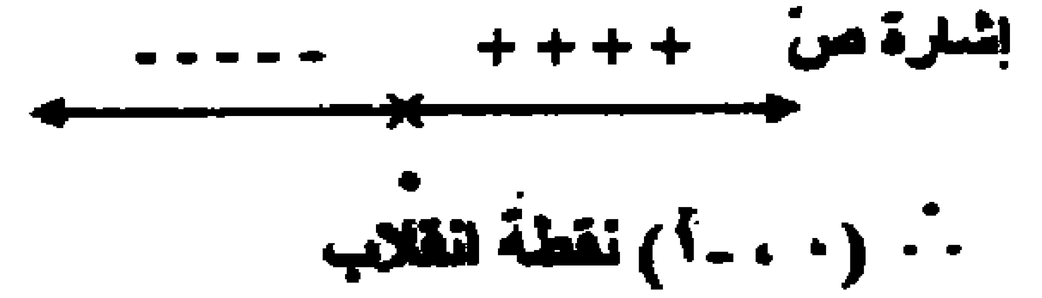


[ب] ص = س^٣ + ٣س - ١

ص' = ٣س^٢ + ٣ = ٣(س^٢ + ١) > ٠

ص'' = ٦س

إشارة ص''



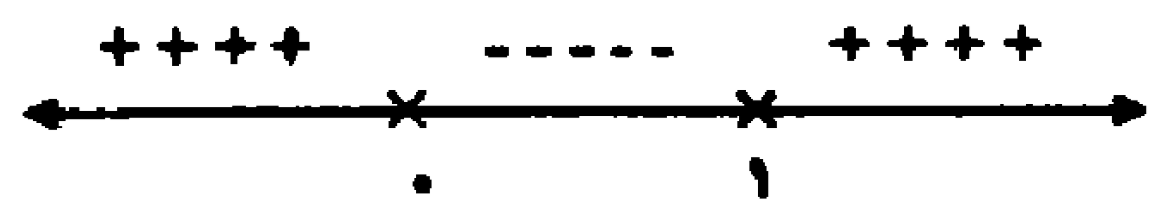
∴ (٠ ، -١) نقطة انقلاب

[ج] ص = ٢س^٣ - ٣س^٢

ص' = ٦س^٢ - ٦س = ٦س(س - ١)

ص' = ٠ عندما س = ٠ أو س = ١

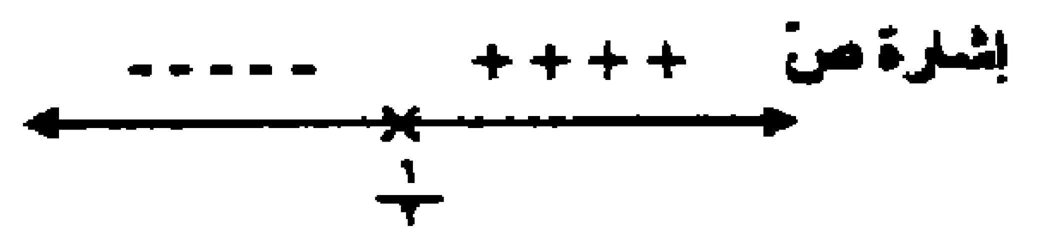
إشارة ص'



(٠،٠) عظمى محلية ، (١،-١) صغرى محلية

ص'' = ١٢س - ٦ = ٦ (٢س - ١)

إشارة ص''



(١/٢ ، - ١/٢) نقطة انقلاب

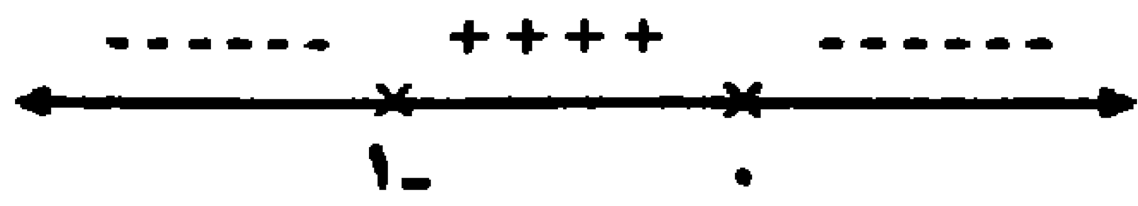
[ء] ص = ٣ - ٣س^٢ - ٢س^٣

ص' = - ٦س - ٦س^٢

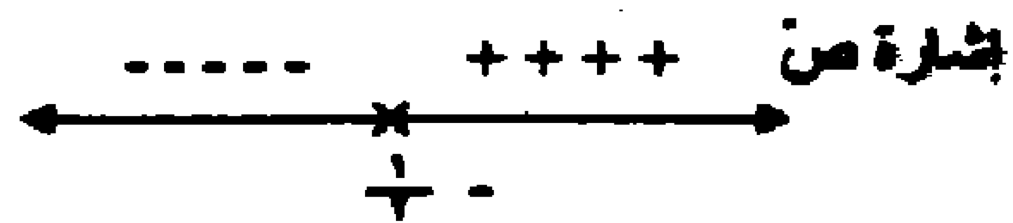
= - ٦ س(١ + س)

ص'' = - ٦ - ١٢س = - ٦(١ + ٢س)

إشارة ص'



إشارة ص''



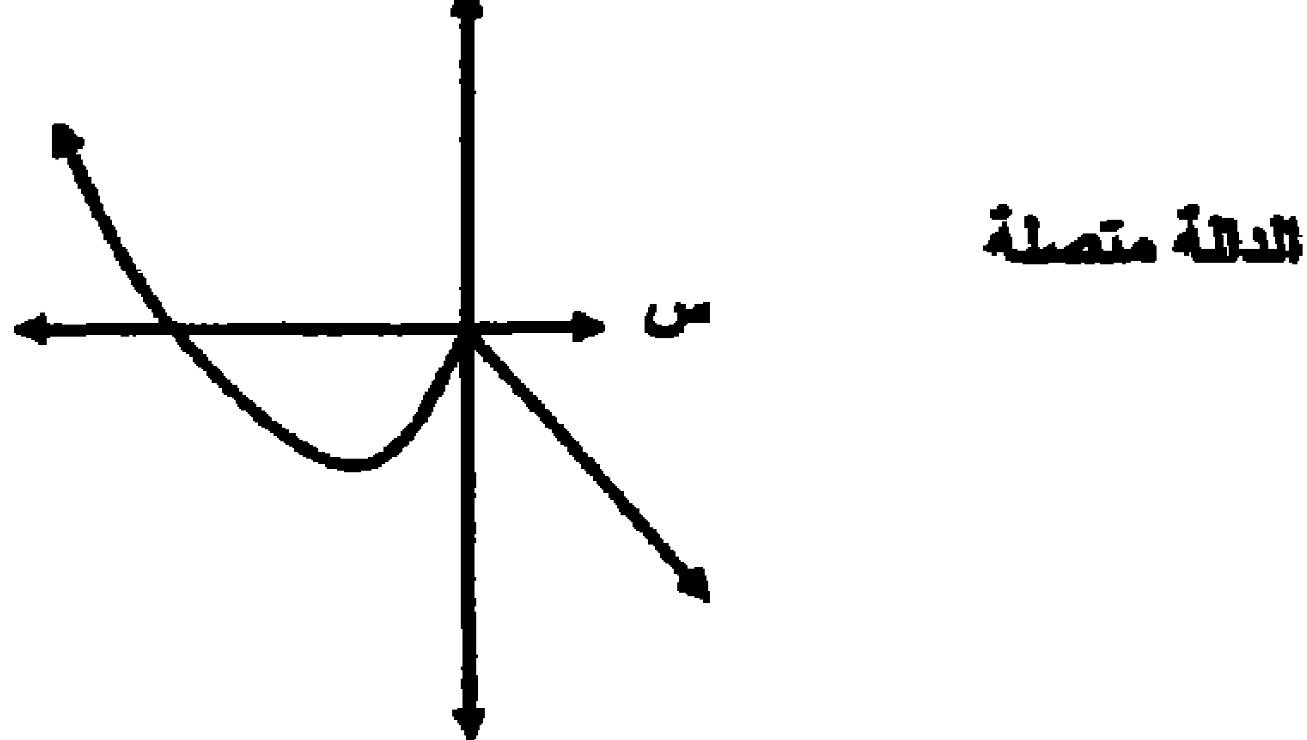
(٠، ٣) عظمى محلية ، (-١، ٢) صغرى محلية

، (- ١/٢ ، ٥/٢) نقطة انقلاب

[هـ] (-١، -١) صغرى محلية ، (٠،٠) عظمى محلية

نقط مساعدة (٠،٠) ، (-٢، ٠)

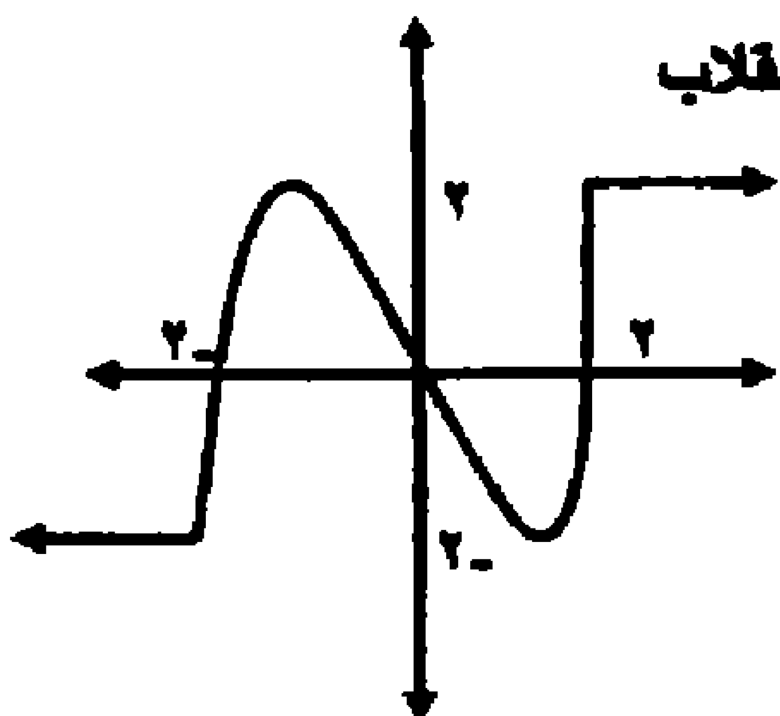
الدالة متصلة



[و] (-١، ٢) عظمى محلية ، (١،-٢) صغرى محلية

(٢،٢) عظمى محلية . (-٢،-٢) صغرى محلية

(٠،٠) نقطة الانقلاب



[ز] $د(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٢س & ، س \geq ٠ \\ س^{٣} + ٢س & ، س < ٠ \end{cases}$

الدالة متزايدة المنحنى

محدب لأعلى فى الفترة

$]-\infty ، ٠[$

ولأسفل فى $]٠ ، \infty[$

(٠،٠) نقطة انقلاب

** نقط مساعدة

(١، ٣) ، (-١، -٣)

<u>حلول تمرين (٩)</u>

(١) $\int ٥س \, ءس = \frac{٥}{٢} س^{٢} + ث$

(٢) $\int \frac{ءس}{٨} = \int \frac{١}{٨} \, ءس = \frac{١}{٨} س + ث$

(٣) $\int \frac{ب^{٢}}{أ^{٢}} س^{٢} \, ءس = \frac{ب^{٢}}{٣أ^{٢}} س^{٣} + ث$ حيث أ ، ب ثوابت

(٤) $\int (٣س^{٢} - س + ١) = س^{٣} - \frac{١}{٢} س^{٢} + س + ث$

(٥) $\int (٤س^{٣} - ٦س^{٢} + ٨س - ٥) \, ءس$

$= س^{٤} - ٢س^{٣} + ٤س^{٢} - ٥س + ث$

(٦) $\int (٢س^{٧} - ٦س^{٣} + ٨س + ١) \, ءس$

$= \frac{١٠}{٤} س^{٨} - \frac{٣}{٤} س^{٤} + ٤س^{٢} + س + ث$

(٧) $\int (س-٢)(س+١)(س-١) \, ءس$

$= \int (س-٢)(س^{٢}-١) \, ءس$

$= \int (س^{٣} - ٢س^{٢} - س + ٢) \, ءس$

$= \frac{١}{٤} س^{٤} - \frac{٢}{٣} س^{٣} - \frac{١}{٢} س^{٢} + ٢س + ث$

(٨) $\int \frac{س^{٣} + م^{٢} س}{س} \, ءس$ حيث م ثابت

$= \int (س^{٢} + م^{٢}) \, ءس$

$= \frac{١}{٢} س^{٢} + م^{٢} س + ث$

(٩) $\int (س-أ)(س-ب) \, ءس$ حيث أ، ب ثوابت

$= \int (س^{٢} - أس - بس + أب) \, ءس$

$= \frac{١}{٣} س^{٣} - \frac{١}{٢} أس^{٢} - \frac{١}{٢} بس^{٢} + أب + ث$

(١٠) $\int \sqrt{س} \, (١ + \sqrt{س}) \, ءس$

$= \int (س^{\frac{١}{٢}} + س) \, ءس$

$= \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + \frac{١}{٢} س^{٢} + ث$

(١١) $\int \frac{١ + س}{\sqrt{س}} \, ءس = \int س^{-\frac{١}{٢}} (١ + س) \, ءس$

$= \int (س^{-\frac{١}{٢}} + س^{\frac{١}{٢}}) \, ءس$

$= ٢ س^{\frac{١}{٢}} + \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + ث$

(١٢) $\int (س + \frac{١}{س})^{٢} \, ءس$

$= \int (س^{٢} + ٢ + س^{-٢}) \, ءس$

$= \frac{١}{٣} س^{٣} + ٢س - س^{-١} + ث$

(١٣) $\int (\sqrt{س} - ١)^{٢} \, ءس$

$= \int (س - ٢س^{\frac{١}{٢}} + ١) \, ءس$

$= \frac{١}{٢} س^{٢} - \frac{٤}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + س + ث$

(١٤) $\int \frac{ءن}{\sqrt[٣]{ن^{٤}}} = \int ن^{-\frac{٤}{٣}} \, ءن$

$= -٣ ن^{-\frac{١}{٣}} + ث$

(١٥) $\int (٧س - ٣)^{٨} \, ءس$ بالضرب $\times \frac{١}{٧} \times ٧$

$= \frac{١}{٧} \times \int ٧ (٧س - ٣)^{٨} \, ءس$

لاحظ أن: $\int هـ'(س) \times [هـ(س)]^{ن} \, ءس$

$= \frac{١}{ن+١} \, [هـ(س)]^{ن+١} + ث$

المقدار $= \frac{١}{٧} \times \frac{١}{٩} (٧س-٣)^{٩} + ث$

$= \frac{١}{٦٣} (٧س - ٣)^{٩} + ث$

(١٦) $\int (٢-س)^{٩} \, ءس$

$= - \int -(٢-س)^{٩} \, ءس$

$= - \frac{١}{١٠} (٢-س)^{١٠} + ث$

(١٧) $\int \left(\frac{س+٢}{٣}\right)^{\frac{١}{٤}} \, ءس$

$= ٣ \times \int \frac{١}{٣} \left(\frac{١}{٣}س + \frac{٢}{٣}\right)^{\frac{١}{٤}} \, ءس$

$= ٣ \times \frac{٤}{٥} \left(\frac{١}{٣}س + \frac{٢}{٣}\right)^{\frac{٥}{٤}} + ث$

$= \frac{١}{٣} \left(\frac{س+٢}{٣}\right)^{\frac{٥}{٤}} + ث$

(١٨) $\int (س^{٢} + ٢)^{٣} \, ءس$

$= \int (س^{٦} + ٣ \times س^{٤} \times ٢ + ٣س^{٢} \times ٤ + ٨) \, ءس$

$= \frac{١}{٧} س^{٧} + \frac{٦}{٥} س^{٥} + ٤س^{٣} + ٨س + ث$

(١٩) $\int \sqrt{٢س + ٧} \, ءس$

$= \frac{١}{٢} \int ٢(٢س+٧)^{\frac{١}{٢}} \, ءس$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{٢}{٣} (٢س + ٧)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

$= \frac{١}{٣} (٢س + ٧)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

(٢٠) $\int \frac{٥ \, ءس}{(٢س - ١)^{٥}} = ٥ \int (٢س-١)^{-٥} \, ءس$

$= ٥ \times \frac{١}{٢} \int ٢ (٢س-١)^{-٥} \, ءس$

$= \frac{٥}{٢} \times - \frac{١}{٤} (٢س-١)^{-٤} + ث$

$= - \frac{٥}{٨} (٢س-١)^{-٤} + ث$

(٢١) $\int \frac{ءس}{\sqrt[٣]{(س+٩)^{٢}}} = \int (س+٩)^{-\frac{٢}{٣}} \, ءس$

$= ٣ (س + ٩)^{\frac{١}{٣}} + ث$

(٢٢) $\int س^{٥} \left(١ - \frac{٣}{س}\right)^{٥} \, ءس$

$= \int \left[س\left(١ - \frac{٣}{س}\right)\right]^{٥} \, ءس$

$= \int (س-٣)^{٥} \, ءس = \frac{(س-٣)^{٦}}{٦} + ث$

(٢٣) $\int \frac{س^{٣} - ٢٧}{س - ٣} \, ءس$

$= \int \frac{(س-٣)(س^{٢}+٣س+٩)}{(س-٣)} \, ءس$

$= \int (س^{٢} + ٣س + ٩) \, ءس$

$= \frac{١}{٣} س^{٣} + \frac{٣}{٢} س^{٢} + ٩س + ث$

(٢٤) $\int (س) \sqrt{\frac{٢}{س^{٢}} - \frac{٣}{س}} \, ءس$

$= \int \sqrt{س^{٢} \left(\frac{٢}{س^{٢}} - \frac{٣}{س}\right)} \, ءس$

$= \int \sqrt{٢ - ٣س} \, ءس$

$= - \frac{١}{٣} \int -٣ (٢-٣س)^{\frac{١}{٢}} \, ءس$

$= - \frac{١}{٣} \times \frac{٢}{٣} (٢-٣س)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

$= - \frac{٢}{٩} (٢-٣س)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

(٢٥) $\int (٢س+١١) \sqrt{٢س + ١١} \, ءس$

= ∫ (٢س + ١١)$^{\frac{٣}{٢}}$. ءس

= $\frac{١}{٢}$ ∫ ٢(٢س + ١١)$^{\frac{٣}{٢}}$. ءس

= $\frac{١}{٢}$ × $\frac{٢}{٥}$ (٢س + ١١)$^{\frac{٥}{٢}}$ + ث

= $\frac{١}{٥}$ (٢س + ١١)$^{\frac{٥}{٢}}$ + ث

تمرين (١٠)

(١) ∫ ٢(٢ جاس جتاس) . ءس

= ٢ جا٢س . ءس = - جتا ٢س + ث

(٢) -٤ جتا $\frac{١}{٤}$ س + ث

(٣) ٥ جا $\frac{١}{٥}$ س + ث

(٤) $\frac{١}{٢}$ ظا ٢س + ث

(٥) -٥ جتا ($\frac{١}{٥}$ س + ١) + ث

(٦) $\frac{١}{٣}$ جا (٣س-١) + ث

(٧) ٥ ظا ($\frac{١}{٥}$ س-١) + ث

(٨) [- $\frac{١}{٤}$ جتا (٤س+١) + $\frac{١}{٤}$ جا (٤س+١)] + ث

(٩) [٨ جاس - ٤ ظاس] + ث

(١٠) [٦ جاس - ٢ظاس] + ٥

(١١) جا (٣س+٥) + ث

(١٢) ∫ $\frac{\text{س جتاس + ٢جتاس}}{\text{س + ٢}}$. ءس = ∫ جتاس . ءس

= جاس + ث

تمرين (١١)

(١) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣ - ٢س$^{-٢}$ + ٢س$^{-٣}$ حيث س ≠ ٠

بإجراء التكامل بالنسبة للطرفين

∴ ص = ∫(٣ - ٢س$^{-٢}$ + ٢س$^{-٣}$) . ءس

∴ ص = ٣س - $\frac{٢}{-١}$ س$^{-١}$ + $\frac{٢}{-٢}$ س$^{-٢}$ + ث

ص = ٣س + $\frac{٢}{\text{س}}$ - $\frac{١}{\text{س}}$ + ث

ولكن ص = ٢ عندما س = $\frac{١}{٢}$

∴ ٢ = $\frac{٣}{٢}$ + ٤ - ٤ + ث ∴ ث = $\frac{١}{٢}$

∴ ص = ٣س + $\frac{٢}{\text{س}}$ - $\frac{١}{\text{س}}$ + $\frac{١}{٢}$

(٢) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{٨س}^٣\text{-١}}{\text{٢س-١}}$

= $\frac{\text{(٢س-١) (٤س}^٢\text{+٢س+١)}}{\text{(٢س-١)}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٤ س^٢ + ٢س + ١

∴ ص = ∫(٤س^٢+٢س+١) . ءس

∴ ص = $\frac{٤}{٣}$ س^٣ + س^٢ + س + ث

ص = ١٠ عندما س = ١

∴ ١٠ = $\frac{٤}{٣}$ + ١ + ١ + ث ∴ ث = $\frac{٢٠}{٣}$

∴ ص = $\frac{٤}{٣}$ س^٣ + س^٢ + س + $\frac{٢٠}{٣}$

(٣) ص = ∫[١٢س$^{-٧}$ - ٤٩ (٧س-١٢)^٦] . ءس

= $\frac{١٢}{-٦}$ س$^{-٦}$ - $\frac{٤٩}{٧}$ × $\frac{١}{٧}$ (٧س-١٢)^٧ + ث

∴ ص = ٢س$^{-٦}$ - (٧س - ١٢)^٧ + ث

ص = ٠ عندما س = ٢

∴ ٠ = ٢ × ٦٤ - (١٤ - ١٢)^{٢} + ث

∴ ث = ٠

∴ ص = ٢س^{٣} - (٧س - ١٢)^{٢}

(٤) $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٢س+٧}{٣-٢ص}$

∴ (٣ - ٢ص) . ءص = (٢س + ٧) . ءس

∴ $\int$(٣ - ٢ص) . ءص = $\int$(٢س + ٧) . ءس

∴ ٣ص - ص^{٢} = س^{٢} + ٧س + ث

ص = ٣ عند س = ١

∴ ٩ - ٩ = ١ + ٧ + ث ⟸ ث = -٨

(٥) ميل المماس $\frac{ءص}{ءس}$ = ١ - ٢س$^{-٢}$

∴ ص = $\int$(١ - ٢س$^{-٢}$) . ءس

∴ ص = س + ٢س$^{-١}$ + ث

المنحنى يمر بالنقطة ($\frac{١}{٢}$ ، ٣)

∴ س = $\frac{١}{٢}$ عند ص = ٣

∴ ٣ = $\frac{١}{٢}$ + ٤ + ث ⟸ ث = - $\frac{١}{٢}$

∴ ص = س + $\frac{٢}{س}$ - $\frac{٣}{٢}$ بالضرب × ٢س

∴ ٢س^{٢} - ٢س ص - ٣س + ٤ = ٠

(٦) ميل المماس $\frac{ءص}{ءس} = \frac{س}{ص}$

∴ ص . ءص = س . ءس

∴ $\int$ص . ءص = $\int$س . ءس

∴ $\frac{١}{٢}$ ص^{٢} = $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + ث

∵ (٣، -٢) ∈ للمنحنى ∴ ص = -٢ عند س = ٣

∴ -٢ = $\frac{٩}{٢}$ + ث ⟸ ث = - $\frac{٥}{٢}$

∴ $\frac{١}{٢}$ ص^{٢} = $\frac{١}{٢}$ س^{٢} - $\frac{٥}{٢}$ بالضرب × ٢

∴ س^{٢} - ص^{٢} - ٥ = ٠

(٧) ميل المماس $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣س^{٢} - ٦س - ٢

∴ ص = س^{٣} - ٣س^{٢} - ٢س + ث

∵ (٣،-٢) ∈ للمنحنى ∴ ص = -٢ عندما س = ٣

∴ -٢ = ٢٧ - ٢٧ - ٦ + ث ⟸ ث = ٤

∴ ص = س^{٣} - ٣س^{٢} - ٢س + ٤

(٨) ميل العمودى = $\frac{-١}{٢س-٦}$

ميل المماس = $\frac{-١}{\text{ميل العمودى}}$ = ٢س - ٦

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢س - ٦ بإجراء التكامل

∴ ص = س^{٢} - ٦س + ث

∵ (٤،٥) ∈ للمنحنى ∴ ص = ٥ عندما س = ٤

∴ ٥ = ١٦ - ٢٤ + ث ⟸ ث = ١٣

∴ ص = س^{٢} - ٦س + ١٣

(٩) ميل المماس $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-١}{\sqrt{٣-٢س}}$

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\int$ -(٣-٢س)$^{-\frac{١}{٢}}$. ءس

∴ ص = - $\frac{١}{-٢}$ × ٢ (٣-٢س)$^{\frac{١}{٢}}$ + ث

∴ ص = $\sqrt{٣-٢س}$ + ث

(٣،١) ∈ للمنحنى ∴ ص = ٣ عندما س = ١

∴ ٣ = √(٣ـ ٢) + ث ⟸ ث = ٢

∴ ص = √(٣ـ ٢س) + ٢

(١٠) ءص/ءس = ٢س ـ ١/٣ س²

∴ ص = س² ـ ١/٩ س³ + ث

∵ (١،٠) ∈ للمنحنى ∴ ص = ١ عندما س = ٠

∴ ١ = ٠ + ث ⟸ ث = ١

∴ ص = س² ـ ١/٩ س³ + ١

عندما س = ٣ ∴ ص = ٩ ـ ٢٧/٩ + ١ = ١١/٢

∴ ميل المماس = ٢×٣ ـ ١/٢ × ٩ = ٣/٢

ميل العمودي = ـ ٣/٢

معادلة المماس (ص ـ ١١/٢) = ٣/٢ (س ـ ٣)

أي : ٣س ـ ٢ص + ٢ = ٠

معادلة العمودي (ص ـ ١١/٢) = ـ٢/٣ (س ـ ٣)

أي : ٤س + ٦ص ـ ٤٥ = ٠

(١١) ∵ ميل المماس = ءص/ءس = ٣(س² ـ ٦س + ٥)

∴ ص = س³ ـ ٩س² + ١٥س + ث

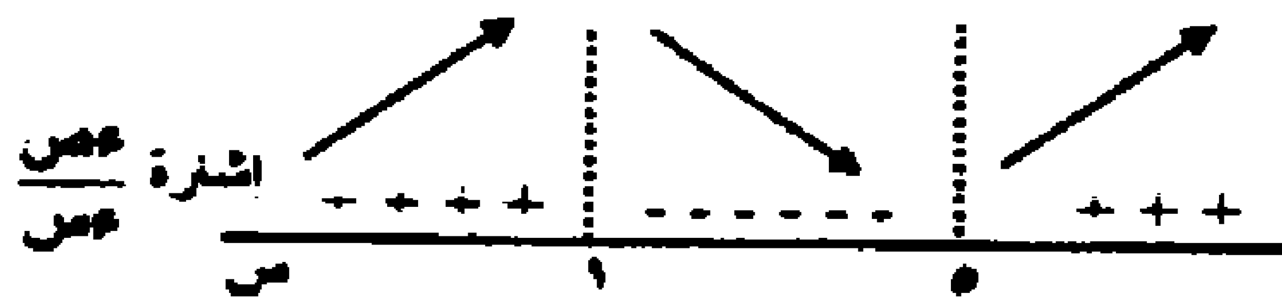
(٠،١٠) ∈ للمنحنى ∴ ص = ١٠ عندما س = ٠

∴ ث = ١٠

∴ ص = س³ ـ ٩س² + ١٥س + ١٠

ءص/ءس = ٠ عندما ٣(س ـ ١)(س ـ ٥) = ٠

أي س = ١ أ، س = ٥



عند س = ١ توجد عظمى محلية = ١ ـ ٩ + ١٥ + ١٠ = ١٧

عند س = ٥ توجد صغرى محلية

= ١٢٥ ـ ٢٢٥ + ٧٥ + ١٠ = ـ ١٥

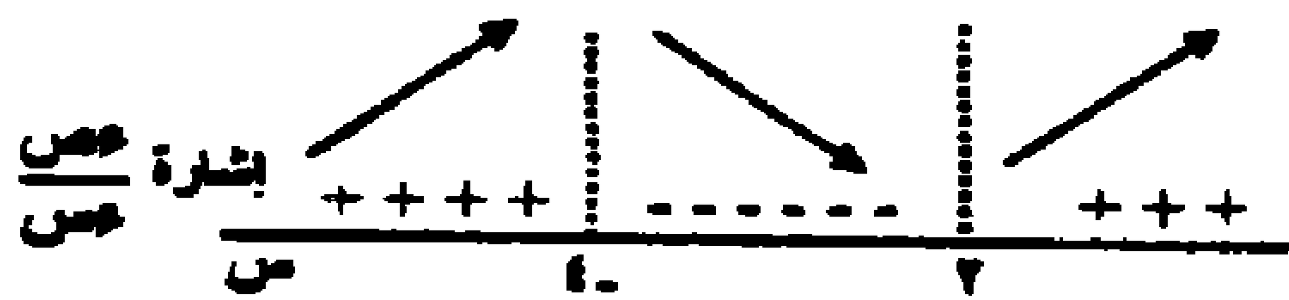
(١٢) ميل المنحنى ءص/ءس = س² + ٢س ـ ٨

∴ ص = ١/٣ س³ + س² ـ ٨س + ث —— (١)

عند القيم الصغرى والعظمى المحلية ءص/ءس = ٠

∴ س² + ٢س ـ ٨ = ٠

(س + ٤)(س ـ ٢) = ٠ ∴ س = ـ ٤ أ، س = ٢



من اشارة ءص/ءس توجد قيمة عظمى محلية = ٢٦ ٢/٣

عند س = ـ٤

∴ (ـ ٤ ، ٨٠/٣) ∈ للمنحنى

من (١)

∴ ٨٠/٣ = ـ ٦٤/٣ + ١٦ + ٣٢ + ث ⟸ ث = ٠

∴ ص = ١/٣ س³ + س² ـ ٨ س

عند س = ٢ توجد صغرى محلية = ـ ٢٨/٣

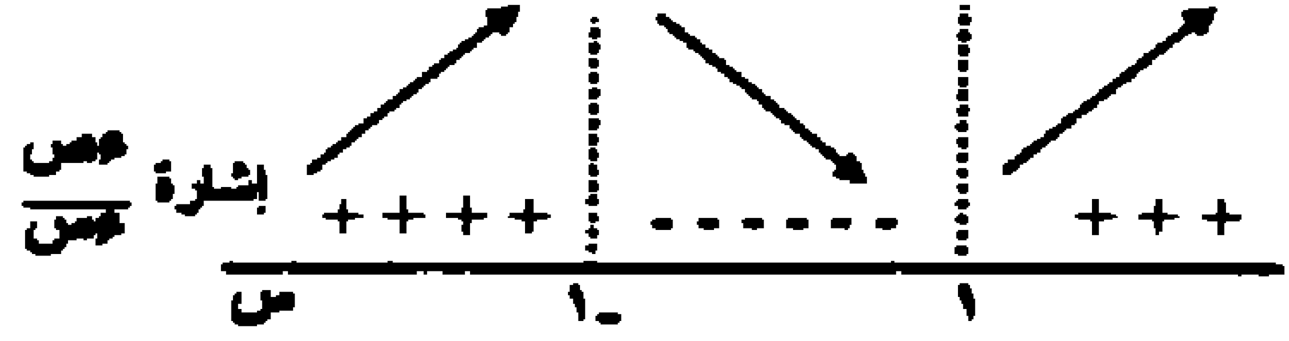
(١٣) ءص/ءس = ٣(س ـ ١)(س + ١) = ٣س² ـ ٣

∴ ص = س³ ـ ٣س + ث —— (١)

عند القيم العظمى والصغرى المحلية ءص/ءس = ٠

∴ $٣(س-١)(س+١) = ٠$

∴ $س = ١$ أ، $س = -١$



∴ عند $س = ١$ توجد صغرى محلية $= -٢$

من (١) ∴ $-٢ = ١ - ٣ + ث \Leftarrow ث = ٠$

∴ $ص = س^٣ - ٣س$

العظمى المحلية عند $س = -١$

∴ العظمى المحلية $= -١ + ٣ = ٢$

(١٤) $\frac{ءم}{ءن} = ٠,٠١٥ن^٢ + ٠,٠٢ن$ بإجراء التكامل

∴ $م = ٠,٠٠٥ن^٣ + ٠,٠١ن + ث$

ولكن $م = ٩٠$ عندما $ن = ١٠$

∴ $٩٠ = ٥ + ١ + ث \Leftarrow ث = ٨٤$

∴ $م = ٠,٠٠٥ن^٣ + ٠,٠١ن^٢ + ٨٤$

عند بدء التسخين $ن = ٠$

∴ $م = ٠ + ٠ + ٨٤ = ٨٤ م^٢$

(١٥) $\frac{ءح}{ءض} = \frac{-أ}{ض^٢} = -أ ض^{-٢}$

∴ $ح = -أ \int ض^{-٢} . ءض$

$= أ ض^{-١} + ث$

أى أن $ح = \frac{أ}{ض} + ث$

$١٢ = \frac{أ}{\frac{١}{٢}} + ث \Leftarrow ث = ١٢ - ٢أ$

∴ $ح = \frac{أ}{ض} + ١٢ - ٢أ$

(١٦) $\frac{ءح}{ءن} = ١٠ - \frac{٢}{٣}ن$

∴ $ح = ١٠ن - \frac{ن^٢}{٣} + ث$

عند بدء الزمن $ن = ٠$ كان $ح = ١٠$

∴ $٠ = ٠ - ٠ + ث \Leftarrow ث = ٠$

∴ $ح = ١٠ن - \frac{ن^٢}{٣}$

عندما $ن = ٣$ ∴ $ح = ٣٠ - ٣ = ٢٧ م^٣$

(١٧) $= -٦ن^٢ + ١٢ن + ٩٠$

∴ $ك = -٢ن^٣ + ٦ن^٢ + ٩٠ن + ث_١$

عند $ن = ٠$ $ك = ٠$ ∴ $ث_١ = ٠$

∴ $ك = -٢ن^٣ + ٦ن^٢ + ٩٠ن$

بالمثل ينتج أن $ل = -٢ن^٣ + \frac{٣}{٢}ن^٢ + ٨٥ن$

بالطرح $ل - ك = \frac{٣}{٢}ن^٢ - ٥ن$

عند $ن = ٤$ ∴ $ل - ك = ٤$

∴ $ل > ك$

∴ الثانية تكتب أكثر

محتويات الكتاب

أولاً : الجبر

الباب الأول : التباديل والتوافيق

الباب الثاني : الأعداد المركبة

الباب الثالث : المحددات

ثانياً : الهندسة الفراغية

الباب الأول : المستقيمات والمستويات

الباب الثانى : الإسقاط العمودى

ثالثاً : التفاضل والتكامل

الباب الأول : النهايات – الاتصال

الباب الثانى : الاشتقاق

الباب الثالث : تطبيقات على المشتقة

الباب الرابع : سلوك الدالة – رسم منحناها

الباب الخامس : التكامل

هذا الكتـــاب

الرياضيات علم تجريدي من إبداع العقل البشري يعني من بين ما يعني به بالأفكار وطرق وأنماط التفكير.
وهذا العلم لا يقف عند مجموع فروعه التقليدية فهو أكثر من علم الحساب الذي يعالج الأعداد والأرقام والحسابات وهو يزيد عن الجبر لغة الرموز والعلاقات ويتسع عن علم الهندسة حيث دراسة الشكل والحجم والفضاء أنه يستوعب الآن فوق فروعه التقليدية علم المثلثات والإحصاء والتفاضل والتكامل وغيرها.
وهذا الكتاب هو مقتطفات من الجبر والهندسة الفراغية والتفاضل والتكامل وقد روعي في تأليفه الترتيب والتتابع والتأكيد على المفاهيم الأساسية والتمهل في الإنتقال من مفهوم إلى آخر ويتميز هذا الكتاب بكثرة الأمثلة المتدرجة والتمارين المماثلة لها مع الإختلاف في الأرقام حتى يؤكد القارئ ما فهمه ويختبر مدى إستيعابه .. وذيل الكتاب بالحلول الكاملة لتمارين الكتاب.
والأمل كبير أن نكون وفقنا في تحقيق الهدف.

والله ولي التوفيق ،،،

الناشـــر

عبد الحي أحمد فؤاد

صدر أيضاً للناشر

- الإحصاء الوصفي والتحليلي — أ. أحمد السيد عـــامـــر
- الرياضة I (تفاضل – حساب مثلثات – جبر) — أ. أحمد السيد عـــامـــر
- الرياضة II الميكانيكا (إستاتيكا – ديناميكا) — أ. أحمد السيد عـــامـــر
- الإحصاء والإحتمالات في التطبيقات الهندسية — د. أمجد إبراهيم شحادة
- إتجاهات حديثة في تدريس الرياضيات — د. حســن علي سلامة
- المعادلات التفاضلية — د. أمجد إبراهيم شحادة
- أساسيات الرياضيات — أ. حسيـن رجب محمـد
- حساب التفاضل والتكامل — أ. حسيـن رجب محمـد
- طرق تدريس الرياضيات — د. حســن علي سـلامة

دار الفجـــر للنشـــر والتوزيـــع
4 شارع هاشم الأشقر – النزهة الجديدة
القاهـــرة – مصـــر
تليفون : 6242520 – 6246252 (00202)
فاكس : 6246265 (00202)
E-mail : daralfajr@yahoo.com

I.S.B.N
977-358-124-1